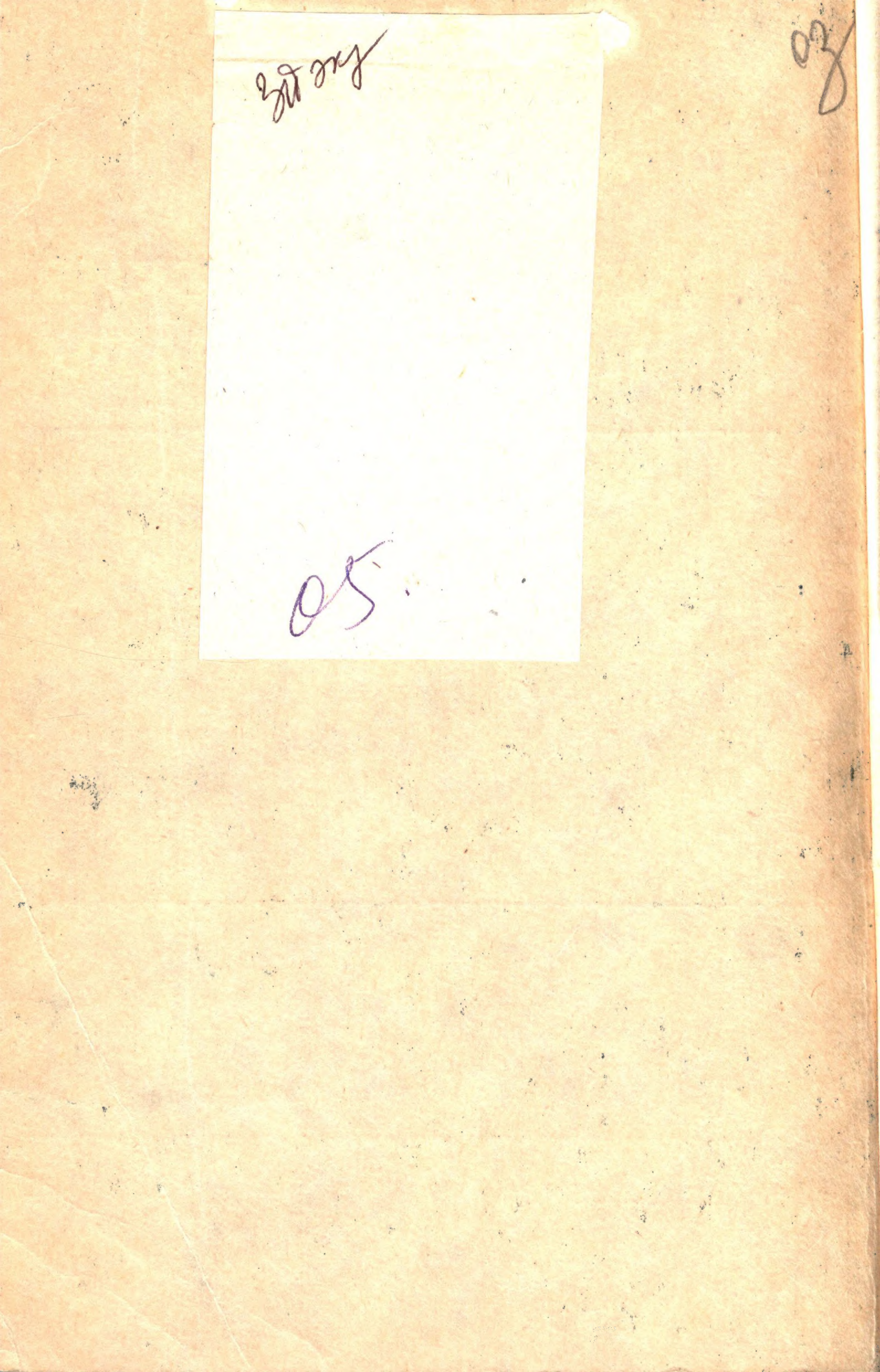
И.С.Гоноровский,
М.П.Демин

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Учебное пособие для высших учебных заведений

«Радио и связь»


05

И.С.Гоноровский,
М.П.Демин

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

5-е издание
переработанное
и дополненное

*Рекомендовано
Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему
образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Радиотехника»*


Москва
"РАДИО И СВЯЗЬ"
1994

ББК 32.841
Г65
УДК 621.372(075)

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензент: кафедра «Теоретические основы радиотехники» СПбГЭТУ (зав. кафедрой докт. техн. наук Ю. В. Егоров)

Редакция литературы по информатике и вычислительной технике

Г65 **Гоноровский И. С., Демин М. П.**
Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов.— 5-е изд., перераб. и доп.— М.: Радио и связь, 1994.— 480 с.; ил.
ISBN 5-256-01068-9.

Современный курс теории сигналов и их обработки, сложившийся на факультете радиоэлектроники летательных аппаратов Московского государственного авиационного института (технического университета). Изучаются спектральный и корреляционный анализ детерминированных и случайных сигналов и их преобразования в различных устройствах радиотехнических систем. Рассматриваются цифровая обработка сигналов, оптимальная фильтрация детерминированных и случайных сигналов, экстраполирующие и адаптивные фильтры, а также вопросы синтеза цифровых фильтров и кепстральный анализ сигналов.

Для студентов вузов радиотехнических специальностей. Представляет интерес также для научных работников и инженеров в области радиотехники и в смежных областях.

Г $\frac{2402020000-015}{046(01)-94}$ 3,4-93 ББК 32.841

Учебное издание

Гоноровский Иосиф Семенович, **Демин** Михаил Петрович

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

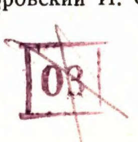
Учебное пособие

Заведующий редакцией *Ю. Г. Ивашов.*
Редакторы *Т. М. Бердичевская, Н. Г. Давыдова.*
Технические редакторы *Н. Н. Золотарева, Л. А. Горшкова.*
Корректор *З. Г. Галушкина*

ИБ 2522

ЛР № 010164 от 04.01.92
Сдано в набор 1.07.93 Подписано в печать 17.01.94
Формат 60×90¹/₁₆ Бумага офсетная № 1 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 30,0 Усл. кр.-отт. 30,25 Уч.-изд. л. 29,32
Тираж 3000 экз. Изд. № 23606 Зак. № 3305 С-15
Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ.
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403.

ISBN 5-256-01068-9



ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга, предлагаемая вниманию читателей, является развитием четвертого издания учебника «Радиотехнические цепи и сигналы», опубликованного И. С. Гоноровским в 1986 г. По сравнению с предыдущим изданием в книгу внесены изменения и дополнения, которые отражают: 1) усиление роли вычислительной техники в анализе сигналов и их цифровой обработке, 2) роль теории и техники обработки комплексных сигналов, 3) ориентацию на микроэлектронную элементную базу, 4) возникновение ряда новых задач статистической радиотехники.

Потребовалось существенное расширение разделов по спектральному анализу детерминированных и случайных сигналов (гл. 1—4), по теории преобразования радиосигналов совместно с помехами в различных устройствах радиосистем (гл. 5—9). Заново изложена теория оптимальной фильтрации случайных сигналов, авторегрессионного метода спектрального оценивания случайных процессов, принципа построения экстраполирующих и адаптивных фильтров (гл. 13).

Предполагается, что студенты знакомы с основополагающими соотношениями для элементов электрических цепей, а также теории четырехполюсников и простейших электронных приборов. За счет исключения из книги подобных традиционных разделов электротехники ее объем существенно сокращен.

Главы 4, 7, 10 и 13—16 написаны И. С. Гоноровским, главы 2, 5, 6 и 12 — М. П. Деминым, остальные главы написаны совместно.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. В. Тронину, И. С. Рыжаку и всем коллегам по кафедре теоретической радиотехники МАИ за помощь в работе над книгой рекомендациями и дискуссиями.

Большую роль в определении содержания и направленности книги сыграли ценные замечания рецензентов кафедры ТОР СПбГЭТУ — профессора Ю. В. Егорова, доц. В. Н. Малышева и доц. В. Н. Ушакова.

Глава 1. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ РАДИОСИГНАЛОВ

1.1. УЗКОПОЛОСНЫЙ РАДИОСИГНАЛ. ЦЕЛЬ ОБРАБОТКИ

Исторически радиотехника возникла как средство осуществления радиотелеграфной связи с помощью излучения электромагнитных волн, а одним из первых сигналов являлись телеграфные знаки по «коду Морзе».

В ходе развития различных направлений радиотехники (радиовещания, телевидения, радиолокации, радионавигации, радиоастрономии, радиоуправления и т. д.) изменился характер решаемых задач передачи информации и потребовались соответствующие сигналы и методы их обработки.

Широкое использование радиотехнических методов для решения задач обработки информации, не связанных с излучением радиоволн, привело к появлению и развитию нового направления — радиоэлектроники, представляющей собой симбиоз радиотехники и электроники, на котором базируется современная обработка потоков информации и моделирование сложнейших процессов и систем.

Перечисленные направления радиотехники основаны на использовании узкополосных радиосигналов.

Применительно к задачам, рассматриваемым в данной книге, произвольный узкополосный вещественный радиосигнал можно представить в следующей общей форме:

$$a(t)=A(t)\cos\psi(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)],\quad t_1<t<t_2, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ и $\theta(t)$ — функции времени t, медленные по сравнению с $\cos\omega_0 t$, а время t либо непрерывно, либо дискретно.

Ограниченный во времени отрезок высокочастотного колебания $a(t)$ является «переносчиком» полезной информации, содержащейся в его параметрах — амплитуде $A(t)$ и фазе $\theta(t)$ и, следовательно, в мгновенной частоте $d\theta(t)/dt$. Постоянная ω_0 имеет смысл «несущей частоты» радиосигнала.

Если функции $A(t)$ и $\theta(t)$ являются точно известными, то $a(t)$ — детерминированный процесс. В противном случае $a(t)$ — случайный процесс.

В реальных условиях наряду с сигналом $a(t)$, содержащим

полезную информацию, действует помеха $n(t)$, так что на вход устройства обработки поступает их совокупность, которая в наиболее простом случае аддитивной смеси имеет вид $x(t)=a(t)+n(t)$. По этой причине любой вид обработки принимаемых колебаний должен обеспечивать наиболее достоверное выделение передаваемой информации.

Специфика обработки принимаемого колебания в задачах обнаружения, оценивания параметров или формы сигнала и т. д. определяется соответствующими критериями оптимальности. Широкое распространение получили критерии согласованной фильтрации, винеровской фильтрации и некоторые другие.

Наряду с устройствами обработки с фиксированной структурой значительный интерес представляют процессоры с параметрами, управляемыми на основе оценивания статистических характеристик обрабатываемого колебания. Такие процессоры позволяют адаптироваться к внешней обстановке; примером подобной системы является фильтр Калмана.

1.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В процессе передачи сообщений сигналы подвергаются ряду преобразований. Основные из них:

преобразование исходного сообщения в электрический сигнал $e_\Omega(t)$; как правило, $e_\Omega(t)$ относительно низкочастотный процесс (Ω — в акустическом или видеочастотном диапазоне); в дальнейшем $e_\Omega(t)$ часто будет называться управляющим сигналом;

модуляция колебания несущей частоты (амплитудная, угловая или совместная);

перенос спектра принятого колебания в область более низких частот (на промежуточную частоту) с помощью процесса гетеродинирования для облегчения задачи последующей обработки и прежде всего фильтрации;

демодуляция принятого колебания;

фильтрация, обеспечивающая, как отмечалось в § 1.1, оптимальное выделение передаваемого сообщения.

Для осуществления процессов модуляции, демодуляции и гетеродинирования, сопровождающихся изменением состава частотного спектра колебания, требуются нелинейные или параметрические системы.

Последняя операция (оптимальная фильтрация), которая снижает уровень помехи относительно полезного сигнала, должна осуществляться без возникновения новых частот; из этого следует, что фильтрующее устройство должно представлять собой линейную систему с постоянными параметрами.

В основе деления систем на линейные и нелинейные лежит условие применимости принципа суперпозиции, сформулирован-

ное относительно операции суммирования сигналов на входе системы. Однако иногда колебание на входе является произведением двух колебаний. Оказывается, что и для подобных колебаний можно осуществлять обработку, подчиняющуюся принципу суперпозиции. В этом случае устройство обработки является сочетанием специально подобранных линейных и нелинейных операций, а сама обработка называется гомоморфной.

1.3. ОБРАБОТКА НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

В процессе передачи сообщений и преобразования принимаемых колебаний приходится иметь дело с функциями времени, которые можно разделить на следующие классы:

произвольные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.1, *а*);

произвольные по величине и дискретные по времени (рис. 1.1, *б*);

квантованные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.1, *в*);

квантованные по величине и дискретные по времени (рис. 1.1, *г*).

Сигналы первого класса (рис. 1.1, *а*) иногда называют аналоговыми, так как их можно толковать как электрические модели физических величин, или непрерывными, так как они задаются по оси времени на несчетном множестве точек. Такие множества называются континуальными. При этом по оси ординат сигналы могут принимать любое значение в определенном интервале. Поскольку эти сигналы могут иметь разрывы, как на рис. 1.1, *а*, то, чтобы избежать некорректности при описании, такие сигналы лучше обозначать термином к о н т и н у а л ь н ы й.

Итак, континуальный сигнал $s(t)$ является функцией непрерывной переменной t, а дискретный сигнал $s(t)$ — функцией дискретной переменной t, принимающей только фиксированные значения. Дискретные сигналы могут создаваться непосредственно источником информации (например, дискретными датчиками в системах управления или телеметрии) или образовываться в результате дискретизации континуальных сигналов.

На рис. 1.1, *б* представлен сигнал, заданный при дискретных значениях времени t (на счетном множестве точек); величина

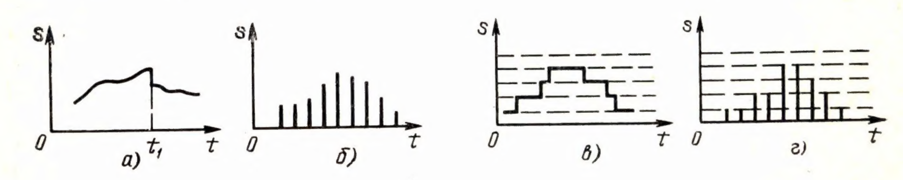


Рис. 1.1

же сигнала в этих точках может принимать любое значение в определенном интервале по оси ординат (как на рис. 1.1, *а*). Таким образом, термин **дискретный** характеризует не сам сигнал, а способ задания его на временно́й оси.

Сигнал на рис. 1.1, *в* задан на всей временно́й оси, однако его величина может принимать лишь дискретные значения. В подобных случаях говорят о сигнале, квантованном по уровню.

В дальнейшем термин дискретный будет применяться только по отношению к дискретизации по времени; дискретность же по уровню будет обозначаться термином **квантование**.

Квантование используют при представлении сигналов в цифровой форме с помощью цифрового кодирования, поскольку уровни можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов. Поэтому дискретный по времени и квантованный по уровню сигнал (рис. 1.1, *г*) в дальнейшем будет называться цифровым.

Таким образом, можно различать континуальные (рис. 1.1, *а*), дискретные (рис. 1,1, *б*), квантованные (рис. 1.1, *в*) и цифровые (рис. 1.1, *г*) сигналы.

Каждому из этих классов сигналов можно поставить в соответствие аналоговую, дискретную или цифровую системы. Связь между классом сигнала и видом системы показана на рис. 1.2.

При обработке континуального сигнала с помощью аналоговой системы не требуется дополнительных преобразований сигнала. При обработке же континуального сигнала с помощью дискретной системы необходимы два преобразования: дискретизация сигнала по времени на входе дискретной системы и обратное преобразование, т. е. восстановление континуальной структуры на выходе дискретной системы. Наконец, при цифровой обработке континуального сигнала требуется еще два до-

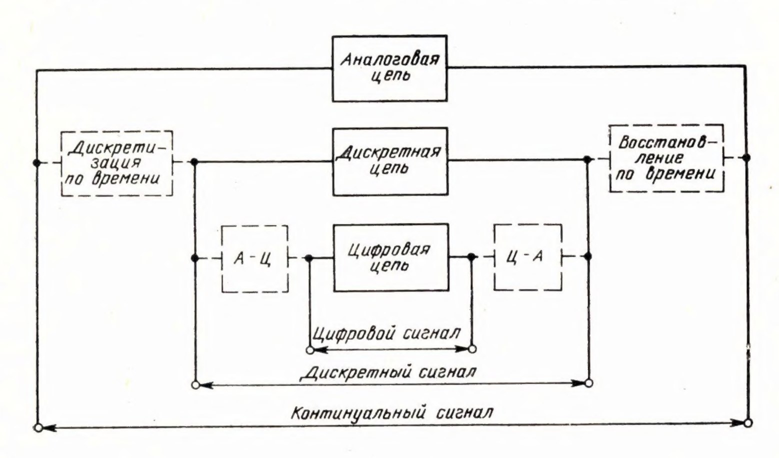


Рис. 1.2

полнительных преобразования: аналог-цифра, т. е. квантование и цифровое кодирование на входе цифровой системы, и обратное преобразование цифра-аналог, т. е. декодирование на выходе цифровой системы.

1.4. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАБОТКИ РАДИОСИГНАЛОВ

Требования к характеристикам радиосигналов обусловлены проблемой помехоустойчивости и электромагнитной совместимости радиотехнических систем.

Важное значение имеет формирование сигналов с минимальным «внеполосным излучением», т. е. с минимальной шириной спектра при заданной информативности сигнала. Это требует отыскания формы сигнала, при которой произведение длительности сигнала на ширину спектра минимально. При этом необходимо также учитывать расширение спектра колебания, связанное с осуществлением модуляции.

Спектральному и корреляционному анализу детерминированных колебаний — без высокочастотного заполнения, а также модулированных колебаний посвящены гл. 2 и 3.

Серьезной проблемой является формирование колебания, пригодного для когерентной обработки сигналов. Задача сводится к подавлению паразитной модуляции (частотной и фазовой) в генераторе исходного колебания. Необходимо также учитывать наложение на полезный сигнал шумовой помехи, формируемой в рассматриваемой цепи (от внешнего источника).

Преобразование детерминированных сигналов в линейных системах рассматривается в гл. 5 и 6, а случайных процессов — в гл. 4 и 7.

Существенное влияние на качество обработки оказывает преобразование сигналов в нелинейных системах. Особое внимание необходимо уделять интермодуляционным помехам, возникающим при взаимодействии различных сигналов в нелинейных системах. Уровень этих помех, ограничивающих динамический диапазон устройства обработки, может служить мерой допустимой нелинейности системы (см. гл. 8 и 9).

Некоторые трудности возникают при построении дискретных систем обработки сигналов, поступающих от аналогового источника сообщений (гл. 12).

В последние годы осваиваются методы обработки сигналов, основанные на теории прогнозирования случайных процессов. Применение оптимальных экстраполирующих фильтров позволяет осуществить спектральное оценивание случайных процессов по коротким реализациям, повышая тем самым степень разрешения и открывая путь к построению адаптивных фильтров (§ 13.9—13.15).

В последней главе излагается суть кепстрального анализа сигналов и иллюстрируется применение этого метода для определения задержки сигнала в электронных и акустических системах.

Глава 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

2.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА В ВИДЕ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для теории сигналов и их обработки важное значение имеет разложение заданной функции $f(x)$ по различным ортогональным системам функций $\varphi_n(x)$. Приведем основные определения, относящиеся к свойствам ортогональных систем.

Бесконечная система действительных функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{2.1}$$

называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx=0 \text{ при } n\neq m. \tag{2.2}$$

Это условие выражает попарную ортогональность функций системы (2.1). Величина

$$\|\varphi_n\|=\left[\int_a^b \varphi^2{}_n(x)\,dx\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

называется нормой функции $\varphi_n(x)$. При этом предполагается, что $\|\varphi_n\|\neq 0$, т. е. что никакая из функций рассматриваемой системы (2.1) не равна тождественно нулю.

Функция $\varphi_n(x)$, для которой выполняется условие $\|\varphi_n\|=1$, называется нормированной, а система нормированных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$, в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, называется ортонормированной системой.

В математике доказывается, что если функции $\varphi_n(x)$ непрерывны, то произвольная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, для которой выполняется условие

$$\int |f(x)|^2 dx<\infty,$$

может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots \quad (2.4)$$

Интеграл в предыдущем выражении вычисляется по области определения функции $f(x)$.

Умножим обе части уравнения (2.4) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем в пределах от a до b. Все слагаемые вида $\int\limits_a^b c_m\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx$ при $m\neq n$ обращаются в нуль в силу ортогональности функций $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$. В правой части остается одно слагаемое

$$\int\limits_a^b c_n\varphi_n(x)\varphi_n(x)\,dx=c_n\int\limits_a^b \varphi^2{}_n(x)\,dx=c_n\|\varphi_n\|^2,$$

что позволяет написать

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx=c_n\|\varphi_n\|^2,$$

откуда следует важное соотношение

$$c_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \quad (2.5)$$

Ряд (2.4), в котором коэффициенты c_n определены по формуле (2.5), называется **обобщенным рядом Фурье** по данной системе $\varphi_n(x)$. Совокупность коэффициентов c_n, называемая **спектром** сигнала $f(x)$ в ортогональной системе $\varphi_n(x)$, полностью определяет этот сигнал.

Обобщенный ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе функций $\varphi_n(x)$ и фиксированном числе слагаемых ряда (2.4) он обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) данной функции $f(x)$. Это означает, что среднеквадратическая ошибка, под которой подразумевается величина

$$M=\int\limits_a^b\left[f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)\right]^2dx,$$

достигает минимума, когда коэффициенты ряда $a_n=c_n$.

Можно показать, что

$$M_{\min}=\int\limits_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{n=0}^{N}c_n{}^2\|\varphi_n\|^2. \quad (2.6)$$

Так как величина $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx=\|f\|^2$ является квадратом

нормы функции $f(x)$, а $M_{\min} \geqslant 0$, то на основании (2.6) можно написать

$$\sum_{n=0}^{N} c^2{}_n \|\varphi_n\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2.7}$$

Это выражение, называемое неравенством Бесселя, справедливо для любой ортогональной системы.

Ортогональная система называется полной, если увеличением числа слагаемых в ряде среднеквадратическую ошибку $M_{\min}$ можно сделать сколь угодно малой.

Условие полноты можно записать в виде соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^2{}_n \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2. \tag{2.8}$$

При выполнении этого условия можно считать, что ряд (2.4) сходится в среднем, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x) \right]^2 dx = 0. \tag{2.9}$$

Из этого, однако, еще не следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ сходится к $f(x)$, т. е. что

$$\max \left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \right| = 0$$

при любых значениях x. В отдельных точках на оси x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ может отличаться от $f(x)$, хотя равенство (2.9) имеет место.

Для системы комплексных функций $\varphi_n(x)$ приведенные выше определения обобщаются следующим образом:

условие ортонормированности

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m^*(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m; \end{cases} \tag{2.2'}$$

квадрат нормы функции

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi^*{}_n(x)\, dx = \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\, dx; \tag{2.3'}$$

коэффициенты обобщенного ряда Фурье

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\, \varphi^*{}_n(x)\, dx. \tag{2.5'}$$

В этих выражениях $\varphi_n^*(x)$ обозначает функцию, комплексно-сопряженную с функцией $\varphi_n(x)$[1].

Для сигналов $s(t)$, являющихся функциями времени, выражение (2.4) в дальнейшем будем записывать в форме

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(t). \tag{2.10}$$

Если $s(t)$ — напряжение или ток, то $p(t)=s^2(t)$ есть мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом, а квадрат нормы функции $s(t)$ по аналогии с (2.3) будет

$$\| s \|^2=\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt=Э. \tag{2.11}$$

Это выражение определяет энергию сигнала $s(t)$.

В соответствии с формулой (2.8) энергия сигнала

$$Э=\sum_{n=0}^{\infty} | c_n |^2 \| \varphi_n \|^2. \tag{2.12}$$

а при использовании ортонормированной системы функций

$$Э=\sum_{n=0}^{\infty} | c_n |^2. \tag{2.12'}$$

При этом имеется в виду, что промежуток времени $t_2—t_1$, в котором определяется энергия $Э$, является интервалом ортогональности для системы функций $\varphi_n(t)$.

---

[1] Дальнейшее обобщение условия ортонормированности достигается введением под знак интеграла в (2.2′) действительной неотрицательной функции $\rho(x)$, называемой **весовой функцией**:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m^*(x)\,\rho(x)\,dx=\begin{cases}1 & \text{при } n=m,\\ 0 & \text{при } n\neq m.\end{cases} \tag{2.2''}$$

Говорят, что функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$. Это означает, что в соответствии с определением (2.2″) ортогональны не сами эти функции, а функции $\sqrt{\rho(x)}\,\varphi_n(x)$ и $\sqrt{\rho(x)}\,\varphi_m(x)$; при $\rho(x)\equiv 1$ функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ ортогональны с единичным весом.

При определении коэффициентов обобщенного ряда Фурье, аппроксимирующего функцию $f(x)$, следует исходить из формулы, аналогичной (2.5′), но с учетом весовой функции:

$$c_n=\frac{1}{\| \varphi_n \sqrt{\rho} \|}\int_a^b f(x)\,\varphi_n^*(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{2.5''}$$

где $\| \varphi_n \sqrt{\rho} \|^2=\int_a^b | \varphi_n(x) |^2 \rho(x)\,dx$ — квадрат нормы функции $\varphi_n(x)\sqrt{\rho(x)}$.

Отношение

$$\frac{Э}{t_2-t_1}=\frac{1}{t_2-t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\,\|\varphi_n\|^2=\overline{s^2(t)} \qquad (2.13)$$

определяет среднюю за время t_2-t_1 мощность сигнала.

Выбор наиболее рациональной ортогональной системы функций зависит от цели, преследуемой при разложении произвольной функции в ряд. Среди разнообразных задач, требующих разложения произвольного сигнала, наиболее важными являются: 1) точное представление сигнала в виде суммы простейших ортогональных колебаний; 2) аппроксимация сигналов или характеристик, когда требуется свести к минимуму число членов ряда (при заданной допустимой погрешности).

При первой постановке задачи наибольшее распространение получила ортогональная система основных тригонометрических функций — синусов и косинусов. Это объясняется рядом причин. Во-первых, гармоническое колебание является единственной функцией времени, сохраняющей свою форму при прохождении через любую линейную цепь (с постоянными параметрами). Изменяются лишь амплитуда и фаза колебания. Во-вторых, разложение сложного сигнала по синусам и косинусам позволяет использовать символический метод, разработанный для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи. По этим и некоторым другим причинам гармонический анализ получил широкое распространение во всех отраслях современной науки и техники.

При второй постановке задачи — приближенном представлении сигналов — применяются разнообразные ортогональные системы функций: полиномы Чебышева, Эрмита, Лагерра, Лежандра и многие другие. Получившие большое распространение в цифровой технике функции Уолша будут подробно рассмотрены в гл. 14.

2.2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

При разложении периодического сигнала с периодом T в ряд Фурье в качестве ортогональной системы берут систему гармонических колебаний кратных частот

$$1,\ \cos\omega_1 t,\ \sin\omega_1 t,\ \cos 2\omega_1 t,\ \sin 2\omega_1 t,\ \ldots,\ \cos n\omega_1 t,$$

$$\sin n\omega_1 t,\ \ldots \qquad (2.14)$$

или (в комплексной форме)

$$\ldots,\ e^{-i2\omega_1 t},\ e^{-i\omega_1 t},\ 1,\ e^{i\omega_1 t},\ e^{i2\omega_1 t},\ \ldots,\ e^{in\omega_1 t},\ \ldots \qquad (2.15)$$

Интервал ортогональности в обоих случаях совпадает с периодом $T=2\pi/\omega_1$ сигнала $s(t)$.

Предполагается, что $s(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. $s(t)$ — функция ограниченная и имеет на интервале $[-T/2, T/2]$ конечное число разрывов, а также конечное число максимумов и минимумов.

Воспользуемся сначала ортогональной системой (2.15). Тогда ряд Фурье должен быть записан в комплексной форме

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}. \tag{2.16}$$

Совокупность коэффициентов c_n ряда Фурье в базисе тригонометрических функций называется **частотным спектром** периодического сигнала. Коэффициенты ряда (2.16) c_n определяются с помощью формул, приведенных в предыдущем параграфе.

Из формулы (2.3′) следует, что

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega_1 t} e^{-in\omega_1 t} dt = T. \tag{2.17}$$

Используя формулу (2.5′), получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-in\omega_1 t} dt. \tag{2.18}$$

Коэффициенты c_n в общем случае являются комплексными величинами. Подставив в (2.18) $e^{-in\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t - i \sin n\omega_1 t$, получим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)(\cos n\omega_1 t - i \sin n\omega_1 t)\, dt = c_{nc} - ic_{ns}, \tag{2.19}$$

где косинусная (действительная) и синусная (мнимая) части коэффициента c_n определяются формулами

$$c_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t)\, dt,$$

$$c_{ns} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt. \tag{2.20}$$

Коэффициенты c_n часто бывает удобно записывать в форме

$$c_n = |c_n|\, e^{i\theta_n}, \tag{2.21}$$

где

$$|c_n| = \sqrt{c_{nc}^2 + c_{ns}^2}, \tag{2.22}$$

$$\theta_n = -\operatorname{arctg}(c_{ns}/c_{nc}). \tag{2.23}$$

Модуль $|c_n|$ является четной функцией дискретной пере-

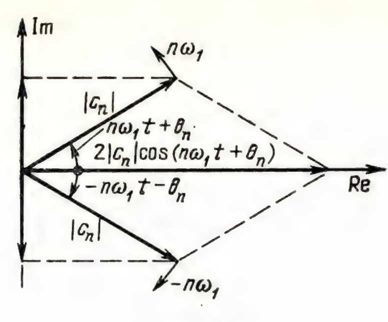


Рис. 2.1

менной n, а аргумент θ_n — нечетной: $|c_n|=|c_{-n}|$, $\theta_n=-\theta_{-n}$.

Общее выражение (2.16) можно привести к виду

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|\,e^{i(n\omega_1 t+\theta_n)}. \tag{2.24}$$

Теперь нетрудно перейти к тригонометрической форме ряда Фурье. Выделим в ряде (2.24) пару слагаемых, соответствующих какому-либо фиксированному $|n|$. Векторная диаграмма этих комплексных составляющих ряда представлена на рис. 2.1. Векторы длиной $|c_n|$ вращаются с угловой частотой $n\omega_1$ во взаимно противоположных направлениях. Сумма проекций этих векторов на действительную ось дает вещественную функцию $2|c_n|\cos(n\omega_1 t+\theta_n)$, а сумма проекций этих же векторов на мнимую ось равна нулю.

Отсюда следует, что при переходе к тригонометрической форме ряд (2.24) необходимо записать следующим образом:

$$s(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}2|c_n|\cos(n\omega_1 t+\theta_n). \tag{2.25}$$

Коэффициент c_0 остается неизменным, так как в ряде (2.24) составляющая с нулевой частотой не имеет «дублера».

Вместо выражения (2.25) в математической и радиотехнической литературе часто встречается следующая форма записи:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t+\theta_n), \tag{2.26}$$

причем $\theta_n=-\operatorname{arctg}(b_n/a_n)$.

Из сопоставления выражений (2.26) и (2.25) видно, что амплитуда n-й гармоники A_n связана с коэффициентом $|c_n|$ ряда (2.24) соотношением

$A_n=2|c_n|$, а $a_n=2c_{nc}$, $b_n=2c_{ns}$.

Таким образом, для всех $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\, dt,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\, dt. \qquad (2.27)$$

Если сигнал $s(t)$ — четная функция времени, т. е. $s(t) = s(-t)$, то в тригонометрической записи ряда остаются только косинусоиды, так как коэффициенты b_n в соответствии с формулой (2.27) обращаются в нуль. Для нечетной функции $s(t)$, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n и ряд состоит только из синусоид.

Две характеристики — амплитудная и фазовая, т. е. модули и аргументы комплексных коэффициентов ряда Фурье, полностью определяют структуру частотного спектра периодического колебания. Наглядное представление о структуре и «ширине» спектра дает графическое изображение спектра амплитуд. В качестве примера на рис. 2.2, *а* построен спектр коэффициентов $|c_n|$, а на рис. 2.2, *б* — спектр амплитуд $A_n = 2|c_n|$ для одного и того же периодического колебания. Для исчерпывающей характеристики спектра подобные построения должны быть дополнены заданием начальных фаз θ_n отдельных гармоник.

Спектр периодического колебания называется **линейчатым** или **дискретным**, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам 0, ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ и т. д.

При рассмотрении энергетических характеристик периодического сигнала основной интерес представляют средняя мощность и распределение этой мощности между отдельными гармониками. Очевидно, что средняя мощность сигнала, рассматриваемого на всей оси времени, совпадает с мощностью, сред-

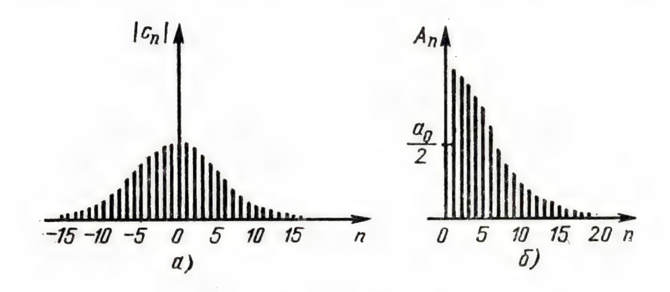


Рис. 2.2

ней за один период T. Поэтому можно воспользоваться формулой (2.13), в которой под коэффициентами c_n следует подразумевать коэффициенты ряда (2.16), а под интервалом ортогональности (t_2-t_1) и квадратом нормы $\|\varphi_n\|^2$ — величину T [см. (2.17)].

Таким образом, средняя мощность периодического сигнала

$$\overline{s^2(t)}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{2.28}$$

Используя тригонометрическую форму ряда Фурье и учитывая, что $c_0=a_0/2$ и $|c_n|=A_n/2$, получаем

$$\overline{s^2(t)}=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^2=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2. \tag{2.29}$$

Если $s(t)$ представляет собой ток $i(t)$, то при прохождении его через сопротивление r выделяется мощность (средняя)

$$P=r\overline{i^2(t)}=r(I_0^2+I_1^2/2+I_2^2/2+\ldots),$$

где $I_0=a_0/2$ — постоянная составляющая, а $I_n=A_n$ — амплитуда n-й гармоники тока $i(t)$.

Итак, полная средняя мощность периодического сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельно постоянной составляющей I_0 и гармониками с амплитудами I_1, I_2, ... Это означает, что средняя мощность не зависит от фаз отдельных гармоник. Объясняется это свойство ортогональностью гармонических составляющих ряда Фурье.

Очевидно, что энергия периодического сигнала, длящегося от $t=-\infty$ до $t=\infty$, бесконечно велика.

Представление сложного периодического колебания рядом Фурье в сочетании с принципом наложения представляет собой эффективное средство для изучения влияния линейных цепей на прохождение сигналов. Следует, правда, отметить, что определение сигнала на выходе цепи по сумме гармоник с известными амплитудами и фазами является непростой задачей, особенно если не обеспечивается быстрая сходимость ряда Фурье, представляющего входной сигнал. Наиболее распространенные в радиотехнике сигналы не соответствуют этому условию, и для удовлетворительного воспроизведения формы сигналов обычно необходимо суммировать большое число гармоник.

2.3. СПЕКТРЫ ПРОСТЕЙШИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим спектры простейших периодических колебаний, часто используемых в различных электронных устройствах. Ряд Фурье для указанных сигналов $s(t)$ записывается ниже в

тригонометрической форме. Амплитуды косинусоид a_n или синусоид b_n определяются с помощью формул (2.27).

2.3.1 ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ СИГНАЛ (МЕАНДР)

При выборе начала отсчета времени в соответствии с рис. 2.3, *а* функция $s(t)=e(t)$ нечетна, а в случае рис. 2.3,*б* — четна.

В первом случае ряд Фурье содержит только синусоиды с коэффициентами

$$b_n=\frac{4E}{Tn\omega_1}\left(1-\cos\frac{n\omega_1 T}{2}\right)=\frac{2E}{\pi n}(1-\cos n\pi)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } n=0,2,4,\ldots,\\ 4E/n\pi & \text{при } n=1,3,5,\ldots.\end{cases}$$

Спектр коэффициентов b_n изображен на рис. 2.4. При $a_n=0$ коэффициенты b_n совпадают с амплитудами A_n соответствующих гармоник. Ряд Фурье в данном случае записывается в форме

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\ldots\right). \tag{2.30}$$

Для получения спектра четной функции $s(t)=e(t)$, рис. 2.3, *б*, сдвинутой относительно предыдущей функции на время $T/4$ (в сторону опережения) достаточно учесть набег фазы спектральных составляющих на величину $\theta_n=\omega_n T/4$. Таким образом, $\theta_1=\omega_1 T/4=\pi/2$, $\theta_3=3\pi/2$, $\theta_5=5\pi/2$ и т. д. Соответственно, коэффициенты ряда Фурье $b_1\leftarrow a_1$, $b_3\leftarrow -a_3$, $b_5\leftarrow a_5$ и т. д.

Итак, для четной функции ряд содержит только косинусоидальные члены:

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\ldots\right). \tag{2.31}$$

Спектр амплитуд $A_n=|a_n|$ для четной функции показан на рис. 2.4.

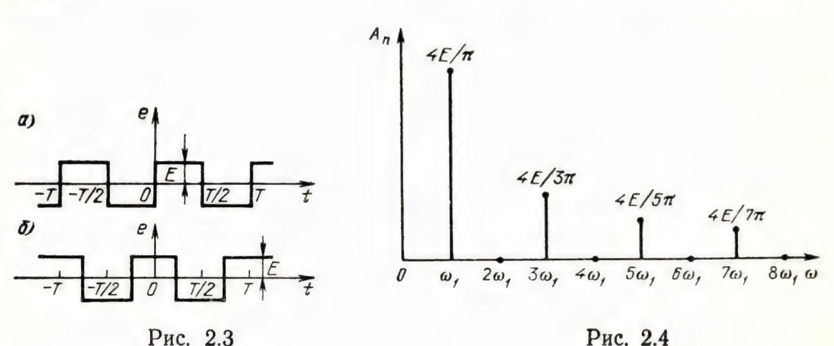


Рис. 2.3

Рис. 2.4

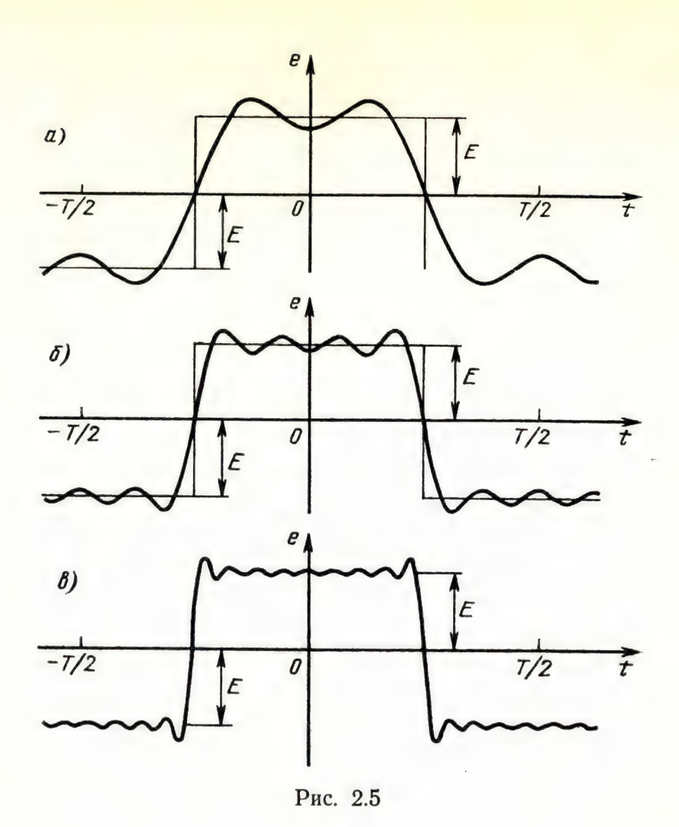


Рис. 2.5

График суммы 1-й и 3-й гармоник изображен на рис. 2.5, *а*. На рис. 2.5, *б* эта сумма дополнена 5-й и 7-й гармониками, а на рис. 2.5, *в* — 9-й, 11-й, . . . , 17-й.

С увеличением числа суммируемых гармоник сумма ряда приближается к функции $e(t)$ всюду, кроме точек вблизи разрыва функции, где образуется выброс. При $n\to\infty$ величина этого выброса равна $\pm 1{,}18E$, т. е. сумма ряда отличается от заданной функции на 18%. Этот дефект сходимости в математике получил название явления Гиббса. Несмотря на то, что в рассматриваемом случае ряд Фурье не сходится к разлагаемой функции $e(t)$ в точках ее разрыва, ряд сходится в среднем, поскольку при $n\to\infty$ выбросы являются бесконечно узкими и не вносят никакого вклада в интеграл (2.9).

2.3.2. ПИЛООБРАЗНЫЙ СИГНАЛ

Ряд Фурье в данном примере содержит только синусоиды с амплитудами $|b_n| = |-2E\cos(n\pi)/n\pi|$. Как видим, амплитуды гармоник убывают по закону $1/n$, где $n=1,\ 2,\ 3, \ldots$

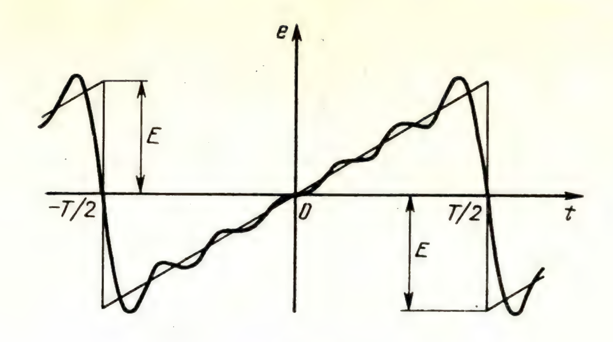


Рис. 2.6

Таким образом,

$$e(t)=\frac{2E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t+\ldots\right). \qquad (2.32)$$

На рис. 2.6 показан график суммы первых шести гармоник ряда.

2.3.3. ТРЕУГОЛЬНЫЙ СИГНАЛ

Ряд Фурье для этой функции содержит только косинусоиды нечетных гармоник и может быть записан в виде

$$e(t)=\frac{8E}{\pi^2}\left(\cos\omega_1 t+\frac{1}{9}\cos 3\omega_1 t+\ldots+\frac{1}{n^2}\cos n\omega_1 t+\ldots\right). \qquad (2.33)$$

На рис. 2.7 изображена сумма первых двух членов этого ряда. В данном случае отметим более быстрое (по закону $1/n^2$) убывание амплитуд гармоник, чем в предыдущих примерах. Это объясняется отсутствием разрывов (скачков) в разлагаемой функции.

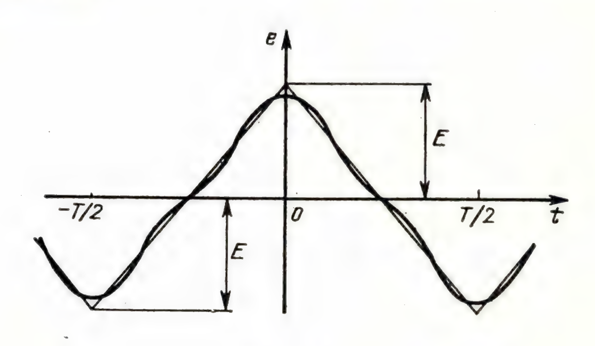


Рис. 2.7

2.3.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УНИПОЛЯРНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Важным параметром подобных сигналов является отношение $q=T/\tau_и$, называемое **скважностью** импульсной последовательности и имеющее в практических приложениях диапазон значений от нескольких единиц до нескольких тысяч.

Для четной функции (рис. 2.8) коэффициенты ряда Фурье равны

$$\frac{a_0}{2}=\frac{E\tau_и}{T}=E/q, \quad a_n=\frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\omega_1\tau_и}{2}=\frac{2E}{q}\,\frac{\sin(n\pi/q)}{(n\pi/q)}, \quad b_n=0.$$

Таким образом,

$$e(t)=E\left(\frac{1}{q}+\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q}\cos n\omega_1 t\right). \qquad (2.34)$$

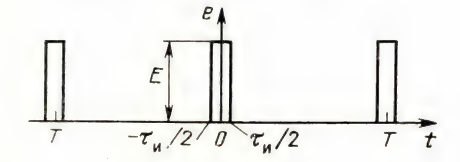
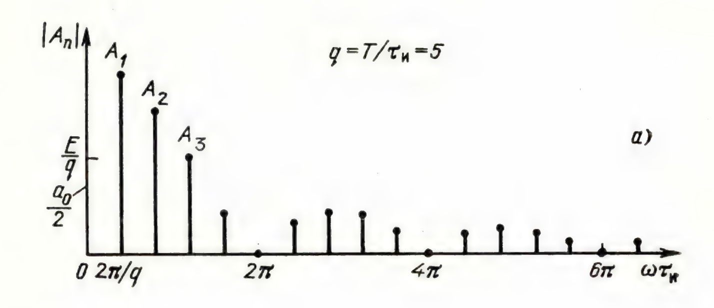


Рис. 2.8



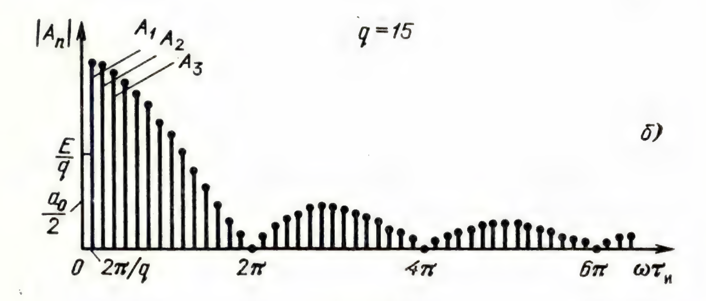


Рис. 2.9

Спектр амплитуд $A_n=|a_n|$ рассматриваемого сигнала имеет лепестковую структуру (рис. 2.9). Расстояние между спектральными линиями в q раз меньше ширины одного лепестка. Отсюда ясно, что при $q\gg1$ спектр содержит очень большое число гармоник (рис. 2.9, *б*). В этом случае амплитуды соседних гармоник близки по величине и при малых значениях n $A_n\approx2E/q=a_0$.

2.4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Изложенный в § 2.2 гармонический анализ периодических сигналов можно обобщить на непериодические сигналы. Пусть такой сигнал $s(t)$ представляет собой один период периодической функции $s_п(t)$ (рис. 2.10, *а*). Запишем этот сигнал (рис. 2.10, *б*) в виде ряда Фурье

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}, \quad -T/2<t<T/2, \tag{2.35}$$

где $\omega_1=2\pi/T$, а коэффициенты c_n определяются формулой (2.18).

Вне интервала $-T/2<t<T/2$ ряд (2.35) определяет периодическую функцию $s_п(t)=s(t\pm kT)$, где k — целое число. Для того, чтобы вне указанного интервала функция равнялась нулю, величина T должна быть устремлена в бесконечность. Однако в предельном случае $T\to\infty$, как видно из (2.18), коэффициенты ряда $c_n\to0$. Введем в рассмотрение спектральную функцию, получающуюся умножением коэффициентов c_n на период T:

$$\mathbf{S}(n\omega_1)=c_nT=\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,e^{-in\omega_1 t}dt. \tag{2.36}$$

При увеличении периода T расстояние между соседними

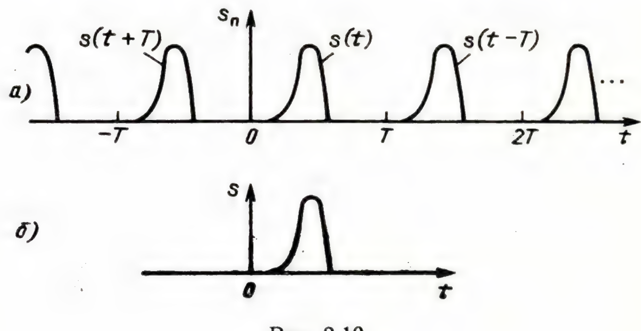


Рис. 2.10

линиями спектра $\mathbf{S}(n\omega_1)$ уменьшается, но для фиксированной частоты $\omega=n\omega_1=n2\pi/T$ (частота фиксируется за счет соответствующего увеличения n при увеличении T) значение $\mathbf{S}(\omega=n\omega_1)$ остается неизменным.

Запишем теперь ряд Фурье, используя (2.36):

$$s_\text{п}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(n\omega_1)\,\mathrm{e}^{in\omega_1 t}\omega_1/2\pi. \qquad (2.37)$$

Здесь учтено, что $T=2\pi/\omega_1$.

Устремляя $T\to\infty$, получаем:

периодическая функция $s_\text{п}(t)$ преобразуется в непериодический сигнал $s(t)$ (см. рис. 2.10, *б*);

дискретная функция частоты $\mathbf{S}(n\omega_1)$ [формула (2.36)] преобразуется в непрерывную функцию (сплошной спектр)

$$\mathbf{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt; \qquad (2.38)$$

операция суммирования в ряде (2.37) заменяется операцией интегрирования, что приводит к представлению непериодического сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega. \qquad (2.39)$$

Интеграл (2.38) называется **спектральной плотностью** или **спектральной характеристикой** функции $s(t)$.

Предполагается, что функция $s(t)$ должна быть абсолютно интегрируемой, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt<\infty$, иметь конечное число максимумов и минимумов, а также конечное число разрывов на каждом конечном интервале.

Интеграл (2.39) сходится к значению $s(t)$ в каждой точке, не имеющей разрыва, и к величине, равной среднему значению лево- и правостороннего пределов в точке разрыва $s(t)$.

Выражения (2.38) и (2.39) называются соответственно **прямым и обратным преобразованиями Фурье**.

Полезно провести сравнение спектральных характеристик периодической последовательности импульсов и одиночного импульса этой последовательности (рис. 2.10). С этой целью обратимся к выражению (2.36), из которого следует

$$c_n=\mathbf{S}(n\omega_1)/T=f_1\mathbf{S}(n\omega_1). \qquad (2.40)$$

Здесь $\mathbf{S}(n\omega_1)$ — значение спектральной плотности одиночного импульса на частоте $n\omega_1$, а $f_1=1/T$ — частота следования импульсов.

Соответственно комплексная амплитуда n-й гармоники спектра периодического сигнала

$$\mathbf{A}_n = 2c_n = 2f_1 \mathbf{S}(n\omega_1). \qquad (2.40')$$

Итак, модуль спектральной плотности одиночного импульса и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности, полученной путем повторения заданного импульса, совпадают по форме и отличаются только масштабом.

Это свойство полезно использовать при нахождении спектра периодического сигнала: сначала определяется спектральная плотность одиночного импульса, а затем с помощью (2.40) — коэффициенты ряда Фурье.

На рис. 2.11, *а* изображен модуль спектральной плотности одиночного импульса, а на рис. 2.11, *б* — линейчатый (дискретный) спектр периодической последовательности этих же импульсов. Штриховой линией на этом рисунке показана огибающая линейчатого спектра $|c_n| = f_1 |\mathbf{S}(n\omega_1)|$.

С увеличением периода T спектральные линии на рис. 2.11, *б* сближаются и коэффициенты $|c_n|$ уменьшаются, но так, что отношение $|c_n|/f_1$ остается неизменным. В пределе при $T \to \infty$ приходим к одиночному импульсу со спектральной плотностью

$$\mathbf{S}(\omega) = \lim_{f_1 \to 0} (c_n / f_1).$$

Таким образом, становится наглядным термин «спектральная плотность»: $\mathbf{S}(\omega)$ *есть амплитуда напряжения (тока), при-*

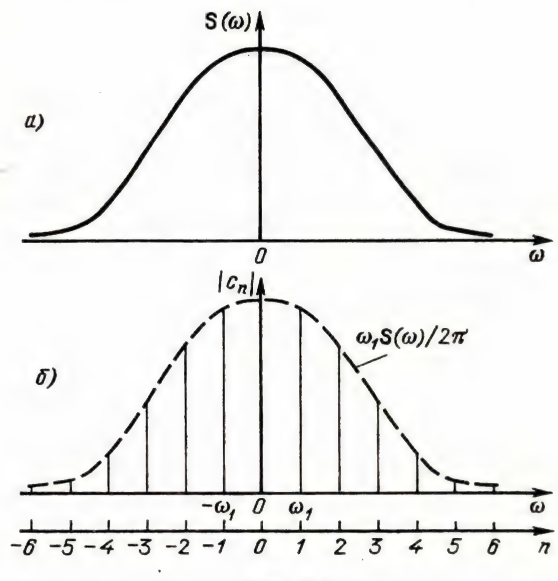


Рис. 2.11

ходящаяся на 1 Гц в бесконечной узкой полосе частот, которая включает в себя рассматриваемую частоту ω.

Спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ обладает всеми основными свойствами коэффициентов c_n комплексного ряда Фурье [ср. (2.18) и (2.38)].

По аналогии с (2.19) и (2.21) можно написать

$$S(\omega)=A(\omega)-iB(\omega)=\mathbf{S}(\omega)\,e^{i\theta(\omega)}, \tag{2.41}$$

где

$$A(\omega)=\mathrm{Re}\,\{\mathbf{S}(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega t)\,dt,$$
$$B(\omega)=\mathrm{Im}\,\{\mathbf{S}(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(\omega t)\,dt. \tag{2.42}$$

Модуль и аргумент спектральной плотности определяются выражениями

$$S(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}, \tag{2.43}$$

$$\theta(\omega)=-\mathrm{arctg}\,[B(\omega)/A(\omega)]. \tag{2.44}$$

Первое из этих выражений определяет амплитудно-частотную (АЧХ), а второе фазочастотную (ФЧХ) характеристики спектра непериодического сигнала.

Из определения (2.38) следует, что если $s(t)$ — действительная функция, то $\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{S}^*(-\omega)$. Это означает, что $A(\omega)$ и $S(\omega)$ являются четными, а $B(\omega)$ и $\theta(\omega)$ — нечетными функциями частоты ω.

Если $s(t)=s(-t)$, т. е. сигнал является четной функцией времени, то его спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{S}(-\omega)=A(\omega)$ является действительной и четной функцией ω. В этом случае $B(\omega)=0$ и $\mathbf{S}(\omega)=S(\omega)$.

Если $s(t)=-s(t)$, т. е. сигнал является нечетной функцией времени, то его спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)=-\mathbf{S}(-\omega)=-iB(\omega)$ является чисто мнимой и нечетной функцией ω [в этом случае $A(\omega)=0$].

На основании формулы (2.41) нетрудно привести интегральное преобразование (2.39) к следующей тригонометрической форме:

$$s(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)\cos[\omega t+\theta(\omega)]\,d\omega. \tag{2.45}$$

Выражение (2.45) можно рассматривать как представление сигнала $s(t)$ в виде «взвешенной» суммы гармонических колебаний. Аналогичным представлением периодического сигнала является ряд Фурье (2.25).

Отметим, что при $\omega=0$ выражение (2.38) переходит в следующее:

$$\mathbf{S}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt = \text{площадь, ограниченная кривой } s(t). \quad (2.46)$$

Аналогично из (2.39) получаем

$$s(t)|_{t=0}=s(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,d\omega. \quad (2.46')$$

Эти два результата, являющиеся частными случаями преобразований Фурье, обычно легко вычисляются и полезны для проверки результатов при решении конкретных задач.

2.5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Между сигналом $s(t)$ и его спектральной плотностью $\mathbf{S}(\omega)$ существует однозначное соответствие. Для практических приложений важно установить связь между преобразованием сигнала и соответствующим ему изменением спектра или, наоборот, между преобразованием спектра и соответствующим ему изменением сигнала. Из многочисленных возможных преобразований рассмотрим наиболее важные и часто встречающиеся.

2.5.1. ДУАЛЬНОСТЬ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

Обращаясь к выражениям (2.38) и (2.39), определяющим прямое и обратное преобразования Фурье, видим, что они обладают существенной симметрией.

Для встречающейся в литературе строго симметричной формы записи преобразований Фурье в виде

$$\mathbf{S}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-i2\pi ft}dt \quad \text{и} \quad s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(f)\,e^{i2\pi ft}df$$

свойство дуальности может быть сформулировано следующим образом: если $\mathbf{S}(f)$ является спектральной плотностью сигнала $s(t)$, то $s(-f)$ является спектральной плотностью функции $\mathbf{S}(t)$.

Свойство частотно-временно́й дуальности часто используется в теории сигналов при решении задач преобразования сигнала во временно́й или частотной областях.

Важным проявлением этого свойства является взаимная заменяемость t и ω в преобразованиях Фурье для четных функций.

Как было показано в § 2.4, спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ четной функции времени $s(t)$ является действительной четной функцией частоты (справедливо и обратное утверждение). Ис-

пользуя замену переменных в выражениях (2.38) и (2.39) и учитывая четность функций $s(t)$ и $S(\omega)$, нетрудно получить, что для сигнала $S(t)=S(\omega)|_{\omega\to t}$ спектральная плотность равна $2\pi s(\omega)=2\pi s(t)|_{t\to\omega}$, или спектральная плотность $s(\omega)=s(t)_{t\to\omega}$ соответствует сигналу $\frac{1}{2\pi}S(t)=\frac{1}{2\pi}S(\omega)|_{\omega\to t}$. Отметим, что в данном случае знак в показателе степени функций $e^{\pm i\omega t}$ в преобразованиях Фурье может выбираться произвольно.

2.5.2. ЛИНЕЙНОСТЬ

Пусть сигналам $s_1(t)$ и $s_2(t)$ соответствуют спектральные плотности $\mathbf{S}_1(\omega)$ и $\mathbf{S}_2(\omega)$.

Так как преобразование Фурье, определяющее спектральную плотность заданной функции времени, является линейным, очевидно, что сигналу $s(t)=as_1(t)+bs_2(t)$ соответствует спектр

$$\mathbf{S}(\omega)=a\mathbf{S}_1(\omega)+b\mathbf{S}_2(\omega). \tag{2.47}$$

2.5.3. СДВИГ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕНИ

Пусть сигнал $s(t)$, обладающий спектральной плотностью $\mathbf{S}(\omega)$, задержан на время t_0 (при сохранении его формы). Спектральная плотность задержанного сигнала $s_1(t)=s(t-t_0)$ в соответствии с (2.38)

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $x=t-t_0$, получаем

$$\mathbf{S}_1(\omega)=e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}dx=e^{-i\omega t_0}\mathbf{S}(\omega). \tag{2.48}$$

Из этого соотношения видно, что сдвиг сигнала $s(t)$ во времени на $\pm t_0$ приводит к изменению фазовой характеристики спектра $\mathbf{S}(\omega)$ на величину $\pm\omega t_0$. Справедливо и обратное утверждение: если составляющим спектра сигнала $s(t)$ дать фазовый сдвиг $\theta(\omega)=\pm\omega t_0$, линейно зависящий от частоты ω, то сигнал сдвигается во времени на $\pm t_0$.

Амплитудно-частотная характеристика спектра (т. е. модуль спектральной плотности) от положения сигнала на оси времени не зависит.

2.5.4. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ

Применим (2.38) к функции $s_1(t)=s(\alpha t)$ $(\alpha>0)$:

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $x=\alpha t$, получаем

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{\alpha}x}dx.$$

Но интеграл в правой части этого выражения есть не что иное, как спектральная плотность функции $s(t)$ при частоте ω/α, т. е. $S(\omega/\alpha)$. Таким образом,

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{1}{\alpha}\mathbf{S}(\omega/\alpha). \tag{2.49}$$

Итак, при сжатии сигнала в α раз ($\alpha>1$) на временно́й оси во столько же раз расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной плотности при этом уменьшается в α раз. При растяжении сигнала во времени ($\alpha<1$) имеет место сжатие его частотного спектра и увеличение модуля спектральной плотности. При $\alpha<0$, когда наряду с масштабированием рассматривается зеркальное отображение сигнала, вместо (2.49) справедливо

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{1}{|\alpha|}\mathbf{S}(\omega/\alpha). \tag{2.49'}$$

2.5.5. СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА

Применим (2.38) к произведению $s(t)\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\mathrm{e}^{-i\omega t}dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)t}dt=\mathbf{S}(\omega-\omega_0). \tag{2.50}$$

Полученный результат означает, что умножение сигнала $s(t)$ на $\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$ приводит к смещению его спектра $\mathbf{S}(\omega)$ по оси частот на величину ω_0.

Умножим тот же сигнал $s(t)$ на $\cos(\omega_0 t+\theta_0)$. Спектральная плотность нового сигнала $s_1(t)=s(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ в соответствии с (2.38) равна

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt.$$

Подставляя в это выражение $\cos(\omega_0 t+\theta_0)=$ $=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\theta_0)}+\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t+\theta_0)})$ и учитывая (2.50), нетрудно получить

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{i\theta_0}}{2}\mathbf{S}(\omega-\omega_0)+\frac{\mathrm{e}^{-i\theta_0}}{2}\mathbf{S}(\omega+\omega_0). \tag{2.51}$$

Из выражения (2.51) вытекает, что расщепление спектра $\mathbf{S}(\omega)$ на две части, смещенные соответственно на $+\omega_0$ и $-\omega_0$,

эквивалентно умножению функции $s(t)$ на гармоническое колебание $\cos \omega_0 t$ (при $\theta_0=0$).

Более подробно это положение рассматривается в гл. 3 при исследовании спектров модулированных колебаний.

2.5.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИГНАЛА

Дифференцирование сигнала $s(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ можно трактовать как почленное дифференцирование всех гармонических составляющих, входящих в его спектр. Но производная функции $e^{i\omega t}$ равна $i\omega e^{i\omega t}$, из чего непосредственно вытекает следующее соответствие:

$$s_1(t)=\frac{ds(t)}{dt} \doteqdot i\omega \mathbf{S}(\omega)=\omega \mathbf{S}(\omega) e^{i\pi/2}=\mathbf{S}_1(\omega) \qquad (2.52)$$

(значком $\doteqdot$ обозначено соответствие между сигналом и его спектром).

Полезно сформулировать смысл обратного соответствия, а именно: если всем гармоническим составляющим спектра сигнала $s(t)$ дать фазовый сдвиг $\pi/2$, а модуль спектра умножить на ω, то сигнал будет продифференцирован.

Дуальным рассмотренному свойству является умножение сигнала на t (дифференцирование спектра сигнала):

$$ts(t) \doteqdot \frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega} \frac{1}{-i}. \qquad (2.53)$$

2.5.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛА

Применяя подход, использованный в п. 2.5.6 для нахождения преобразования спектра при дифференцировании сигнала, можно получить

$$s_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} s(x)\,dx \doteqdot \frac{1}{i\omega} \mathbf{S}(\omega)=\frac{1}{\omega} \mathbf{S}(\omega) e^{-i\pi/2}=\mathbf{S}_1(\omega). \qquad (2.54)$$

Следует, однако, подчеркнуть, что в отличие от операции $i\omega\mathbf{S}(\omega)$ операция $(1/i\omega)\mathbf{S}(\omega)$ законна только для сигналов, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt=\mathbf{S}(0)=0$, т. е. для сигналов с нулевой площадью. В противном случае спектральная плотность проинтегрированного сигнала содержит дополнительное слагаемое $\pi\mathbf{S}(0)\delta(\omega)$ (см. § 2.10).

2.5.8. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИГНАЛОВ

Пусть рассматриваемый сигнал $s_1(t)$ является произведением двух функций времени $s(t)$ и $u(t)$.

Применим (2.38) к сигналу $s_1(t)=s(t)u(t)$:

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,u(t)\,e^{-i\omega t}dt. \qquad (2.55)$$

Каждую функцию $s(t)$ и $u(t)$ можно представить в виде (2.39):

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega, \quad u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega.$$

Подставляя в (2.55) второй из этих интегралов, получаем

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x)\,e^{ixt}dx\right]e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-i(\omega-x)t}dt\right]dx.$$

Внутренний интеграл по переменной t представляет собой спектральную плотность функции $s(t)$ при частоте $(\omega-x)$, т. е. $\mathbf{S}(\omega-x)$. Следовательно,

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x)\,\mathbf{S}(\omega-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\mathbf{U}(\omega)*\mathbf{S}(\omega)^{1}. \qquad (2.56)$$

Итак, спектр произведения двух функций времени $s(t)$ и $u(t)$ равен (с коэффициентом $1/2\pi$) свертке их спектров $\mathbf{S}(\omega)$ и $\mathbf{U}(\omega)$.

2.5.9. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

Из выражений (2.55) и (2.56) в частном случае $\omega=0$ вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,u(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x)\,\mathbf{S}(-x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(\omega)\,\mathbf{S}^*(\omega)\,d\omega. \qquad (2.57)$$

---

[1] Функция, определяемая интегралом $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x)\,\mathbf{S}(\omega-x)\,dx=$ $=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(x)\,\mathbf{U}(\omega-x)\,dx$, носит название свертки функций $\mathbf{S}(\omega)$ и $\mathbf{U}(\omega)$, а знак $*$ используется для символической записи операции свертки.

При одинаковых функциях времени, т. е. $u(t)=s(t)$, левый интеграл в (2.57)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,u(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = Э$$

определяет полную энергию сигнала $s(t)$. Кроме того, произведение спектральных функций $\mathbf{U}(\omega)$ и $\mathbf{S}^*(\omega)$ преобразуется к виду

$$\mathbf{U}(\omega)\,\mathbf{S}^*(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{S}^*(\omega) = |\mathbf{S}(\omega)|^2 = S^2(\omega),$$

где $\mathbf{S}^*(\omega)$ — спектр сигнала $s(t)$, а $S(\omega)$ — модуль этого спектра.

Таким образом, в соответствии с (2.57) приходим к окончательному результату

$$Э = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega. \qquad (2.58)$$

Из этого важного соотношения, известного как **равенство Парсеваля**, следует, что полная энергия непериодического сигнала равна сумме энергий всех его спектральных составляющих. Величина $|\mathbf{S}(\omega)|^2$ имеет смысл энергии, приходящейся на 1 Гц, и может рассматриваться как **спектральная плотность энергии** или **энергетический спектр** сигнала.

Важно отметить, что энергия непериодического сигнала не зависит от фазировки спектральных составляющих. Это является, как и для периодического сигнала, результатом ортогональности спектральных составляющих. Различие заключается лишь в интервалах ортогональности: период T для периодического сигнала и бесконечно большой интервал для непериодического сигнала.

Следует также отметить существенное различие между выражениями (2.29) и (2.58). В § 2.2 речь шла о средней мощности, получаемой делением энергии отрезка сигнала за один период на период T. Для непериодического сигнала такое усреднение на бесконечном интервале дает нулевую среднюю мощность. Поэтому в случае непериодического сигнала можно говорить о средней мощности лишь на заданном конечном интервале. Более существенной энергетической характеристикой непериодического сигнала является его максимальная пиковая мощность.

2.5.10. СВЕРТКА СИГНАЛОВ

Свойство свертки сигналов является дуальным свойству произведения сигналов (см. п. 2.5.8). Дуальность выражается в том, что спектр свертки двух функций времени $s(t)$ и $g(t)$ ра-

вен произведению их преобразований Фурье $\mathbf{S}(\omega)$ и $\mathbf{G}(\omega)$, т. е.

$$s_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,g(t-x)\,dx=s(t)*g(t)\doteq \mathbf{S}(\omega)\mathbf{G}(\omega)=\mathbf{S}_1(\omega). \quad (2.59)$$

Это свойство особенно широко используется при анализе передачи сигналов через линейные системы (см. гл. 5). В этом случае функции времени $s(t)$ и $g(t)$ имеют смысл соответственно входного сигнала и импульсной характеристики системы, $\mathbf{S}(\omega)$ и $\mathbf{G}(\omega)$ — спектральной плотности входного сигнала и передаточной функции системы, а $s_1(t)$ и $\mathbf{S}_1(\omega)$ — сигнала на выходе системы и его спектра.

2.6. ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ

Для теории сигналов особый интерес представляют следующие математические модели сигналов.

2.6.1. КОЛОКОЛООБРАЗНЫЙ (ГАУССОВСКИЙ) ИМПУЛЬС

Представленный на рис. 2.12,*а* колоколообразный импульс определяется выражением

$$s(t)=(A/\sqrt{2\pi}a)\,e^{-t^2/2a^2}, \quad -\infty<t<\infty. \quad (2.60)$$

Этот импульс, совпадающий по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей, называется также гауссовским импульсом. Параметр a имеет смысл половины длительности импульса, определяемой на уровне $e^{-1/2}\approx$ $\approx 0{,}607$ от амплитуды $A/\sqrt{2\pi}a$ импульса.

Преобразование Фурье (2.38) импульса (2.60) дает спектр

$$\mathbf{S}(\omega)=Ae^{-\omega^2a^2/2}=Be^{-\omega^2/2b^2}. \quad (2.61)$$

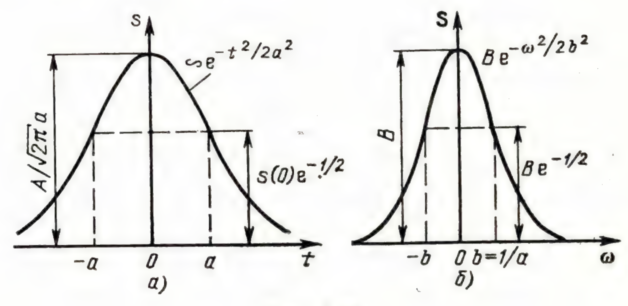


Рис. 2.12

График этой функции представлен на рис. 2.12,*б*. Максимальное значение спектра

$$B = \mathbf{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt = A, \qquad (2.62)$$

а ширина спектра, определяемая на уровне $e^{-1/2}$ от B, равна $2b = 2/a$.

Существенно, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения любой из них по заданной другой достаточно заменить ω на t (или наоборот) и провести несложную замену параметров функций.

Так, гауссовскому спектру

$$\mathbf{S}(\omega) = B e^{-\omega^2/2b^2}$$

соответствует гауссовский импульс

$$s(t) = (Bb/\sqrt{2\pi})\, e^{-t^2 b^2/2} = A e^{-t^2/2a^2}.$$

Очевидно, что чем меньше длительность импульса $\tau_и = 2a$, тем шире спектральная полоса $2b$.

2.6.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Прямоугольный импульс (рис. 2.13,*а*) определяется функцией

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau_и/2 \leqslant t \leqslant \tau_и/2, \\ 0 & \text{при всех других } t. \end{cases} \qquad (2.63)$$

В соответствии с (2.38) его спектральная плотность (рис. 2. 13, *б*)

$$\mathbf{S}(\omega) = A \int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} = A\tau_и \frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2}. \qquad (2.64)$$

Заметим, что произведение $A\tau_и$, равное площади импульса, определяет значение спектральной плотности при $\omega = 0$, т. е. $\mathbf{S}(0) = A\tau_и$ [см (2.46)].

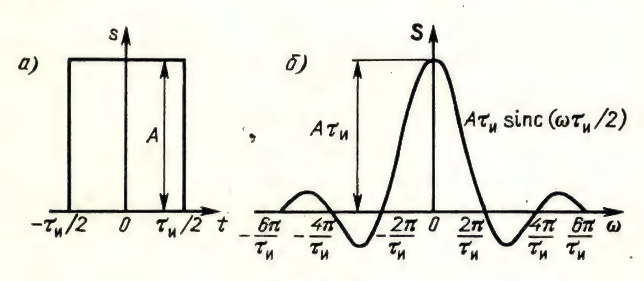


Рис. 2.13

Таким образом, выражение (2.64) можно записать в форме

$$\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{S}(0)\,\mathrm{sinc}(\omega\tau_и/2). \qquad (2.64')$$

Здесь через $\mathrm{sinc}(\omega\tau_и/2)$ обозначена функция $\mathrm{sinc}(x)=(\sin x)/x$.

При увеличении длительности импульса $\tau_и$ расстояние между нулями функции $\mathbf{S}(\omega)$ уменьшается, что равносильно сужению спектра. Значение $\mathbf{S}(0)$ при этом возрастает. При сжатии импульса, наоборот, спектр расширяется (расстояние между нулями функции $\mathbf{S}(\omega)$ увеличивается), а значение $\mathbf{S}(0)$ уменьшается.

2.6.3. ИМПУЛЬС ВИДА sinc(*x*)

Представленный на рис. 2.14,*а* импульс определяется функцией

$$s(t)=\mathrm{sinc}(\omega_m t)=\frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t}=\frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m t},\quad -\infty<t<\infty. \qquad (2.65)$$

Нетрудно заметить, что эта функция совпадает по форме со спектральной плотностью (2.64′) прямоугольного импульса. Основываясь на свойстве взаимной заменяемости t и ω в преобразованиях Фурье для четных функций (см. п. 2.5.1), получаем, что заданному сигналу соответствует спектр прямоугольной формы (рис. 2.14,*б*).

Уровень этого спектра в соответствии с (2.46) равен

$$\mathbf{S}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}(\omega_m t)\,dt=\pi/\omega_m=1/2f_m, \qquad (2.66)$$

а граничные частоты спектра ($\pm\omega_m=\pm2\pi f_m$) определены после нахождения с помощью (2.46′) площади $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,d\omega=2\pi s(0)=2\pi$ и деления ее на ординату (2.66).

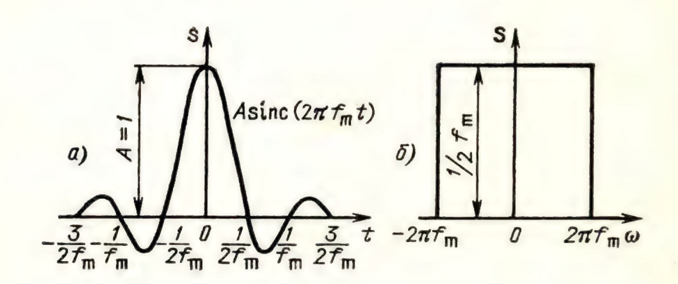


Рис. 2.14

В порядке проверки с помощью обратного преобразования (2.39) нетрудно получить

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{\omega_m}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{-i\omega t}d\omega=\operatorname{sinc}(\omega_m t),$$

что совпадает с (2.65).

2.6.4. БЕСКОНЕЧНО КОРОТКИЙ ИМПУЛЬС С ЕДИНИЧНОЙ ПЛОЩАДЬЮ (ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ)

Единичный импульс $\delta(t)$ можно определить следующим образом:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{при } t=0,\\ 0 & \text{при } t\neq 0\end{cases} \tag{2.67}$$

при одновременном условии

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1. \tag{2.68}$$

Импульс $\delta(t)$ относится к так называемым обобщенным функциям и называется дельта-функцией или импульсной функцией (а также функцией Дирака). Для обобщенных функций существенным является не только их математическое определение, но также свойства этих функций и получаемые при их использовании результаты.

Для единичного импульса важнейшим свойством является то, что свертка $\delta(t)$ с произвольным сигналом $s(t)$ воспроизводит этот же сигнал:

$$\delta(t)*s(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,s(t-x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(x)\delta(t-x)dx=s(t). \tag{2.69}$$

Другое важное свойство $\delta(t)$, определяемое выражением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=s(t_0), \tag{2.70}$$

называется стробирующим или выборочным (в математике «фильтрующим») свойством дельта-функции, т. е. $\delta(t)$ определяет отдельное значение произвольной функции.

Справедливость выражений (2.69) и (2.70) вытекает из определения (2.67) с учетом (2.68). Действительно, при вычислении интегралов в этих выражениях промежуток интегрирования можно сделать сколь угодно малым, но включающим в себя точку, в которой единичный импульс обращается в бесконечность. В этом промежутке сигнал имеет постоянное значение

[$s(t)$ в (2.69) и $s(t_0)$ в (2.70)], которое можно вынести за знак интеграла, а оставшийся интеграл в соответствии с (2.68) равен единице.

Более подробно свойства дельта-функций, в том числе и спектр единичного импульса рассматриваются в следующем параграфе.

2.7. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ

В теории сигналов приходится иметь дело с дельта-функциями от аргументов t или ω в зависимости от того, в какой области рассматривается функция — во временно́й или частотной.

На рис. 2.15 представлены некоторые из возможных функций от аргумента x, площади которых равны единице. Все эти функции совпадают по форме с сигналами, рассмотренными в пп. 2.6.1—2.6.3. В данном случае амплитуды импульсов обратно пропорциональны соответствующим образом определенной длительности (по оси x):

для гауссовского импульса (рис. 2.15,*а*) $A=1/a\sqrt{2\pi}$;

для прямоугольного импульса (рис. 2.15,*б*) $A=1/2a$;

для импульса вида $A\operatorname{sinc}(2\pi f_m t)$ (рис. 2.15,*в*) $A=2f_m$.

При устремлении параметра a к нулю, а f_m к бесконечности все три изображенные на рис. 2.15 функции обращаются в дельта-функции, определяемые выражениями (2.67) и (2.68) (в данном случае от аргумента x).

При сдвиге дельта-функции по оси x на величину x_0 ее определение записывается в более общей форме:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & \text{при } x=x_0,\\ 0 & \text{при } x\neq x_0,\end{cases} \tag{2.71}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1. \tag{2.72}$$

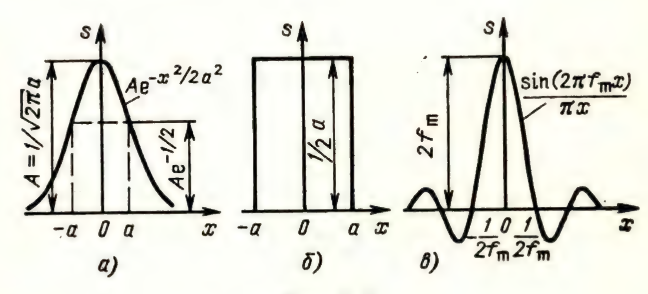


Рис. 2.15

Полезно отметить, что $\delta(t)$ является четной функцией, т. е. $\delta(t)=\delta(-t)$. С учетом этого свойства можно записать

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 1/2 & \text{при } x=0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases} \qquad (2.73)$$

В дальнейшем это соотношение будет использовано при рассмотрении ступенчатой функции (см. § 2.10).

Рассмотрим сначала свойства функции $\delta(t)$. В данном случае основное значение имеет спектр дельта-функции. Применяя (2.38) к $\delta(t)$ и используя (2.70) при $t_0=0$, получаем

$$\mathbf{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt=\mathrm{e}^{-i\omega t}\,|_{t=0}=1, \quad -\infty<\omega<\infty. \qquad (2.74)$$

Для обсуждения этого результата обратимся к спектру одного из импульсов $s(t)$, рассмотренных в § 2.6. Например, в п. 2.6.3 было установлено, что сигналу $\operatorname{sinc}(2\pi f_m t)$ соответствует прямоугольный спектр с граничными частотами $\pm 2\pi f_m$. При уменьшении длительности $1/2f_m$ основного лепестка импульса (неизменной амплитуды) ширина спектра увеличивается, а величина $\mathbf{S}(0)=1/2f_m$ уменьшается. В данном же случае, когда уменьшение длительности импульса сопровождается одновременным увеличением его амплитуды ($A=2f_m$), значение спектральной плотности остается неизменным для всех частот $-\infty<\omega<\infty$ и равным $\mathbf{S}(0)=1$, т. е. площади импульса. То же имеет место при укорочении любого из других импульсов, показанных на рис. 2.15. Следует иметь в виду, что правая часть выражения (2.74) является размерной единицей: это площадь импульса, численно равная единице. Если под $\delta(t)$ подразумевается импульс напряжения, то размерность $\mathbf{S}(\omega)$ есть Вольт$\times$секунда (В·с).

Итак, спектральная плотность дельта-функции $\delta(t)$ вещественна и равна единице для всех частот. Из этого также следует, что ФЧХ этого спектра равна нулю для всех частот.

Обратное преобразование Фурье (2.39) для дельта-функции приводит к несобственному интегралу

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega. \qquad (2.75)$$

После несложных преобразований выражение (2.75) приводится к виду

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(\omega t)\,d\omega. \qquad (2.75')$$

Смысл этой записи заключается в том, что в момент $t=0$ вклады всех косинусоидальных составляющих суммируются, со-

здавая бесконечно большой пик, а в моменты $t \neq 0$ вклады этих же составляющих взаимно компенсируются.

Для функции $\delta(t-t_0)$, определяющей единичный импульс в момент t_0, спектральная плотность $S(\omega)=e^{-i\omega t_0}$ (см. п. 2.5.3). Модуль спектральной плотности по-прежнему равен единице для всех частот, а ФЧХ спектра $\theta(\omega)=-\omega t_0$.

Единичный импульс $\delta(t-t_0)$ также может быть представлен в виде интегральной записи

$$\delta(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int^{\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega. \qquad (2.76)$$

Понятие единичного импульса $\delta(t)$ особенно широко используется при исследовании действия коротких импульсов на линейные системы. При этом вместо $\delta(t)$ можно использовать его приближение в виде импульса произвольной формы, длительность которого мала по сравнению с постоянной времени исследуемой системы (или по сравнению с периодом собственных колебаний системы).

Рассмотрим теперь свойства $\delta(\omega)$. Все, что ранее было сказано относительно $\delta(t)$, можно отнести и к $\delta(\omega)$ при замене t на ω и ω на t, т. е. использовать свойство дуальности времени и частоты в преобразованиях Фурье (см. п. 2.5.1).

Определение $\delta(\omega)$ по аналогии с (2.67) имеет вид

$$\delta(\omega)=\begin{cases}\infty & \text{при } \omega=0,\\ 0 & \text{при } \omega\neq 0\end{cases} \qquad (2.77)$$

при одновременном условии $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega=1$.

Спектральная плотность $\delta(\omega)$ соответствует временно́й функции

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{i\omega t}\Big|_{\omega=0}=1/2\pi,$$

$$-\infty<t<\infty, \qquad (2.78)$$

т. е. постоянному во времени напряжению (току).

По аналогии с (2.75) можно применить интегральную форму

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}dt. \qquad (2.79)$$

Аналогично

$$\delta(\omega-\omega_0) \doteq s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}, \qquad (2.78')$$

$$\delta(\omega-\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_0)t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)}dt. \qquad (2.79')$$

2.8. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ СИГНАЛА И ШИРИНОЙ ЕГО СПЕКТРА. СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ СПЕКТРА

Из предыдущих параграфов уже ясно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр. В практике применяются различные способы определения длительности сигнала и ширины его спектра. Выбор способа зависит от назначения сигнала, его формы, а также от структуры спектра сигнала. Однако ни один из них не является наилучшим для различных задач. Нередко выбор способа осуществляется произвольно. Это может быть, например, определение длительности сигнала как интервала $[-a, a]$, фиксируемого на уровне $e^{-1/2}$ ($1/\sqrt{2}$, $1/e$ и т. д.) от максимального значения сигнала (рис. 2.12,*а*); как интервала $[-\tau_и/2, \tau_и/2]$, за пределами которого $s(t)=0$ (рис. 2.13,*а*); как ширины главного лепестка сигнала (рис. 2.14,*а*). Аналогичными способами определяют и ширину спектра сигнала. Часто пользуются энергетическим критерием, понимая под шириной или длительностью интервал значений аргумента функций $S(\omega)$ или $s(t)$, в пределах которого содержится заданная доля энергии сигнала.

Для установления предельных соотношений, связывающих длительность сигнала и ширину спектра, наиболее полезным оказалось определение указанных параметров с помощью моментов функций $s^2(t)$ и $S^2(\omega)$. Эти вопросы рассмотрены достаточно подробно в [3]. Приведем основные результаты.

За меру длительности сигнала $s(t)$ можно принять величину

$$T^2_{эф} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(t-t_0)^2 s^2(t)\,dt \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\,dt,$$

где $t_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t s^2(t)\,dt \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt$ — нормированный первый момент функции $s^2(t)$ (середина импульса), а $T^2_{эф}$ — нормированный второй центральный момент.

Аналогично, мера ширины спектра сигнала

$$\Omega^2_{эф}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^2\,\mathbf{S}^2(\omega)\,d\omega\Bigg/\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}^2(\omega)\,d\omega.$$

При нормировке сигнала по энергии знаменатели в предыдущих выражениях равны единице. Кроме того, при отчете времени от t_0, а также в предположении сигналов без высокочастотного заполнения ($\omega_0=0$), приходим к следующим формулам для $T_{эф}$ и $\Omega_{эф}$:

$$T_{эф}=\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2s^2(t)\,dt\right]^{1/2},\quad \Omega_{эф}=\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathbf{S}^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}. \qquad (2.80)$$

Имеет место следующий важный принцип: для сигналов произвольной формы, длительность $T_{эф}$ и ширина спектра $\Omega_{эф}$ которых определяются выражениями (2.80), справедливо соотношение

$$T_{эф}\Omega_{эф}\geqslant 1/2. \qquad (2.81)$$

Смысл этого результата заключается в том, что длительность сигнала и ширина его спектра не могут одновременно иметь произвольно малое значение. Сигнал с «малой» длительностью имеет «широкий» спектр и наоборот.

Минимум произведения в (2.81), равный 1/2, соответствует колоколообразному (гауссовскому) импульсу (см. также [1, 2]).

Метод моментов применим не к любым сигналам. Из выражений (2.80) видно, что сигнал $S(t)$ с увеличением t должен убывать быстрее, чем $1/t$, а спектр $\mathrm{S}(\omega)$ быстрее, чем $1/\omega$, так как в противном случае соответствующие интегралы расходятся. В частности, это относится к спектру прямоугольного импульса [см. (2.64)]. В этих случаях оценку произведения «длительность×ширина» приходится основывать на иных критериях.

Так, в [3] в соответствии с энергетическим критерием вводится коэффициент

$$\eta(f_{гр},\ \tau_и)=Э_{\Delta f}/Э,$$

определяющий долю энергии сигнала в полосе частот от нуля до $\omega_{гр}=2\pi f_{гр}$. Здесь

$$Э_{\Delta f}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\omega_{гр}}S^2(\omega)\,d\omega,\quad Э=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}S^2(\omega)\,d\omega=\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}s^2(t)\,dt.$$

Выражения $\eta(f_{гр},\tau_и)$ для сигналов различной формы [прямоугольной, треугольной (см. табл. 2.1) и гауссовской] позволяют при заданной величине η найти значение произведения $f_{гр}\tau_и$ для каждого сигнала (длительность гауссовского импульса согласно п. 2.6.1 $\tau_и=2a$).

Основным результатом исследования является то, что значение произведения $f_{гр}\tau_и$ при фиксированном η максимально для прямоугольного импульса (при $\eta < 0{,}9$ — для треугольного) и минимально для гауссовского. В частности, уровню $\eta = 0{,}95$ для указанных форм сигнала соответствуют значения $f_{гр}\tau_и$, равные 1,8; 0,94 и 0,48.

Заметим, что в некоторых практических задачах для точного сохранения формы исходного сигнала произведение $f_{гр}\tau_и$ должно быть гораздо больше единицы.

В любом случае при заданной форме сигнала сжатие его во времени с целью, например, повышения точности определения момента его появления неизбежно сопровождается расширением спектра, что заставляет расширять полосу пропускания устройства обработки. Аналогично сжатие спектра импульса с целью повышения точности измерения частоты неизбежно сопровождается растяжением сигнала во времени, что требует увеличения времени наблюдения (обработки). Как уже отмечалось при обсуждении выражения (2.81), невозможно одновременно сконцентрировать сигнал в узкой полосе частот и в коротком интервале времени. Этот результат представляет собой одно из проявлений известного в физике **принципа неопределенности**.

Вопрос о величине произведения «длительность$\times$ширина» актуален в связи с проблемой электромагнитной совместимости, возникающей при взаимных помехах радиосистем. С этой точки зрения наиболее желательна форма импульсов, близкая к гауссовской.

Для практики важное значение имеет также оценка протяженности «хвостов» спектра вне полосы частот, содержащей основную долю энергии сигнала.

Для выявления связи между скоростью убывания спектра $\mathbf{S}(\omega)$ вне основной полосы частот и структуры соответствующего ему сигнала $s(t)$ воспользуемся свойствами обобщенных функций: единичного импульса и единичного скачка.

Единичный импульс $\delta(t)$ является единственной функцией времени, спектр которой не убывает на всей оси частот [см. (2.74)]. Отсюда следует, что сигнал $s(t)$, спектр которого вне основной полосы частот остается неизменным, содержит в своем составе дельта-функцию (в реальных условиях достаточно короткий импульс большой интенсивности).

Далее, единственной функцией времени, имеющей спектральную плотность вида $1/\omega$, является скачок, т. е. разрыв непрерывности функции. При этом в точках разрыва непрерывности функции $s(t)$ ее производная обращается в дельта-функцию (с постоянным коэффициентом, равным величине скачка). Следовательно, убывание спектра вне основной полосы частот по закону $1/\omega$ свидетельствует о наличии в составе сигнала $s(t)$ скачка, а в составе его производной $s'(t)$ — дельта-функции.

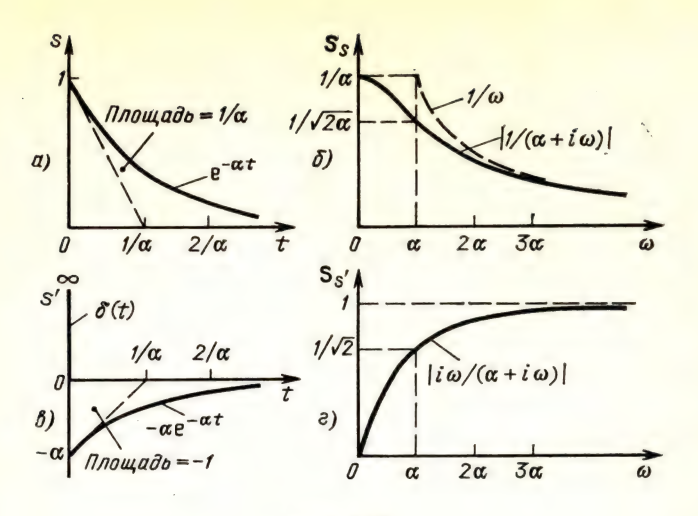


Рис. 2.16

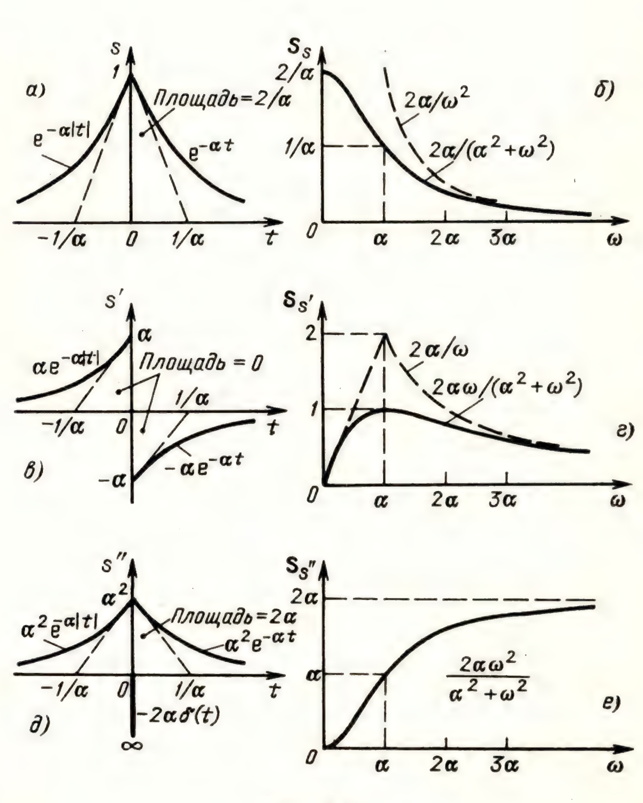


Рис. 2.17

Эти рассуждения можно продолжить и для производных сигнала $s(t)$ более высоких порядков.

Сказанное иллюстрируется примерами для трех типов сигналов: с разрывом, с изломом и сигнала, производные которого любого порядка непрерывны. Названные сигналы, их производные и модули соответствующих им спектральных плотностей (при $\omega > 0$) представлены на рис. 2.16—2.18.

К установленным выше связям добавим, что для сигнала $s(t)$, изображенного на рис. 2.17, *а*, разрыв в его производной (рис. 2.17, *в*) приводит к убыванию «хвоста» спектра $S(\omega)$ (рис. 2.17, *б*) по закону $1/\omega^2$. Этот результат можно обобщить следующим образом: если вне основной полосы частот спектр сигнала убывает по закону $1/\omega^{n+1}$, то первый разрыв возникает в n-й производной сигнала.

С этой точки зрения сигнал, показанный на рис. 2.18, *а*, производные которого непрерывны при всех значениях n, вплоть до $n=\infty$, должен обладать спектром, скорость убывания которого является максимально возможной. Это утверждение согласуется с уже полученным выводом о том, что произведение

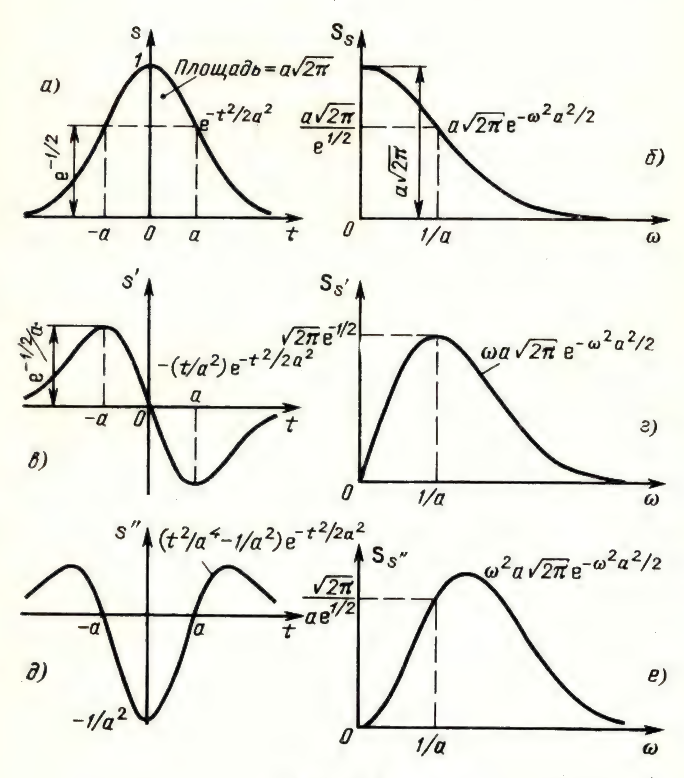


Рис. 2.18

«длительность×ширина» минимально для гауссовского импульса.

Основываясь на полученных результатах, нетрудно также объяснить происхождение пульсаций спектра вне основной полосы частот. Периодическая пульсация с неубывающими максимумами может возникать только в результате интерференции спектров двух дельта-функций, разнесенных во времени. Спектр прямоугольного импульса, амплитуды лепестков которого убывают по закону $1/\omega$ [см. (2.64)], является наглядным примером интерференции спектров двух скачков (положительного и отрицательного), формирующих сам сигнал.

2.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Анализ обработки сигналов в линейных системах, описываемых комплексным коэффициентом передачи, значительно облегчается при использовании методов контурного интегрирования на плоскости **комплексной переменной** $p=\sigma+i\omega$. Переход от действительной переменной ω к $p=\sigma+i\omega$ позволяет также полностью устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости функции $s(t)$ при ее представлении в частотной области.

Представим функцию $s(t)$, в общем случае существующую при $-\infty<t<\infty$, в виде суммы двух функций: $s(t)=s_-(t)+$ $+s_+(t)$, из которых $s_-(t)$ задана при $-\infty<t<0$, а $s_+(t)$ — при $0<t<\infty$.

Обращаясь к паре преобразований Фурье (2.38) и (2.39), совершим переход от ω к p сначала для функции $s_+(t)$. Для этого домножим $s_+(t)$ на $e^{-\sigma_1 t}$, где положительную константу σ_1 выберем таким образом, чтобы функция $e^{-\sigma_1 t}s_+(t)$ удовлетворяла условию абсолютной интегрируемости.

Произведению $s_+(t)\,e^{-\sigma_1 t}$ соответствует спектральная плотность [см. (2.38)]

$$\mathbf{S}_{\text{пр}}(\omega)=\int_0^\infty [s_+(t)\,e^{-\sigma_1 t}]\,e^{-i\omega t}dt=\int_0^\infty s_+(t)\,e^{-pt}dt.$$

Правая часть этого соотношения, являющаяся функцией комплексной переменной $p=\sigma_1+i\omega$,

$$\mathscr{L}[s_+(t)]=\int_0^\infty s_+(t)\,e^{-pt}dt=\mathbf{S}_+(p) \qquad (2.82)$$

известна под названием **одностороннего преобразования Лапласа**.

Представим теперь функцию $s_+(t)\,e^{-\sigma_1 t}$ в форме обратного преобразования Фурье:

$$s_+(t)\,e^{-\sigma_1 t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_+(\sigma_1+i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega.$$

Переходя под интегралом к переменной $p=\sigma_1+i\omega$, получаем

$$e^{-\sigma_1 t}s_+(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathbf{S}_+(p)\,e^{(p-\sigma_1)t}dp/i,$$

откуда

$$s_+(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathbf{S}_+(p)\,e^{pt}dp. \qquad (2.83)$$

Соотношение (2.38)′ позволяющее при заданном $\mathbf{S}_+(p)$ однозначно восстановить $s_+(t)$ для $t>0$, по аналогии с выражением (2.39) называется **обратным преобразованием Лапласа**.

Сравнение выражений (2.39) и (2.83) показывает, что переход от ω к p равносилен изменению пути интегрирования. В (2.39) интегрирование ведется по действительной оси ω, а в (2.83) — по прямой, проходящей параллельно мнимой оси $i\omega$ на расстоянии σ_1 справа от нее (рис. 2.19, *а*). Значение константы σ_1 определяется характером подынтегральной функции в (2.83): путь интегрирования должен проходить правее полюсов этой функции.

Добавлением к прямой ($\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$) дуги бесконечно большого радиуса можно образовать замкнутый контур интегрирования (рис. 2.19, *б*). Чтобы добавление этой дуги не изменяло значение интеграла, нужно руководствоваться следующим правилом: контур должен быть расположен при $t>0$ в левой полуплоскости переменной p, а при $t<0$ — в правой полуплоскости.

Тогда в первом случае при проведении дуги в левой полуплоскости, т. е. при $t>0$ (рис. 2.20, *а*), контур интегрирования

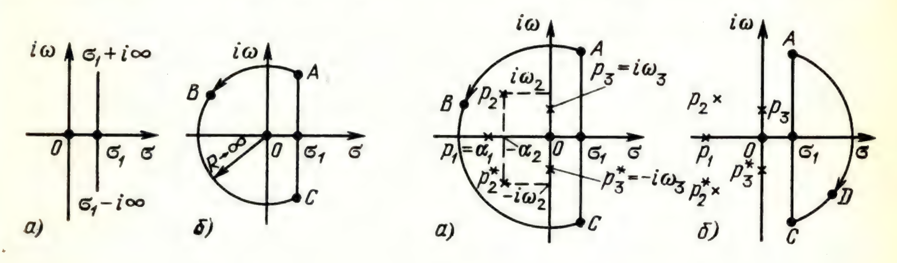


Рис. 2.19 Рис. 2.20

охватывает все полюсы подынтегральной функции, лежащие левее прямой ($\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$), интеграл (2.83) превращается в контурный интеграл, и в соответствии с теоремой о вычетах получаем выражение

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{ABCA} \mathbf{S}_+(p)\,e^{pt}dp = \sum_k \underset{p=p_k}{\text{Res}}, \tag{2.84}$$

правая часть которого равна сумме вычетов в полюсах подынтегральной функции.

При проведении же дуги в правой полуплоскости, т. е. при $t<0$ (рис. 2.20, *б*), полюсы подынтегральной функции оказываются вне контура интегрирования и в соответствии с теоремой Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{ADCA} \mathbf{S}_+(p)\,e^{pt}dp = 0. \tag{2.85}$$

Напомним важное свойство контурного интеграла: он не зависит от формы замкнутого контура интегрирования, если только полюсы подынтегральной функции расположены внутри контура. При соблюдении этого условия контур интегрирования можно произвольно деформировать.

Итак, нахождение $s_+(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа сводится к определению вычетов в полюсах подынтегральной функции.

На рис. 2.20, *а* показано положение полюсов для следующих функций времени:

$$s_1(t) = e^{-\alpha_1 t}, \quad t \geqslant 0, \quad p_1 = -\alpha_1, \tag{2.86}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} e^{-\alpha_2 t}\cos\omega_2 t, & t \geqslant 0, \\ e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t, & t \geqslant 0, \end{cases} \quad p_2,\ p_2^* = -\alpha_2 \pm i\omega_2, \tag{2.86$'$}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} \cos\omega_3 t, & t \geqslant 0, \\ \sin\omega_3 t, & t \geqslant 0, \end{cases} \quad p_3,\ p_3^* = \pm i\omega_3. \tag{2.86$''$}$$

Если функция $\mathbf{S}_+(p)$ не содержит полюсов на оси $i\omega$, то σ_1 может быть отрицательной величиной, т. е. прямая *CA* на рис. 2.19 и 2.20 может быть расположена левее оси $i\omega$. Минимальное действительное число σ_1, при котором условие сходимости преобразования Лапласа заданной функции времени соблюдается, называется **абсциссой сходимости** этого преобразования; в полуплоскости $\text{Re}[p] > \sigma_1$ изображение $\mathbf{S}_+(p)$ является функцией аналитической. На рис. 2.21, *а* эта область расположена справа от прямой *AC*.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, можно привести и для функции $s_-(t)$, существующей при $t<0$. Домножив $s_-(t)$ на $e^{-\sigma_2 t}$, при σ_2, выбранной таким образом, чтобы обеспечива-

лась абсолютная интегрируемость функции $e^{-\sigma_2 t} s_-(t)$, можно написать

$$\mathbf{S}_-(p)=\int_{-\infty}^{0} s_-(t)\,e^{-pt}dt=\int_{0}^{\infty} s_-(-t)\,e^{pt}dt, \qquad (2.87)$$

$$s_-(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \mathbf{S}_-(p)\,e^{pt}dp. \qquad (2.88)$$

Контур интегрирования для данного случая показан на рис. 2.21, *б*. Интеграл (2.88) равен сумме вычетов в полюсах подынтегральной функции, расположенных в правой полуплоскости переменной p. Эту сумму следует взять со знаком минус, поскольку при $t<0$ контур обходится по часовой стрелке.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа для произвольного сигнала $s(t)$, отличного от нуля как при $t>0$, так и при $t<0$. Преобразование Лапласа может быть записано в виде суммы

$$\mathbf{S}(p)=\mathbf{S}_+(p)+\mathbf{S}_-(p).$$

Выражения (2.82), (2.87) и (2.83), (2.88) можно объединить:

$$\mathbf{S}(p)=\int_{0}^{\infty} s_+(t)\,e^{-pt}dt+\int_{-\infty}^{0} s_-(t)\,e^{-pt}dt, \qquad (2.89)$$

$$s(t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \mathbf{S}_+(p)\,e^{pt}dp+\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \mathbf{S}_-(p)\,e^{pt}dp\right]. \qquad (2.90)$$

Соотношение (2.89) называется двусторонним преобразованием Лапласа.

Области сходимости функций $\mathbf{S}_+(p)$ и $\mathbf{S}_-(p)$ на плоскости комплексной переменной p показаны на рис. 2.22. Для $S_+(p)$ эта область расположена справа от прямой $\mathrm{Re}[p]=\sigma_1$, а для $\mathbf{S}_-(p)$ — слева от прямой $\mathrm{Re}[p]=\sigma_2$.

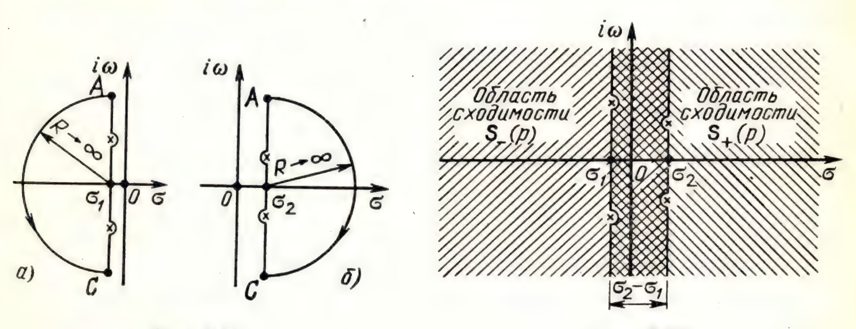


Рис. 2.21 Рис. 2.22

Если $\sigma_2 > \sigma_1$, то область сходимости функции $\mathbf{S}(p)$ имеет вид вертикальной полосы $\sigma_1 < \mathrm{Re}[p] < \sigma_2$, включающей в себя ось $i\omega$ (функция $\mathbf{S}(p)$ аналитична в этой полосе).

Путь интегрирования должен проходить по прямой, расположенной внутри этой полосы и параллельной оси $i\omega$, а также по замыкающей дуге, расположенной в левой полуплоскости для $t>0$ и соответственно в правой полуплоскости для $t<0$.

Одностороннее преобразование Лапласа получило особенно широкое распространение при анализе процессов, связанных с действием на линейные системы внешней силы, когда начало отсчета времени совмещают с началом воздействия. Двустороннее преобразование Лапласа находит все большее применение при анализе процессов и функций времени, двусторонних по самой своей сути (например, корреляционных функций сигналов).

При рассмотрении четных функций $s(t)=s(-t)$, т. е. когда $s_+(t)=s_-(-t)$, из (2.82) и (2.87) получаем

$$\mathbf{S}_-(p)=\mathbf{S}_+(-p). \quad (2.91)$$

Поясним применение выражений (2.82) и (2.91) на двух примерах.

1. Четная функция $s(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$ (рис. 2.17, *а*). По формулам (2.82) и (2.91) находим

$$\mathbf{S}_+(p)=1/(\alpha+p), \ \mathbf{S}_-(p)=1/(\alpha-p).$$

Тогда

$$S(p)=1/(\alpha+p)+1/(\alpha-p)=2\alpha/(\alpha^2-p^2). \quad (2.92)$$

2. Прямоугольные импульсы

$$s(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant \tau_и,\\ 0, & t<0, \ t>\tau_и\end{cases} \text{ или } s(t)=\begin{cases}1, & -\tau_и/2\leqslant t\leqslant \tau_и/2,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$$

В первом случае (при отсчете времени от фронта импульса)

$$\mathbf{S}(p)=\mathbf{S}_+(p)=(1/p)(1-e^{-p\tau_и}). \quad (2.93)$$

Во втором случае (при отсчете времени от середины импульса)

$$\mathbf{S}_+(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau_и/2}), \quad \mathbf{S}_-(p)=\frac{1}{-p}(1-e^{p\tau_и/2}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{S}(p)=(1/p)(e^{p\tau_и/2}-e^{-p\tau_и/2}). \quad (2.94)$$

Приравняв амплитуду любого из рассмотренных импульсов величине $1/\tau_и$ и устремив $\tau_и$ к нулю, из (2.93) или (2.94) получим преобразование Лапласа дельта-функции: $\mathbf{S}(p)=1$.

Большинство свойств одностороннего преобразования Лапласа совпадает с аналогичными свойствами преобразований Фурье, изложенными в § 2.5. Если сигналу $s(t)$ соответствует

изображение по Лапласу $\mathbf{S}(p)$ $[s(t) \doteq \mathbf{S}(p)]$, то имеются следующие соответствия:

$$as_1(t)+bs_2(t) \doteq a\mathbf{S}_1(p)+b\mathbf{S}_2(p), \quad s(t-t_0) \doteq \mathbf{S}(p)\,\mathrm{e}^{-pt_0},$$

$$s(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha}\mathbf{S}(p/\alpha), \quad s(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \doteq \mathbf{S}(p+\alpha),$$

$$s(t)\cos(\omega_0 t) \doteq \frac{1}{2}\mathbf{S}(p-i\omega_0)+\frac{1}{2}\mathbf{S}(p+i\omega_0),$$

$$ds(t)/dt \doteq p\mathbf{S}(p)-s(0), \quad ts(t) \doteq -d\mathbf{S}(p)/dp,$$

$$\int_0^t s(t)\,dt \doteq \mathbf{S}(p)/p, \quad \int_0^t s_1(x)\,s_2(t-x)\,dx \doteq \mathbf{S}_1(p)\,\mathbf{S}_2(p).$$

2.10. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из условий применимости преобразования Фурье к функции $s(t)$ является ее абсолютная интегрируемость: $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|\,dt<\infty$. Это условие ограничивает класс сигналов, для которых существует спектр Фурье, выражаемый обычными функциями.

Рассмотренные в § 2.7 свойства дельта-функции, а также в § 2.9 свойства преобразования Лапласа позволяют устранить это препятствие и найти спектр ряда сигналов, не отвечающих условию абсолютной интегрируемости.

Покажем это на примерах некоторых сигналов, широко используемых в теории сигналов и систем.

1. $s(t)=A_0\cos(\omega_0 t)$, $-\infty<t<\infty$.

Не обращая внимания на то, что этот сигнал не является абсолютно интегрируемым, выражение для спектральной плотности запишем в форме преобразования Фурье (2.38):

$$\mathbf{S}(\omega)=A_0\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{A_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)t}dt+\frac{A_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(\omega+\omega_0)t}dt.$$

Применив выражение (2.79′), получим

$$\mathbf{S}(\omega)=A_0\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]. \tag{2.95}$$

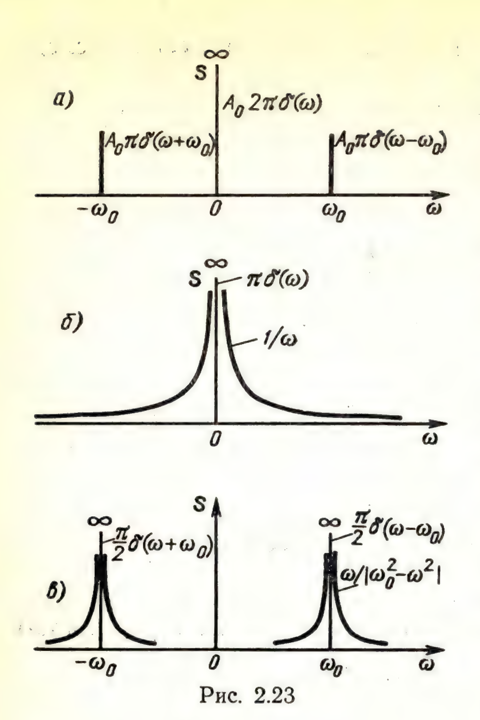


Рис. 2.23

Эта функция равна нулю для всех частот, кроме $\omega=\omega_0$ и $\omega=-\omega_0$, при которых $\mathbf{S}(\omega)$ обращается в бесконечность. Как и следовало ожидать, гармоническому колебанию с конечной амплитудой соответствует бесконечно большая спектральная плотность (рис. 2.23, *а*).

В частности, приравнивая ω нулю, получаем спектральную плотность постоянного напряжения (тока) A_0 [см. (2.78), (2.79)]:

$$\mathbf{S}(\omega)=A_0 2\pi\delta(\omega). \qquad (2.96)$$

Этот результат представлен на рис. 2.23, *а*.

2. $s(t)=A_0\sin(\omega_0 t)$, $-\infty<t<\infty$.

Можно утверждать, что спектральные плотности функций $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ имеют одинаковый модуль, так как они различаются только фазовым сдвигом (второй сигнал отстает от первого на $\pi/2$). Отсюда следует, что для нахождения спектральной плотности заданного сигнала необходимо спектральную плотность (2.95) умножить на $e^{-i\pi/2}=-i$ для $\omega>0$ и (с учетом нечетности ФЧХ) на $e^{i\pi/2}=i$ для $\omega<0$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{S}(\omega)=-iA_0\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]. \qquad (2.97)$$

Аналогичным образом можно показать, что сигналу $s(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$, $-\infty<t<\infty$, соответствует спектр

$$\mathbf{S}(\omega)=A_0\pi\left[e^{i\theta_0}\delta(\omega-\omega_0)+e^{-i\theta_0}\delta(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (2.97')$$

3. $s(t)=1$, $t\geqslant 0$ (единичный скачок или ступенчатая функция).

Сначала представим эту разрывную функцию в виде суммы

$$s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t),$$

где

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}+1 & \text{при } t>0,\\ -1 & \text{при } t<0\end{cases}$$

— функция-сигнатура (функция знака).

Такая запись соответствует тому, что $s(t)$ является первообразной функцией для единичного импульса $\delta(t)$ [см. (2.73)]. При дифференцировании $s(t)$, приводящем к $\delta(t)$, постоянную составляющую можно не учитывать (ее производная равна нулю) и, следовательно, только производная функции $(1/2)\,\mathrm{sgn}(t)$ есть функция $\delta(t)$. Этот результат уже был использован в § 2.8.

Так как спектральная плотность дельта-функции равна единице, в соответствии с (2.52) спектральная плотность функции $(1/2)\,\mathrm{sgn}\,(t)$ равна $1/i\omega$. Постоянной составляющей 1/2, входящей в $s(t)$, соответствует спектральная плотность [см. (2.96)] $\pi\delta(\omega)$.

Итак, спектральная плотность ступенчатой функции

$$\mathbf{S}(\omega)=\pi\delta(\omega)+1/i\omega. \tag{2.98}$$

График модуля этого выражения представлен на рис. 2.23, *б*.

Выведем теперь эту же формулу, основываясь на преобразовании Лапласа $\mathbf{S}(p)$ и на теореме Коши:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{S}(p)\,\mathrm{e}^{pt}dp=\frac{1}{2}\sum_k \operatorname*{Res}_{p=p_k}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\mathbf{S}(i\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}d(i\omega)\ \text{ при }\ c>0. \tag{2.99}$$

Смысл этого выражения состоит в том, что контур интегрирования на плоскости комплексной переменной p совмещается с осью $i\omega$ с обходом полюсов функции $\mathbf{S}(p)$, расположенных на этой оси, справа по полуокружности бесконечно малого радиуса.

Вклад в интеграл, обусловленный участком контура вблизи полюса p_k, равен половине вычета Res_k в указанном полюсе. Второе слагаемое в правой части (2.99) есть не что иное, как обратное преобразование Фурье, в котором спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{S}(p)\,|_{p=i\omega}$.

В рассматриваемом примере $[s(t)=1,\ t\geqslant 0]$ преобразование Лапласа $\mathbf{S}(p)=1/p$ имеет один полюс в точке $p_1=0$ с вычетом $\mathrm{Res}_1=1$, так что первое слагаемое в правой части (2.99) равно 1/2, а спектральная плотность, определяемая на мнимой оси, $\mathbf{S}(\omega)=1/i\omega$. Выражение (2.99) переходит в

$$s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1/i\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega.$$

Первому слагаемому в правой части этого выражения соответствует спектральная плотность $\pi\delta(\omega)$, а второму — $1/i\omega$. Таким образом, приходим к выражению (2.98).

4. $s(t)=\cos(\omega_0 t)$, $t\geqslant 0$.

В данном примере преобразование Лапласа $\mathbf{S}(p)=$ $=p/(\omega^2{}_0+p^2)$ имеет полюсы $p_{1,2}=\pm i\omega_0$, вычеты в которых

$$\mathrm{Res}_{1,2}=\left.\frac{pe^{pt}}{2p}\right|_{p=\pm i\omega_0}=\frac{1}{2}\,e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Использовав (2.99), получим

$$s(t)=\frac{1}{4}\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2}\,e^{i\omega t}d\omega.$$

Функциям времени $e^{i\omega_0 t}$ и $e^{-i\omega_0 t}$ соответствуют спектральные плотности $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ и $2\pi\delta(\omega+\omega_0)$ [см. (2.78)].

Таким образом, спектральная плотность рассматриваемого сигнала

$$\mathbf{S}(\omega)=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{i\omega}{\omega^2{}_0-\omega^2}.$$

График модуля этого выражения представлен на рис. 2.23, *в*.

5. $s(t)=\sin(\omega_0 t)$, $t\geqslant 0$.

В данном случае преобразование Лапласа $\mathbf{S}(p)=$ $=\omega_0/(\omega^2{}_0+p^2)$ имеет полюсы $p_{1,2}=\pm i\omega_0$, вычеты в которых

$$\mathrm{Res}_{1,2}=\left.\frac{\omega_0 e^{pt}}{2p}\right|_{p=\pm i\omega_0}=\pm\frac{1}{2i}\,e^{\pm i\omega_0 t},$$

а спектральная плотность

$$\mathbf{S}(\omega)=(\pi/2i)\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]+\omega_0/(\omega^2{}_0-\omega^2).$$

Из приведенных примеров видно, что если на оси $i\omega$ функция $\mathbf{S}(p)$ не имеет полюсов, то для перехода от изображения Лапласа к спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ достаточно в (2.82) положить $\sigma_1=0$, т. е. перейти от комплексной переменной p к действительной перменной ω. В противном случае, чтобы избежать ошибки, необходимо определить вклад этих полюсов в спектральную плотность.

В заключение, основываясь на теореме Коши (2.99), уточним условие справедливости соотношения (2.54) между спектрами при интегрировании сигнала.

Пусть исходному сигналу $s(t)$ со спектральной плотностью $\mathbf{S}(\omega)$ соответствует изображение по Лапласу $\mathbf{S}(p)$, не имеющее полюсов в правой p-полуплоскости и на оси $i\omega$. В результате интегрирования получается сигнал $s_{\text{инт}}(t)$ с изображением $\mathbf{S}(p)/p$, так что

$$s_{\text{инт}}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathbf{S}(p)}{p}e^{pt}dp, \quad t>0.$$

Функция $\mathbf{S}(p)/p$ имеет полюс в точке $p_1=0$. Вычет функции $\frac{\mathbf{S}(p)}{p}e^{pt}$ в этом полюсе $\text{Res}_1=\mathbf{S}(p)e^{pt}|_{p=0}=\mathbf{S}(0)$. Но этот результат есть не что иное, как значение спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ исходного сигнала $s(t)$ на частоте $\omega=0$ [по условию $\mathbf{S}(p)$ не имеет полюсов на оси $i\omega$ и, как показано выше, $\mathbf{S}(p)|_{p=i\omega}=\mathbf{S}(\omega)$]. Таким образом,

$$\operatorname*{Res}_{p=0}=\mathbf{S}(p)|_{p=0}=\mathbf{S}(\omega=0).$$

По аналогии с (2.99) перейдем к выражению

$$s_{\text{инт}}(t)=\frac{1}{2}\mathbf{S}(0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{S}(i\omega)}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega.$$

Если $\mathbf{S}(0)=0$, то $\operatorname*{Res}_{p=0}=0$ и подынтегральная функция $\mathbf{S}(i\omega)/i\omega=\mathbf{S}(\omega)/i\omega$ полностью определяет спектральную плотность функции $s_{\text{инт}}(t)$. Если же условие $\mathbf{S}(0)=0$ не выполняется, то $\mathbf{S}(\omega)/i\omega$ определяет только сплошную часть спектральной плотности функции $s_{\text{инт}}(t)$.

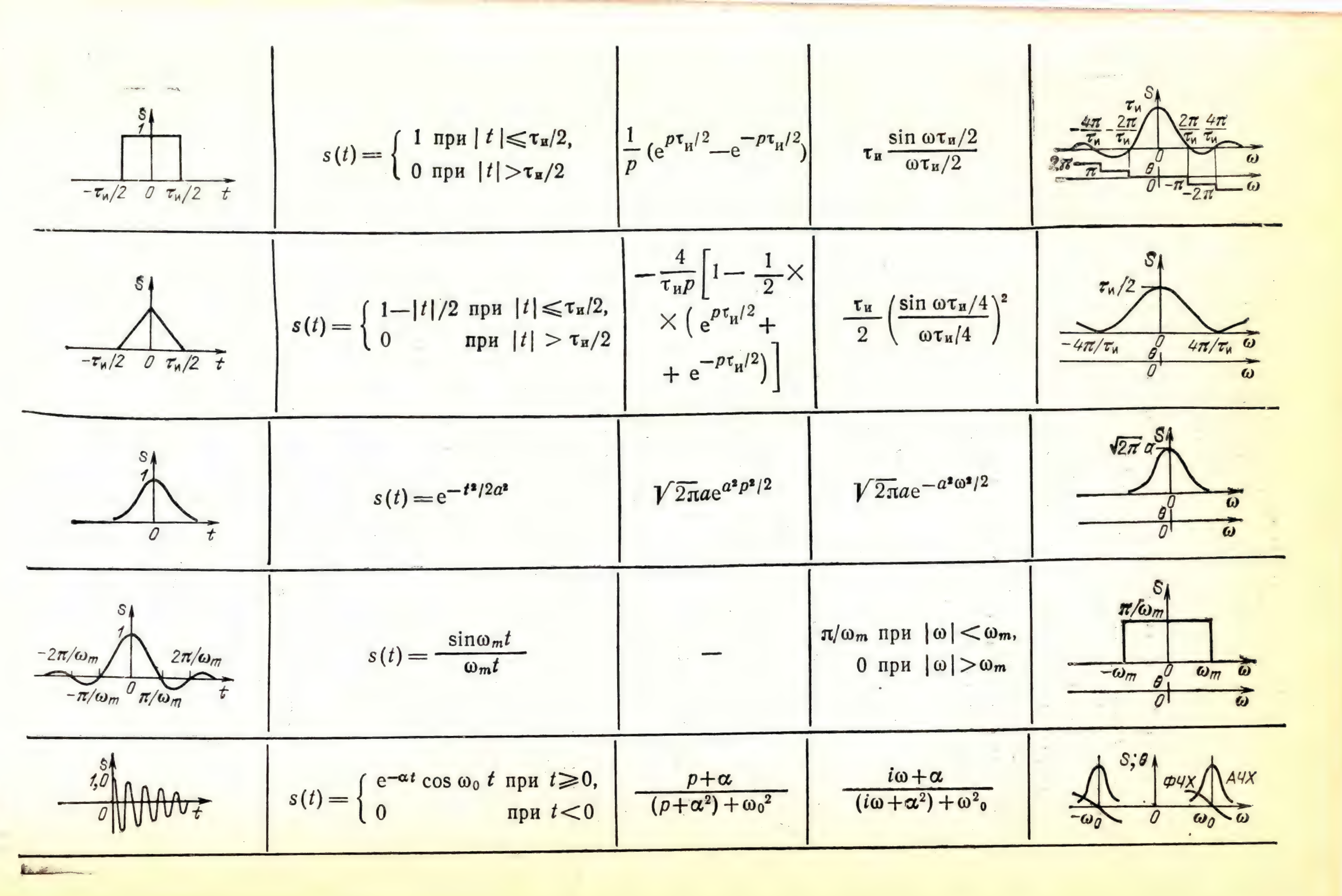
Итак, в общем случае

$$\mathbf{S}_{\text{инт}}(\omega)=\pi\mathbf{S}(0)\delta(\omega)+\mathbf{S}(\omega)/i\omega. \qquad (2.54')$$

Изображения по Лапласу и спектры Фурье некоторых распространенных в теории сигналов функций приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Сигнал		Изображение по Лапласу	Спектральная плотность	
s, ∞, 0, t	$\delta(t)$	1	1	S, 1, 0, ω
s, 1, 0, t	$s(t)=\begin{cases} 0 \text{ при } t\geqslant 0, \\ 1 \text{ при } t<0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}$	S, 0, ω, $\frac{\pi}{2}$, θ, 0, ω, $-\frac{\pi}{2}$
s, 1, 0, t	$s(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha t} \text{ при } t\geqslant 0, \\ 0 \quad \text{ при } t<0, \end{cases}$ $\alpha>0$	$\dfrac{1}{\alpha+p}$	$\dfrac{1}{\alpha+i\omega}$	S; θ, 1/α, ФЧХ, АЧХ, π/2, ω, 0, −π/2
s, 1, 0, t	$s(t)=\mathrm{e}^{-e\lvert t\rvert},\ \alpha>0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-p^2}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	2/α, 0, ω, θ, 0, ω



	$s(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } \lvert t\rvert \leqslant \tau_и/2, \\ 0 \text{ при } \lvert t\rvert > \tau_и/2 \end{cases}$	$\frac{1}{p}\left(e^{p\tau_и/2}-e^{-p\tau_и/2}\right)$	$\tau_и \frac{\sin \omega\tau_и/2}{\omega\tau_и/2}$	
	$s(t)=\begin{cases} 1-\lvert t\rvert/2 \text{ при } \lvert t\rvert \leqslant \tau_и/2, \\ 0 \quad \text{ при } \lvert t\rvert > \tau_и/2 \end{cases}$	$-\frac{4}{\tau_и p}\left[1-\frac{1}{2}\times \left(e^{p\tau_и/2}+ e^{-p\tau_и/2}\right)\right]$	$\frac{\tau_и}{2}\left(\frac{\sin \omega\tau_и/4}{\omega\tau_и/4}\right)^2$	
	$s(t)=e^{-t^2/2a^2}$	$\sqrt{2\pi}ae^{a^2p^2/2}$	$\sqrt{2\pi}ae^{-a^2\omega^2/2}$	
	$s(t)=\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t}$	—	π/ω_m при $\lvert\omega\rvert<\omega_m$, 0 при $\lvert\omega\rvert>\omega_m$	
	$s(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t \text{ при } t\geqslant 0, \\ 0 \quad \text{ при } t<0 \end{cases}$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha^2)+\omega_0^2}$	$\frac{i\omega+\alpha}{(i\omega+\alpha^2)+\omega^2_0}$	

2.11. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ ЧАСТОТ В ВИДЕ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

В теории и технике сигналов широко используется теорема Котельникова (теорема отсчетов): *если наивысшая частота в спектре функции $s(t)$ меньше, чем f_m, т. е.* $\mathbf{S}(\omega)=0$ *при* $|\omega|>\pi f_m$, *то функция $s(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга не более чем на $1/2f_m$ секунд.*

В соответствии с этой теоремой сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру максимальной частотой $\omega_m=2\pi f_m$, можно представить рядом Котельникова

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right)\frac{\sin\omega_m(t-n/2f_m)}{\omega_m(t-n/2f_m)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\,\varphi_n(t). \quad (2.100)$$

В этом выражении $1/2f_m=\Delta t$ обозначает интервал между двумя отсчетными точками на оси времени, а $s(n/2f_m)=s(n\Delta t)$ — отсчеты сигнала $s(t)$ в моменты времени $t=n\Delta t$.

Представление заданного сигнала $s(t)$ рядом (2.100) иллюстрируется рис. 2.24.

Функция вида

$$\varphi_n(t)=\sin[\omega_m(t-n\Delta t)]/\omega_m(t-n\Delta t), \quad (2.101)$$

уже встречавшаяся ранее (см. § 2.6, рис. 2.14, *а*), обладает следующими свойствами:

в точке $t=n\Delta t$ $\varphi_n(n\Delta t)=1$, а в точках $t=k\Delta t$, где k — любое целое число, отличное от n, $\varphi_n(k\Delta t)=0$;

спектральная плотность функции $\varphi_0(t)$ равномерна в полосе частот $|\omega|<\omega_m$ и равна $1/2f_m=\pi/\omega_m$ [см. (2.66) и рис. 2.14, *б*].

Так как функция $\varphi_n(t)$ отличается от $\varphi_0(t)$ только сдвигом по оси времени на $n\Delta t$, то ее спектральная плотность

$$\mathbf{\Phi}_n(\omega)=\frac{1}{2f_m}e^{-in\Delta t\omega}=\Delta t e^{-in\Delta t\omega}, \quad |\omega|<\omega_m. \quad (2.102)$$

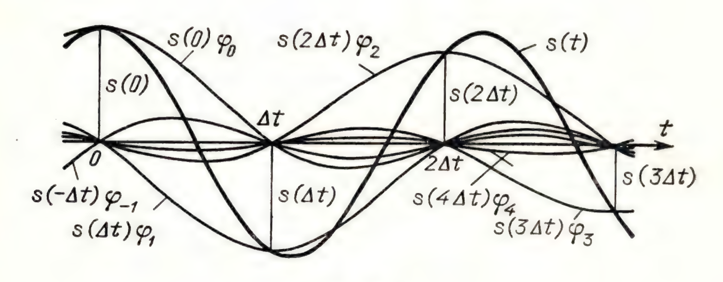


Рис. 2.24

Ряд (2.100) точно определяет сигнал $s(t)$ не только в точках отсчета $t=n\Delta t$, что очевидно, но и в любой момент t. Для доказательства этого утверждения воспользуемся общими правилами разложения сигнала по ортогональной системе функций (см. § 2.1). В данном случае разложение производится по функциям вида (2.101), ортогональным на бесконечном интервале.

Задачей является нахождение коэффициентов ряда (2.100). Применим для этого общую формулу (2.5), справедливую для обобщенного ряда Фурье:

$$c_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_n(t)\,dt, \qquad (2.103)$$

где $\|\varphi_n\|^2$ определяется по формуле (2.3);

$$\|\varphi_n\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2[\omega_m(t-n\Delta t)]}{\omega_m^2(t-n\Delta t)^2}\,dt=\frac{\pi}{\omega_m}=\Delta t.$$

Предполагается, что $s(t)$ — квадратично-интегрируемая функция (энергия сигнала конечна).

Для вычисления интеграла в выражении (2.103) воспользуемся формулой (2.57), согласно которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{\Phi}^*_n(\omega)\,d\omega=$$

$$=\Delta t\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m}\mathbf{S}(\omega)\,e^{in\Delta t\omega}d\omega. \qquad (2.103')$$

Интеграл в правой части (2.103′) с коэффициентом $1/2\pi$ есть не что иное, как значение $s(t)$ в момент $t=n\Delta t$. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_n(t)\,dt=\Delta t\cdot s(n\Delta t).$$

Представляя этот результат в (2.103), получаем окончательное выражение $c_n=s(n\Delta t)$, которое означает, что коэффициентами обобщенного ряда Фурье (2.100) являются отсчеты сигнала $s(t)$ в моменты $t=n\Delta t$.

Поскольку ограничение спектра конечной максимальной частотой обеспечивает непрерывность функции $s(t)$, ряд (2.100) сходится к $s(t)$ при любом значении t.

Соотношение между спектром $\mathbf{S}(\omega)$ сигнала $s(t)$ и спектром $\Phi_n(\omega)$ базисной функции $\varphi_n(t)$ при $\Delta t=1/2f_m$ иллюстрируется рис. 2.25, *а* и *б*.

Если взять интервал между отсчетами $\Delta t'$ меньшим $\Delta t=1/2f_m$, то ширина $2\omega'$ спектра $\Phi'_n(\omega)$ функции $\varphi'_n(t)$ будет

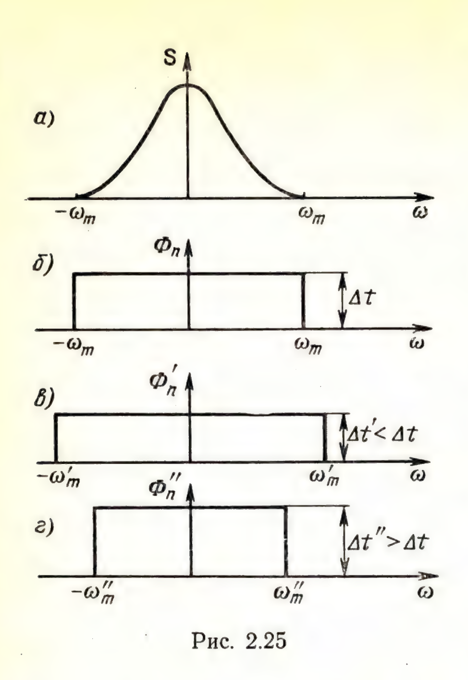


Рис. 2.25

больше, чем у спектра $\mathbf{S}(\omega)$ (рис. 2.25, *в*). Это повышает точность представления сигнала $s(t)$, так как уменьшается величина неучтенных «хвостов» спектра $\mathbf{S}(\omega)$ вне граничных частот ω_m; кроме того, ослабляются требования к АЧХ фильтра, восстанавливающего непрерывный сигнал.

При увеличении же $\Delta t''$ по сравнению с Δt (рис. 2.25, *г*) спектр $\Phi''_n(\omega)$ функции $\varphi''_n(t)$ становится уже, чем спектр сигнала $s(t)$, и при вычислении интеграла в выражении (2.103′) пределы интегрирования должны быть $-\omega''_m$, ω''_m вместо $-\omega_m$, ω_m. Коэффициенты c_n при этом являются уже отсчетами не заданного сигнала $s(t)$, а некоторой другой функции $s_1(t)$, спектр которой ограничен частотой $f''_m < f_m$.

Рассмотрим теперь случай, когда длительность сигнала $s(t)$ конечна и равна T_c, а полоса частот по-прежнему ограничена частотой f_m. Эти условия, строго говоря, несовместимы, так как сигнал конечной длительности обладает теоретически бесконечно широким спектром. Однако практически всегда можно определить максимальную частоту спектра f_m так, чтобы «хвосты» функции времени, обусловленные отсеканием частот, превышающих f_m, содержали пренебрежимо малую долю энергии по сравнению с энергией исходного сигнала $s(t)$. При таком допущении для сигнала длительностью T_c с полосой частот f_m общее число независимых параметров [т. е. значений $s(n\Delta t)$], которое необходимо для полного задания сигнала, очевидно, будет $N = T_c/\Delta t + 1 = 2f_mT_c + 1 \approx 2f_mT_c$ (при $N \gg 1$).

При этом выражение (2.100) принимает следующий вид (при отсчете времени от начала сигнала):

$$s(t) = \sum_{n=0}^{2f_mT_c} s(n\Delta t) \frac{\sin[\omega_m(t - n\Delta t)]}{\omega_m(t - n\Delta t)}. \qquad (2.104)$$

Строго говоря, в соответствии с теоремой отсчетов эта сумма вне интервала $(0, T_c)$ должна быть дополнена бесконечным числом нулевых отсчетов.

Число N иногда называют *числом степеней свободы* сигнала $s(t)$, так как даже при произвольном выборе

значений $s(n\Delta t)$ сумма вида (2.104) определяет функцию, удовлетворяющую условиям заданной ширины спектра и заданной длительности сигнала (без учета «хвостов»). Число N иногда называют также **базой** сигнала.

Задание совокупности N отсчетов сигнала позволяет найти его энергию и среднюю мощность. Используя формулу (2.12), а также равенство $\|\varphi_n\|^2=\Delta t$, получаем

$$Э=\sum_{n=0}^{2f_mT_c}[s(n\Delta t)]^2\|\varphi_n\|^2=\Delta t\sum_{n=0}^{2f_mT_c}[s(n\Delta t)]^2,$$

$$\overline{s^2(t)}=\frac{Э}{T_c}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2f_mT_c}[s(n\Delta t)]^2.$$

Из последнего выражения видно, что средняя за время T_c мощность непрерывного сигнала равна среднему квадрату его N отсчетов.

2.12. ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Иногда сигнал необходимо представить с помощью отсчетов спектральной функции $\mathbf{S}(\omega)$, а не временны́х отсчетов функции $s(t)$. Для функции $\mathbf{S}(\omega)$ можно определить ряд, аналогичный выражению (2.100). Для этого базисная функция $\varphi_n(t)=\mathrm{sinc}[\omega_m(t-n\Delta t)]$ [см. (2.101)] должна быть заменена функцией $\varphi_n(\omega)=\mathrm{sinc}\left[\frac{T_c}{2}(\omega-n\Delta\omega)\right]=\mathrm{sinc}\left[\frac{T_c}{2}\left(\omega-\frac{n}{2\pi T_c}\right)\right]$, которая получена из (2.101) заменой t на ω, полуширины спектра ω_m на полудлительность сигнала $T_c/2$ и $\Delta t=1/2f_m$ на $\Delta\omega=2\pi/T_c$. Таким образом,

$$\mathbf{S}(\omega)=\sum_{n=-f_mT_c}^{f_mT_c}\mathbf{S}(n\Delta\omega)\,\mathrm{sinc}[T_c(\omega-n\Delta\omega)/2]. \tag{2.105}$$

Если ранее временной интервал между двумя соседними отсчетами Δt не должен был превышать $2\pi/2\omega_m$, то теперь частотный интервал $\Delta\omega$ не должен превышать $2\pi/T_c$. При ширине спектра $2\omega_m$, охватывающей область частот $|\omega|<\omega_m$, число отсчетов равно $N=2\omega_m/\Delta\omega+1=2f_mT_c+1$, как и при представлении сигнала рядом (2.104).

В общем случае отсчеты $\mathbf{S}(n\Delta\omega)$ являются комплексными числами и в каждой отсчетной точке на оси частот должны быть заданы два параметра — действительная и мнимая части $\mathbf{S}(n\Delta\omega)$ (или модуль и аргумент). Таким образом, общее число параметров получается вдвое большим, чем при временно́м представлении сигнала, когда отсчеты $s(n\Delta t)$ — действительные числа. Избыточность представления сигнала в частотной обла-

сти легко устраняется, если учесть, что $\mathbf{S}(n\Delta\omega)$ и $\mathbf{S}(-n\Delta\omega)$ являются комплексно-сопряженными величинами, так что задание одной из них однозначно определяет другую. Отсюда следует, что спектр сигнала полностью характеризуется совокупностью комплексных отсчетов, взятых только в области положительных частот, и таким же числом независимых параметров или степеней свободы сигнала N, как и при представлении сигнала во временно́й области.

К приведенному выше определению максимально допустимого интервала $\Delta\omega=2\pi/T_c$, основанному на замене $t\rightleftarrows\omega$ в (2.100), можно прийти и с помощью строгих рассуждений. Полагая, как и в § 2.11, заданными длительность T_c и спектр $\mathbf{S}(\omega)$ сигнала $s(t)$, представляем этот сигнал в виде ряда Фурье (вместо интеграла Фурье)

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T_x}t}, \quad -T_x/2\leqslant t<T_x/2,$$

где $T_x\geqslant T_c$ — произвольный отрезок оси t, включающий в себя отрезок T_c.

В соответствии с (2.18) и (2.40) коэффициенты

$$c_n=\frac{1}{T_x}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} s(t)\,e^{-in\frac{2\pi}{T_x}t}dt=\frac{1}{T_x}\mathbf{S}(\omega)\,|_{\omega=n2\pi/T_x}.$$

Как видим, коэффициенты c_n, будучи умноженными на T_x, есть не что иное, как значения спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ на дискретных частотах $n2\pi/T_x=n\Delta\omega$, т. е. отсчеты $\mathbf{S}(n\Delta\omega)$, фигурирующие в выражении (2.105). Очевидно, что интервал между отсчетами на оси частот должен соответствовать условию $T_x\geqslant T_c$, т. е. $\Delta\omega\leqslant 2\pi/T_c$.

2.13. ДИСКРЕТИЗОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

В § 2.11 под дискретизацией сигнала $s(t)$ подразумевалось аналитическое его представление с помощью совокупности отсчетов в дискретные моменты времени $t=n\Delta t$.

В настоящее время широкое распространение получают системы, в которых осуществляется физическая дискретизация сигнала, например, при использовании импульсных методов передачи сообщений в радиосвязи. При переходе к системам с цифровой обработкой информации также требуется преобразование аналогового сигнала в дискретный. Выбор шага (темпа) T дискретизации производится на основании теоремы отсчетов (см. § 2.11).

Процедуру дискретизации (взятие отсчетов), осуществляемую с помощью электроного ключа (см. рис. 2.26), можно рассматривать как умножение функции $s(t)$ на вспомогательную

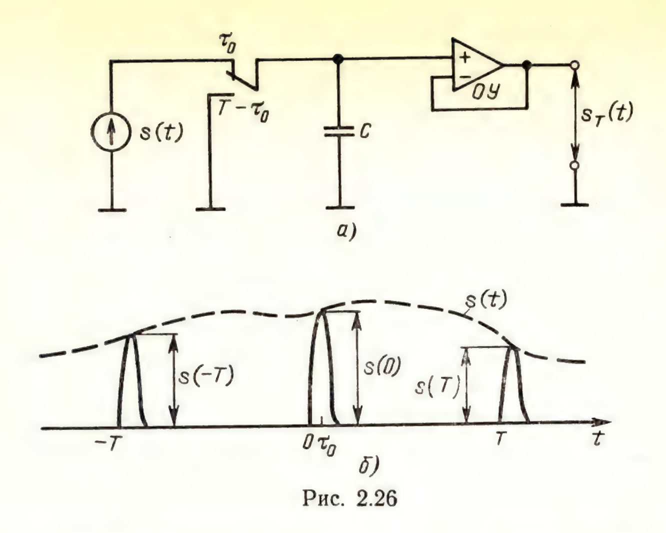


Рис. 2.26

периодическую последовательность $y_T(t)$ достаточно коротких тактовых импульсов. В качестве таких импульсов удобно выбирать прямоугольные импульсы с длительностью τ_0, малой по сравнению с T. Таким образом, дискретизованный с шагом T сигнал можно определить выражением

$$s_T(t) = s(t)\, y_T(t). \tag{2.106}$$

Функции $s(t)$, $y_T(t)$ и $s_T(t)$ показаны на рис. 2.27, *а*.

Для выявления требования к «малости» величины τ_0/T рассмотрим структуру спектра дискретизованного сигнала $s_T(t)$.

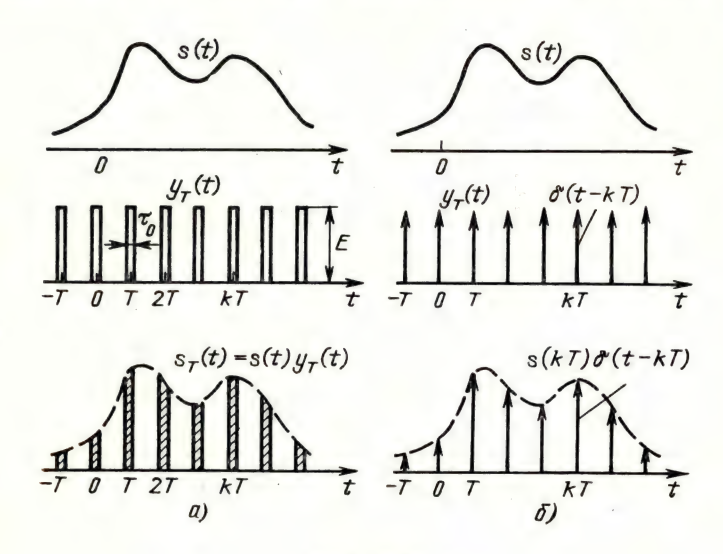


Рис. 2.27

Спектральную плотность исходного континуального сигнала $\mathbf{S}(\omega)$ будем считать заданной.

Представим периодическую функцию $y_T(t)$ в виде ряда Фурье по формуле (2.34), в которой под q будем подразумевать величину T/τ_0, а под ω_1, как и в (2.34), — частоту повторения $\omega_1=2\pi/T$:

$$y_T(t)=E\frac{\tau_0}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}(n\pi\tau_0/T)\cos(n\omega_1 t)\right]. \qquad (2.107)$$

Подставим это выражение в (2.106):

$$s_T(t)=E\frac{\tau_0}{T}\left[s(t)+2s(t)\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}(n\pi\tau_0/T)\cos(n\omega_1 t)\right].$$

Из этого выражения очевидна структура спектра дискретизованного сигнала $s_T(t)$.

Первому слагаемому в правой части соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ исходного континуального сигнала, а каждому из произведений $s(t)\cos(n\omega_1 t)$ — спектральная плотность $\frac{1}{2}[\mathbf{S}(\omega-n\omega_1)+\mathbf{S}(\omega+n\omega_1)]$ [(см. (2.51)].

Следовательно, искомая спектральная плотность

$$\mathbf{S}_T(\omega)=E\frac{\tau_0}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(n\pi\tau_0/T)\,\mathbf{S}(\omega-n\omega_1). \qquad (2.108)$$

Графики функций $S(\omega)$ и $S_T(\omega)$ (при $\tau_0/T=0{,}2$) представлены на рис. 2.28, *а* и *б*.

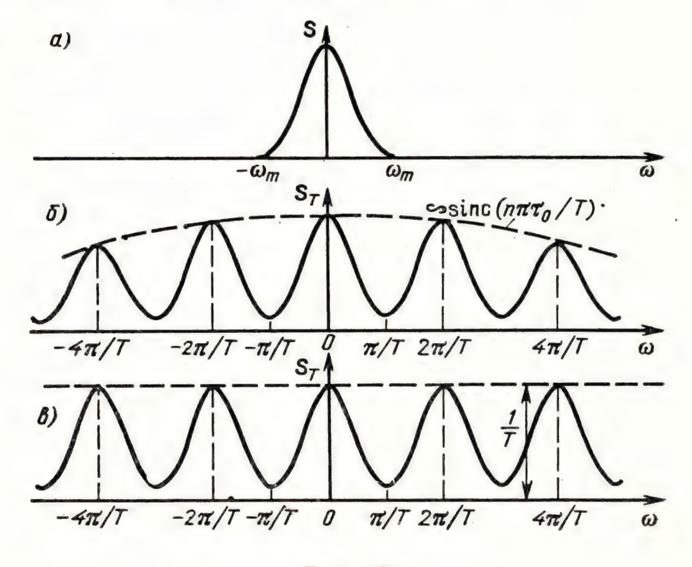


Рис. 2.28

Итак, спектр $S_T(\omega)$ дискретизованного сигнала представляет собой последовательность спектров $S(\omega)$ исходного сигнала $s(t)$, сдвинутых один относительно другого на $\omega_1=2\pi/T$ и убывающих по закону $\mathrm{sinc}(n\pi\tau_0/T)$.

С уменьшением отношения τ_0/T (за счет τ_0) лепестки спектра убывают медленнее и в пределе, при $\tau_0/T\to 0$, спектр приобретает строго периодическую структуру (и, естественно, уровень лепестков стремится к нулю).

Если одновременно с уменьшением τ_0 увеличивать E так, чтобы произведение $E\tau_0$, т. е. площадь тактового импульса оставалась неизменной (и равной, например, единице при $E=1/\tau_0$), то при $\tau_0\to 0$ выражение (2.108) переходит в

$$S_T(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega-n\omega_1). \qquad (2.109)$$

График $S_T(\omega)$ для этого случая изображен на рис. 2.28, *в*.

По существу совершен переход от тактовых импульсов прямоугольной формы с конечной амплитудой (рис. 2.27, *а*) к дельта-функциям (рис. 2.27, *б*), так что можно записать

$$y_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT).$$

Соответственно выражение (2.106) для дискретизованного сигнала принимает вид

$$s_T(t)=s(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(kT)\,\delta(t-kT). \qquad (2.106')$$

На рис. 2.27, *б* дискретизованный сигнал $s_T(t)$ представлен в виде последовательности дельта-функций $\delta(t-kT)$ с весовыми коэффициентами $s(kT)$.

Представление $s_T(t)$ в форме (2.106′) существенно упрощает его спектральный анализ. Применив к (2.106′) преобразование Фурье (2.38), получим

$$S_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(kT)\,\delta(t-kT)\right]e^{-i\omega t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(kT)\,e^{-i\omega kT}.$$

Полагая, что дискретизация континуального сигнала начинается с момента $t=0$, перепишем последнее выражение в виде

$$S_T(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}s(kT)\,e^{-i\omega kT}. \qquad (2.110)$$

По своей размерности функции $S(\omega)$ и $S_T(\omega)$ неодинаковы: первая имеет размерность [В/Гц], а вторая — просто [В] (если $s(t)$ — напряжение).

Выражения (2.109) и (2.110) эквивалентны. Оба они определяют сплошной спектр дискретизованного во времени сигнала $s_T(t)$ в виде периодической структуры с периодом $\omega_1=2\pi/T$ (см. рис. 2.28, *в*).

Выражение (2.109) в наглядной форме устанавливает связь между $\mathbf{S}(\omega)$ и $\mathbf{S}_T(\omega)$, однако при произвольном соотношении между T и $1/2f_m$, когда возможно перекрытие парциальных спектров, как это показано на рис. 2.28, *в*, применение формулы (2.109) становится затруднительным. Преимуществом выражения (2.110) является возможность определения спектральной плотности $\mathbf{S}_T(\omega)$ непосредственно по совокупности временных отсчетов $\{s(kT)\}$, без обращения к спектру $\mathbf{S}(\omega)$ исходного континуального сигнала и независимо от соотношения между T и $1/2f_m$.

В том случае, когда перекрытие парциальных спектров выражено незначительно ($T<1/2f_m$), из формул (2.109) и (2.110) вытекают соответственно следующие простые соотношения:

$$\mathbf{S}(\omega)=T\mathbf{S}_T(\omega),\ |\omega|<\pi/T, \tag{2.109'}$$

$$\mathbf{S}(\omega)=T\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,e^{-i\omega kT},\quad |\omega|<\pi/T. \tag{2.110'}$$

Следует иметь в виду, что энергия спектра $\mathbf{S}_T(\omega)$, существующего в диапазоне частот $-\infty<\omega<\infty$, теоретически бесконечно велика. Это объясняется тем, что дискретизованный сигнал $s_T(t)$ выражен через дельта-функции $\delta(t-kT)$. При использовании реальных тактовых импульсов (при $\tau_0\neq0$) спектральная плотность $\mathbf{S}_T(\omega)$ с возрастанием ω убывает (см. рис. 2.28, *б*) и содержащаяся в спектре энергия конечна. Величина ее, определяемая с помощью равенства Парсеваля (2.58), равна (при $E=1$) $Э_T=(\tau_0/T)Э$, где $Э$ — энергия исходного континуального сигнала.

Переходя в выражении (2.110) к комплексной переменной $p=\sigma+i\omega$, получаем изображение по Лапласу дискретизованного сигнала

$$\mathbf{S}_T(p)=\mathscr{L}[s_T(t)]=\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,e^{-pkT}. \tag{2.111}$$

По аналогии с (2.110′) изображение $\mathbf{S}(p)$ исходного континуального сигнала $s(t)$

$$\mathbf{S}(p)=T\mathbf{S}_T(p)=T\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,e^{-pkT}. \tag{2.111'}$$

Оригинал, т. е. функцию $s_T(t)$, можно определить по заданному изображению $\mathbf{S}_T(p)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, записываемого в обычной форме [см. (2.83)]:

$$s_T(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathbf{S}_T(p)\,e^{pt}dp. \tag{2.112}$$

Выражение (2.112) определяет всю последовательность $\{s(kT)\}$ в форме, совпадающей с выражением (2.106′). Для определения каждого отсчета $s(kT)$ можно применить более простое выражение

$$s(kT)=T\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\pi/T}^{\sigma_1+i\pi/T}\mathbf{S}_T(p)\,e^{pkT}dp, \tag{2.113}$$

в котором интегрирование ведется в пределах одного частотного интервала $(-\pi/T,\ \pi/T)$.

Некоторые дополнительные характеристики дискретных сигналов, существенные при цифровой обработке, приводятся в гл. 12.

2.14. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Наряду со спектральным подходом к описанию сигналов часто на практике оказывается необходимой характеристика, которая давала бы представление о некоторых свойствах сигнала, в частности о скорости изменения во времени, а также о длительности сигнала без разложения его на гармонические составляющие.

В качестве такой временно́й характеристики широко используется корреляционная функция сигнала.

Для детерминированного сигнала $s(t)$ конечной длительности корреляционная функция определяется следующим выражением:

$$B(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(t)\,s^*(t+\tau)\,dt, \tag{2.114}$$

где τ — временно́й сдвиг сигнала.

В данной главе рассматриваются сигналы, являющиеся вещественными функциями времени, и обозначение комплексного сопряжения можно опустить:

$$B(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(t)\,s(t+\tau)\,dt. \tag{2.115}$$

Из выражения (2.115) видно, что $B(\tau)$ характеризует степень связи (корреляции) сигнала $s(t)$ со своей копией, сдвинутой на время τ по оси времени. Ясно, что функция $B(\tau)$ достигает максимума при $\tau=0$, так как любой сигнал полностью коррелирован с самим собой. При этом

$$B(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = Э, \tag{2.116}$$

т. е. максимальное значение корреляционной функции равно энергии сигнала.

С увеличением $|\tau|$ функция $B(\tau)$ убывает (не обязательно монотонно) и при относительном сдвиге сигналов $s(t)$ и $s(t+\tau)$ на время, превышающее длительность сигнала, обращается в нуль.

На рис. 2.29 показано построение корреляционной функции для сигнала в виде прямоугольного импульса (рис. 2.29, *а*). Сдвинутый на время τ (в сторону опережения) сигнал $s(t+\tau)$ показан на рис. 2.29, *б*, а произведение $s(t)S(t+\tau)$ — на рис. 2.29, *в*. Каждому значению τ соответствует свое произведение $s(t)s(t+\tau)$, а площадь, ограниченная функцией $s(t)s(t+\tau)$, дает ординаты корреляционной функции

$$B(\tau)=\int_{t_1}^{t_1-\tau+a} E^2 dt = E^2[a-\tau], \quad 0\leqslant\tau\leqslant a.$$

График функции $B(\tau)$ представлен на рис. 2.29, *г*.

Аналогичное построение для треугольного импульса изображено на рис. 2.30. Из общего определения корреляционной функции, а также из приведенных примеров видно, что безразлично, вправо или влево относительно сигнала сдвигать его

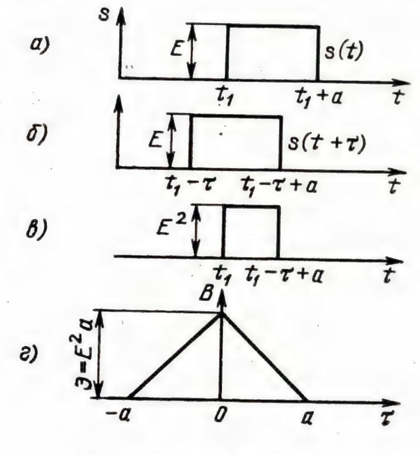


Рис. 2.29

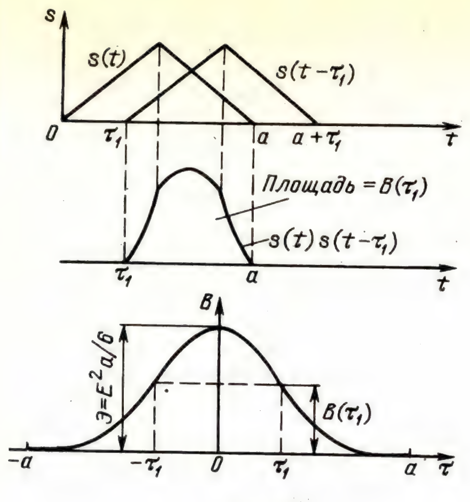


Рис. 2.30

копию на время τ. Поэтому выражение (2.115) можно обобщить:

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t-\tau)\, dt. \qquad (2.115')$$

Это равносильно утверждению, что $B(\tau)$ является четной функцией τ, т. е. $B(\tau)=B(-\tau)$.

На рис. 2.31, *а* показан сигнал в виде пачки из четырех одинаковых импульсов, сдвинутых один относительно другого на время T_1, а на рис. 2.31, *б* — соответствующая этому сигналу корреляционная функция $B(\tau)$ при $\tau\geqslant 0$. Максимальное значение $B(\tau)$ при $\tau=0$ равно учетверенной энергии одного импульса пачки.

Используя (2.115), нетрудно получить, что для гауссовского

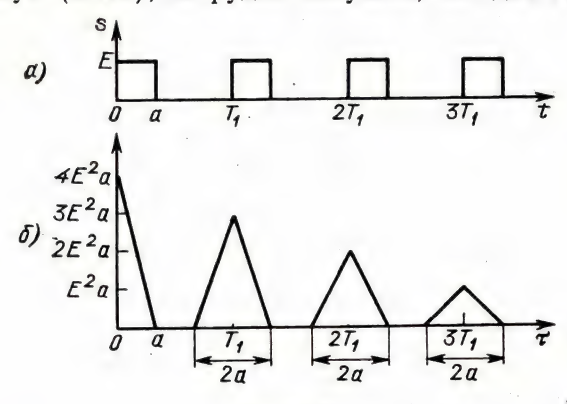


Рис. 2.31

импульса $s(t)=(A/\sqrt{2\pi}a)\exp\{-t^2/2a^2\}$, занимающего важное место в теории сигналов (см. § 2.6—2.8), корреляционная функция имеет также гауссовскую форму $B(\tau)=(A/\sqrt{2\pi}a_1)\exp\{-\tau^2/2a_1^2\}$, где $a_1=\sqrt{2}a$.

Важным параметром сигнала $s(t)$ является длительность его корреляционной функции (называемая также интервалом корреляции), определяемая как $\tau_э=\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\,d\tau/B(0)$. Величина $\tau_э$ в ряде случаев используется в качестве оценки длительности самого сигнала $s(t)$ (см. также § 2.8). Определение $\tau_э$ не требует обязательного задания $B(\tau)$, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,s(t+\tau)\,dt\,d\tau=\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt\right]^2,$$

т. е. площадь, ограниченная корреляционной функцией сигнала $s(t)$, равна квадрату площади этого сигнала, а $B(0)=Э$ [см. (2.116)].

Для оценки степени связи между двумя различными сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ используется взаимная корреляционная функция, являющаяся обобщением функции (2.114):

$$B_{12}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,s_2^*(t+\tau)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)\,s_2^*(t)\,dt. \qquad (2.117)$$

Для вещественных функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$

$$B_{12}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,s_2(t+\tau)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\,s_1(t-\tau)\,dt=B_{21}(-\tau). \qquad (2.118)$$

Рассмотренная выше корреляционная функция $B(\tau)$ является частным случаем функции $B_{12}(\tau)$, когда $s_1(t)=s_2(t)=s(t)$.

На рис. 2.32 показано построение взаимной корреляционной функции. Исходное положение сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ изображено на рис. 2.32, *а*. При сдвиге $s_2(t)$ влево ($\tau>0$) площадь, ограниченная кривой произведения $s_1(t)s_2(t+\tau)$, сначала возрастает до максимального значения при $\tau=2a$ (рис. 2.32, *б*), затем убывает до нуля при $\tau=4a$. При сдвиге $s_2(t)$ вправо ($\tau<0$) $B_{12}(\tau)$ сразу убывает. Результирующая функция $B_{12}(\tau)$ показана на рис. 2.32, *в*. Штриховой линией на этом же рисунке показана функция $B_{21}(\tau)$.

Используя (2.118), можно показать, что взаимная корреляционная функция двух гауссовских импульсов с полудлительностями a_1 и a_2 является также гауссовским импульсом с полудлительностью $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Положение максимума этого

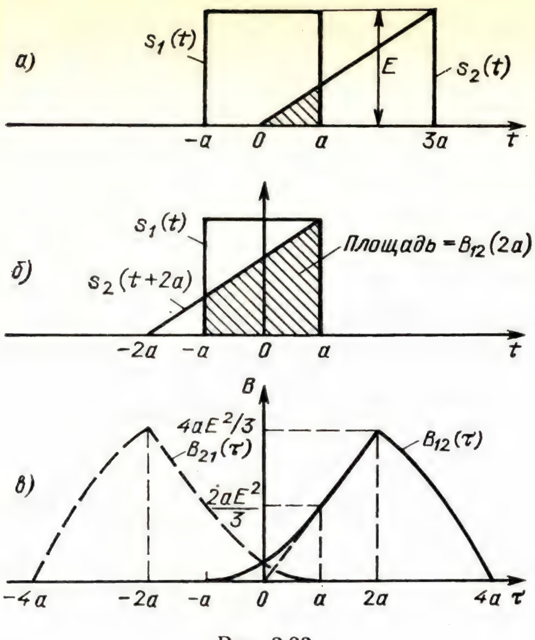


Рис. 2.32

импульса зависит от взаимного расположения исходных импульсов на оси времени. В общем случае $B_{12}(\tau)$ является асимметричной относительно оси ординат функцией и не обязательно достигает максимума при $\tau=0$ (см. рис. 2.32, *в*).

В определении (2.118) один из сигналов может быть периодической функцией времени. Очевидно, что в этом случае $B_{12}(\tau)$ является периодической функцией с периодом, равным периоду сигнала. Если оба сигнала являются периодическими (с одинаковым периодом), то определение (2.118) должно быть дополнено операцией усреднения (на интервале периода). Это же требование относится к определению корреляционной функции периодического сигнала. Необходимость усреднения вызвана тем, что периодический сигнал обладает бесконечной энергией.

Итак, взаимная корреляционная функция двух периодических сигналов и корреляционная функция периодического сигнала определяются выражениями

$$B_{12\text{пер}}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\,s_2(t+\tau)\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t-\tau)\,s_2(t)\,dt, \tag{2.119}$$

$$B_{\text{пер}}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,s(t+\tau)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,s(t-\tau)\,dt. \tag{2.120}$$

Входящие в последнее выражение интегралы есть не что иное, как корреляционная функция сигнала на интервале периода T. Обозначая ее через $B_T(\tau)$, приходим к соотношению

$$B_{\text{пер}}(\tau)=B_T(\tau)/T. \qquad (2.121)$$

При введенном определении корреляционная функция приобретает размерность мощности, причем при $\tau=0$ $B_{\text{пер}}(0)$ равна средней мощности периодического сигнала.

Очевидно также, что $B_{\text{пер}}(\tau)$ является периодической функцией с периодом, равным периоду исходного сигнала $s(t)$. Например, для гармонического колебания $s(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ корреляционная функция $B_{\text{пер}}(\tau)=\frac{A_0^2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega_0 t+\theta_0)\times$ $\times\cos[\omega_0(t+\tau)+\theta_0]\,dt=\frac{1}{2}A_0^2\cos(\omega_0\tau)$, $\omega_0=2\pi/T$. При $\tau=0$ $B_{\text{пер}}(0)=A_0^2/2=\overline{s^2(t)}$ есть средняя мощность гармонического колебания. Важно отметить, что $B_{\text{пер}}(\tau)$ не содержит информации о начальной фазе сигнала.

Отмеченные выше свойства корреляционной функции периодического сигнала иллюстрируются также на рис. 2.33 построением $B_{\text{пер}}(\tau)$ (рис. 2.33, *б*) для прямоугольного колебания (рис. 2.33, *а*).

Находя с помощью (2.119) взаимную корреляционную функцию сигналов $s_1(t)=A_1\cos(\omega_0 t+\theta_1)$ и $s_2(t)=A_2\cos(\omega_0 t+\theta_2)$, получаем $B_{12\text{пер}}(\tau)=(A_1A_2/2)\cos[\omega_0\tau+(\theta_2-\theta_1)]$. В данном случае корреляционная функция содержит информацию о разности фаз сравниваемых сигналов.

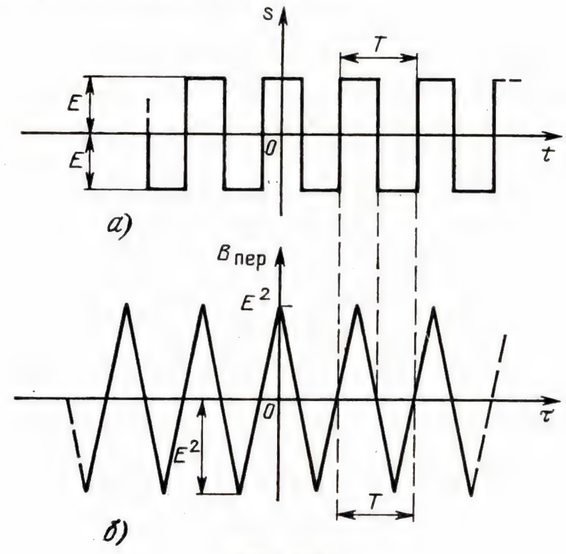


Рис. 2.33

Как уже отмечалось в § 2.5, преобразования Фурье обладают частотно-временной дуальностью. Это означает, в частности, что преобразование сигнала, заключающееся в нахождении его корреляционной функции, должно иметь дуальное соответствие в частотной области. Для установления этой связи воспользуемся выражением (2.57), в котором положим $u(t)=s(t+\tau)$ и соответственно $\mathbf{U}(\omega)=\mathbf{S}(\omega)e^{i\omega\tau}$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,s(t+\tau)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{S}(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega.$$

Учитывая, что $\mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{S}(\omega)=S^2(\omega)$, приходим к искомому соотношению

$$B(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{2.122}$$

где

$$S^2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}B(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{2.123}$$

Итак, прямое преобразование Фурье (2.123) корреляционной функции $B(\tau)$ дает спектральную плотность энергии (см. п. 2.5.9), а преобразование (2.122) дает корреляционную функцию $B(\tau)$.

Из выражений (2.122) и (2.123) вытекают свойства, аналогичные отмеченным в § 2.8: чем шире спектр $S(\omega)$ сигнала, тем меньше интервал корреляции $\tau_э$. Соответственно чем больше интервал корреляции заданного сигнала, тем у́же его спектр.

Из выражений (2.122) и (2.123) также следует, что корреляционная функция $B(\tau)$ не зависит от ФЧХ спектра сигнала. Так как при заданном амплитудном спектре $S(\omega)$ форма функции $s(t)$ существенно зависит от ФЧХ, то можно сделать следующее заключение: различным по форме сигналам $s(t)$, обладающим одинаковыми амплитудными спектрами, соответствуют одинаковые корреляционные функции $B(\tau)$.

Глава 3. МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для передачи информации на расстояние применяются радиосигналы, эффективно излучаемые с помощью антенных устройств и обладающие способностью распространяться в ви-

де свободных электромагнитных волн в среде, разделяющей отправителя и получателя информации. Такими радиосигналами являются модулированные колебания.

В самом общем случае радиосигнал, несущий в себе информацию, можно представить в виде соотношения (1.1). Перепишем его в форме

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]=A(t)\cos\psi(t), \qquad (3.1)$$

в которой амплитуда A, угол θ или какая-то их комбинация изменяется в соответствии с характером передаваемого сообщения.

Если A и θ — постоянные величины, то (3.1) описывает гармоническое несущее колебание, не содержащее в себе передаваемой информации (в последние годы в качестве несущей применяются также колебания несинусоидальной формы).

Если тот или иной параметр несущего колебания подвергается изменению по закону модулирующего сигнала, однозначно связанному с передаваемым сообщением, то (3.1) описывает модулированное колебание.

В зависимости от того, какой из двух параметров изменяется — амплитуда A или угол θ, различают два основных вида модуляции: амплитудную (АМ) и угловую (УМ). Угловая модуляция, в свою очередь, подразделяется на частотную (ЧМ), когда пропорционально модулирующему сигналу изменяется отклонение частоты модулированного колебания относительно несущей частоты ω_0, и фазовую (ФМ), когда пропорционально модулирующему сигналу изменяется фаза несущей. Эти две разновидности угловой модуляции тесно связаны между собой; различие между ними проявляется лишь в характере изменения угла θ при одном и том же модулирующем сигнале, а также в способах получения модулированного колебания.

Радиосигнал $a(t)$ занимает определенный участок электромагнитного спектра $\Delta\omega$. Структура этого спектра зависит как от спектра передаваемого сообщения, так и от вида модуляции. Этот вопрос детально рассматривается в следующих параграфах.

Здесь же отметим, что в любом случае несущая частота ω_0 должна быть велика по сравнению с максимальной частотой Ω_m спектра передаваемого сообщения $s(t)$[1]. Это означает, что функция $s(t)$, а следовательно, $A(t)$ или $\theta(t)$, является медленной по сравнению с $\cos\omega_0 t$ и чем сильнее выполняется это условие, тем полнее «закладывается» передаваемая информация в радиосигнал $a(t)$.

Кроме того, как правило, выполняется соотношение $\Delta\omega/\omega_0\ll\ll 1$, которое позволяет трактовать любое модулированное ко-

[1] В данной главе Ω используется для обозначения частоты модулирующей функции.

лебание как узкополосный процесс. Выполнение этого неравенства снижает влияние несовершенства частотных характеристик устройств обработки радиосигнала, а также искажений, возникающих при распространении радиоволн. Таким образом, чем выше требуемая скорость передачи информации и, следовательно, шире спектр сообщения, тем больше должна быть несущая частота радиосигнала.

Приведем следующие примеры. При передаче речи или музыки спектр сообщения обычно ограничивают полосой от $F_{min}=20\ldots100$ Гц до $F_{max}=3000\ldots6000$ Гц (при AM). Даже на самой длинной волне вещательного диапазона ($\lambda=2000$ м) при несущей частоте $f_0=150$ кГц отношение $F_{max}/f_0=6\cdot10^3/1{,}5\cdot10^5=0{,}04$. При передаче таких же сообщений на коротких волнах (при $f_0=4\ldots20$ МГц) это отношение уменьшается в десятки раз. При передаче телевизионного сигнала максимальная частота сообщения достигает $5\ldots6$ МГц, однако и несущая частота выбирается не менее $50\ldots60$ МГц, так что отношение F_{max}/f_0 не превышает 10%.

Помимо обеспечения требуемой скорости передачи информации на выбор несущей частоты оказывают влияние условия распространения радиоволн различных частотных диапазонов, необходимая дальность передачи и ряд других технических и экономических факторов. Во всех случаях важным требованием является обеспечение высокой стабильности выбранной несущей частоты.

3.2. РАДИОСИГНАЛЫ С АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При амплитудной модуляции передаваемая информация содержится в огибающей амплитуд несущего колебания, а частота и фаза этого колебания поддерживаются неизменными. Поэтому для амплитудно-модулированного колебания общее выражение (3.1) приобретает вид

$$a(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0). \tag{3.2}$$

Характер огибающей $A(t)$ определяется видом передаваемого сообщения.

При непрерывном сообщении (рис. 3.1, *а*) модулированное колебание приобретает вид, показанный на рис. 3.1, *б*. Огибающая $A(t)$ совпадает по форме с модулирующей функцией, т. е. с передаваемым сообщением $s(t)$. Рисунок 3.1, *б* построен в предположении, что постоянная составляющая функции $s(t)$ равна нулю. Наибольшее изменение $A(t)$ «вниз» не может быть больше A_0. Изменение же «вверх» может быть в принципе и больше A_0.

Основным параметром амплитудно-модулированного коле-

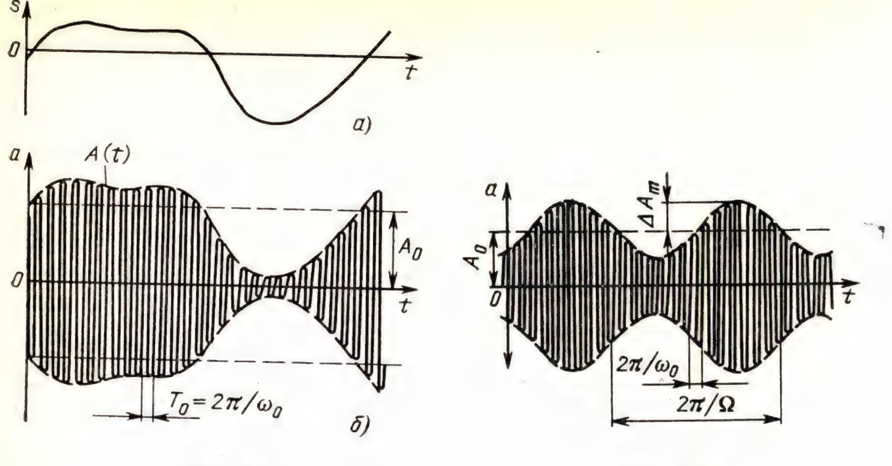


Рис. 3.1 Рис. 3.2

бания является коэффициент модуляции, характеризующий глубину изменения огибающей амплитуд.

Определение этого понятия особенно наглядно для тональной АМ, когда модулирующая функция является гармоническим колебанием:

$$s(t)=S_0\cos(\Omega t+\gamma). \tag{3.3}$$

Огибающую модулированного колебания при этом можно представить в виде

$$A(t)=A_0+k_{\text{ам}}s(t)=A_0+\Delta A_m\cos(\Omega t+\gamma), \tag{3.4}$$

где Ω — частота модуляции; γ — начальная фаза огибающей; $k_{\text{ам}}$ — коэффициент пропорциональности; $\Delta A_m=k_{\text{ам}}S_0$ — амплитуда изменения огибающей (рис. 3.2).

Отношение

$$M=\Delta A_m/A_0 \tag{3.5}$$

называется коэффициентом модуляции.

Таким образом, мгновенное значение модулированного колебания

$$a(t)=A_0[1+M\cos(\Omega t+\gamma)]\cos(\omega_0 t+\theta_0). \tag{3.6}$$

При неискаженной модуляции ($M\leqslant1$) амплитуда колебания изменяется в пределах от минимальной $A_{\min}=A_0(1-M)$ до максимальной $A_{\max}=A_0(1+M)$.

Коэффициент модуляции можно определить также с помощью выражения

$$M=(A_{\max}-A_{\min})/(A_{\max}+A_{\min}). \tag{3.5'}$$

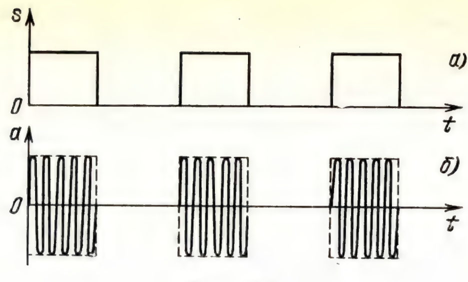


Рис. 3.3

В соответствии с изменением амплитуды изменяется и средняя за период высокой частоты мощность модулированного колебания. Пикам огибающей соответствует мощность, в $(1+M)^2$ раз большая мощности несущего колебания, равной $P_0=A_0^2/2$. Средняя же за период модуляции мощность пропорциональна среднему[1] квадрату амплитуды $A(t)$:

$$\overline{A^2(t)}=A_0^2\,\overline{[1+M\cos(\Omega t+\gamma)]^2}=A_0^2\,(1+0{,}5\,M^2). \qquad (3.7)$$

Эта мощность превышает мощность несущего колебания всего в $(1+0{,}5\,M^2)$ раз. Таким образом, при 100%-ной модуляции ($M=1$) пиковая мощность равна $4P_0$, а средняя мощность $1{,}5\,P_0$.

При передаче дискретных сообщений, представляющих собой чередование импульсов и пауз (рис. 3.3, *а*), модулированное колебание имеет вид последовательности радиоимпульсов, изображенных на рис. 3.3, *б*. При этом имеется в виду, что фазы высокочастотного заполнения в каждом из импульсов такие же, как при «нарезании» их из одного непрерывного гармонического колебания.

Более общий случай при передаче дискретных сообщений представляет собой амплитудно-импульсная модуляция, когда изменяемым параметром является амплитуда радиоимпульсов.

3.3. СПЕКТР АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

Пусть задано высокочастотное модулированное колебание, о котором известно, что несущая частота ω_0 и начальная фаза θ_0 — величины постоянные, а огибающая $A(t)$ содержит в себе передаваемое сообщение $s(t)$. Аналитически такое колебание определяется выражением (3.2).

Требуется установить связь между спектром модулированного колебания и спектром модулирующей функции, т. е. спект-

[1] Среднее значение $\cos(\Omega t+\gamma)$ за период модулирующей частоты равно нулю, а среднее значение $\cos^2(\Omega t+\gamma)$ равно 1/2. Черта над функцией означает операцию усреднения по времени.

ром исходного сообщения $s(t)$. Сделаем это сначала для тональной (гармонической) модуляции, когда огибающая

$$A(t) = A_0[1 + M\cos(\Omega t + \gamma)],$$

а модулированное колебание определяется выражением (3.6).

Перепишем выражение (3.6) в форме

$$a(t) = A_0[\cos(\omega_0 t + \theta_0) + M\cos(\omega_0 t + \theta_0)\cos(\Omega t + \gamma)] =$$

$$= A_0\cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{MA_0}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \gamma] +$$

$$+ \frac{MA_0}{2}\cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \gamma]. \quad (3.8)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой немодулированное несущее колебание с частотой ω_0 и амплитудой A_0. Второе и третье слагаемые соответствуют новым колебаниям (гармоническим), появившимся в результате изменения (модуляции) амплитуды. Частоты этих колебаний $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$ называются верхней и нижней боковыми частотами модуляции.

Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют от амплитуды несущего колебания долю, равную $M/2$, а их фазы симметричны относительно фазы несущего колебания. Это иллюстрируется векторной диаграммой, представленной на рис. 3.4. На этой диаграмме ось времени вращается по часовой стрелке с угловой частотой ω_0, причем отсчет угла $\omega_0 t$ ведется от линии OB. Поэтому несущее колебание $A_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ изображается на этой диаграмме в виде неподвижного вектора OD длиной A_0, составляющего с горизонталью угол θ_0. Колебания с частотами $\omega_0 \pm \Omega$ изображаются на этой же диаграмме двумя векторами длиной $MA_0/2$, вращающимися во взаимно противоположных направлениях с угловой частотой Ω. Начала этих векторов перенесены из точки O в точку D. Вектор DC_1, вращающийся против часовой стрелки, соответствует колебанию верхней боковой частоты, а вектор DC_2 — колебанию нижней боковой частоты. Так как фазы этих векторов симметричны

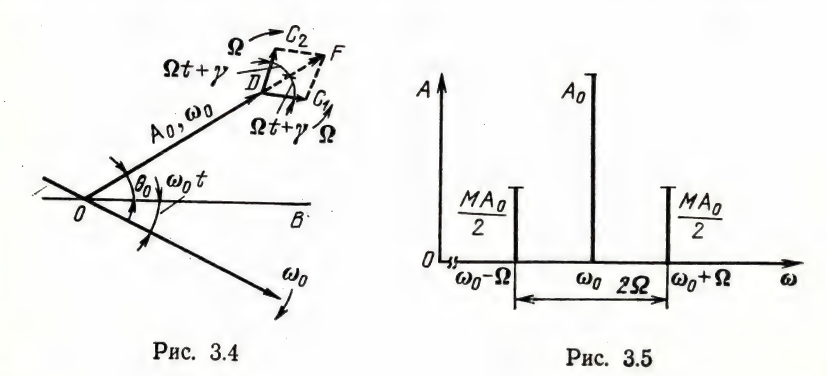


Рис. 3.4

Рис. 3.5

относительно вектора несущего колебания A_0, что следует из (3.8), их геометрическая сумма всегда располагается на направлении OD.

Таким образом, сумма всех трех колебаний (вектор OF) представляет собой колебание с постоянными частотой и начальной фазой, но с модулированной амплитудой.

Попутно заметим, что если в результате обработки модулированного колебания нарушается равенство амплитуд колебаний боковых частот или симметрия их фаз относительно фазы несущего колебания, то возникает качание вектора, представляющего результирующее колебание, относительно направления OD, что равносильно возникновению псевдофазовой модуляции.

Спектральная диаграмма колебания при тональной модуляции показана на рис. 3.5. Ширина спектра в этом случае равна удвоенной частоте модуляции 2Ω, а амплитуды колебаний боковых частот не превышают половины амплитуды несущего колебания (при $M \leqslant 1$).

Рассмотрим теперь случай, когда модулирующее сообщение является суммой колебаний двух тонов:

$$s(t) = S_1 \cos \Omega_1 t + S_2 \cos \Omega_2 t.$$

По аналогии с выражением (3.4) получаем

$$A(t) = A_0 + \Delta A_{m1} \cos \Omega_1 t + \Delta A_{m2} \cos \Omega_2 t =$$
$$= A_0 (1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t).$$

Подставляя это выражение в (3.2), после несложных тригонометрических преобразований получаем (начальные фазы несущего и модулирующего колебаний здесь для упрощения опущены)

$$a(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{M_1 A_0}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega_1) t + \cos(\omega_0 - \Omega_1) t] +$$
$$+ \frac{M_2 A_0}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega_2) t + \cos(\omega_0 - \Omega_2) t].$$

Из этого выражения следует, что каждая гармоническая составляющая сообщения $s(t)$ образует свою пару колебаний боковых частот независимо друг от друга. В этом смысле процесс образования колебаний боковых частот является линейным. При этом должно выполняться условие $M_1 + M_2 \leqslant 1$ (для неискаженной модуляции изменение огибающей «вниз» не должно превышать A_0).

Из приведенного примера нетрудно вывести правило построения спектра амплитудно-модулированного колебания по заданному спектру модулирующей функции $s(t)$. Иллюстрацией правила является рис. 3.6. На рис. 3.6, *а* изображен дискретный спектр сообщения $s(t)$, занимающий полосу частот (Ω_{min}, Ω_{max}), а на рис. 3.6, *б* — спектр модулированного колебания. Коэффи-

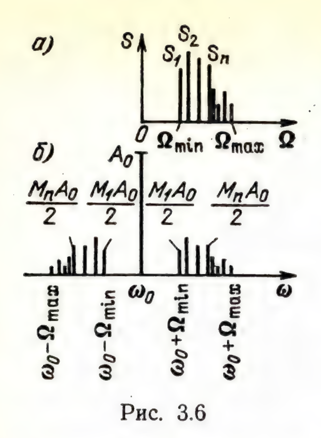


Рис. 3.6

циенты модуляции M_1, $M_2, \ldots$ пропорциональны амплитудам S_1, $S_2, \ldots$ соответствующих тонов, входящих в сообщение $s(t)$. Ширина спектра модулированного колебания равна $2\Omega_{max}$.

Перейдем к общему случаю, когда спектр сообщения $s(t)$ не обязательно дискретный. Будем исходить из общего выражения (3.2). Огибающая $A(t)$ изменяется пропорционально модулирующему сообщению $s(t)$, и, следовательно, ее спектр $\mathbf{S}_A(\Omega) \sim \mathbf{S}(\Omega)$[1]. Выражение для спектральной плотности $\mathbf{S}_a(\omega)$ модулированного колебания $a(t)$, представляющего собой произведение огибающей $A(t)$ и немодулированной несущей $\cos(\omega_0 t+\theta_0)$, находим, используя свойство смещения спектра в преобразовании Фурье (см. п. 2.5.5). Повторив вывод формулы (2.51) с заменой $s_1(t)$ на $a(t)$ и $s(t)$ на $A(t)$, получим

$$\mathbf{S}_a(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)\, e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{i\theta_0}\mathbf{S}_A(\omega-\omega_0)+e^{-i\theta_0}\mathbf{S}_A(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (3.9)$$

Следует подчеркнуть, что спектр огибающей $A(t)$, определяемый спектром сообщения $s(t)$, концентрируется в области относительно низких частот, так что его максимальная частота $\Omega_{max} \ll \omega_0$. Смещение этого спектра на несущую частоту ω_0 означает, что функция $\mathbf{S}_A(\omega-\omega_0)$ существенно отлична от нуля лишь при частотах ω, близких к ω_0, и отношение $2\Omega_{max}/\omega_0 \ll 1$. Аналогично слагаемое $\mathbf{S}_A(\omega+\omega_0)$ существует при частотах ω, близких к $-\omega_0$. Сказанное означает, что модулированное колебание $a(t)$ является узкополосным.

Таким образом, спектральная плотность модулированного колебания $\mathbf{S}_A(\omega)$ образует два всплеска: вблизи $\omega=\omega_0$ и вблизи $\omega=-\omega_0$. Поэтому для узкополосного сигнала можно считать, что в области положительных частот

$$\mathbf{S}_a(\omega)=\frac{1}{2}e^{i\theta_0}\mathbf{S}_A(\omega-\omega_0), \qquad (3.10)$$

а в области отрицательных частот

$$\mathbf{S}_a(\omega)=\frac{1}{2}e^{-i\theta_0}\mathbf{S}_A(\omega+\omega_0). \qquad (3.11)$$

[1] Как отмечалось в сноске на с. 81, текущая частота спектра модулирующей функции обозначается через Ω.

Поясним правило нахождения спектра на примере прямоугольного радиоимпульса, определяемого выражением

$$a(t)=\begin{cases} k_{\text{ам}}A\cos\omega_0 t & \text{при } -\tau_и/2\leqslant\Delta t\leqslant\tau_и/2, \\ 0 & \text{при всех других } t. \end{cases} \tag{3.12}$$

В данном примере под сообщением $s(t)$ следует понимать видеоимпульс (рис. 2.13,a), спектральная плотность которого [см. (2.64)]

$$\mathbf{S}(\Omega)=A\tau_и\,\frac{\sin(\Omega\tau_и/2)}{\Omega\tau_и/2}. \tag{3.13}$$

Огибающая амплитуда радиоимпульса $a(t)$ $A(t)=k_{\text{ам}}s(t)$, а спектральная плотность этой огибающей

$$\mathbf{S}_A(\Omega)=k_{\text{ам}}A\tau_и\,\frac{\sin(\Omega\tau_и/2)}{\Omega\tau_и/2}=2B\,\mathrm{sinc}\,(\Omega\tau_и/2). \tag{3.13'}$$

По формуле (3.9) (с учетом $\theta_0=0$)

$$\mathbf{S}_a(\omega)=B\,\mathrm{sinc}[(\omega-\omega_0)\tau_и/2]+B\,\mathrm{sinc}[(\omega+\omega_0)\tau_и/2],$$

$$\omega_0\tau_и\gg 1. \tag{3.14}$$

В рассмотренном примере колебание несущей частоты при $s(t)=0$ отсутствовало. Если же несущее колебание $A_0\cos\omega_0 t$ существует на всем интервале времени [другими словами, в огибающую входит постоянный уровень A_0, см. (3.4)], то сплошной спектр $\mathbf{S}_a(\omega)$ должен быть дополнен дискретными составляющими $\pi A_0\delta(\omega-\omega_0)+\pi A_0\delta(\omega+\omega_0)$ [см. (2.95)].

3.4. УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ. ФАЗА И МГНОВЕННАЯ ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЯ

Для немодулированного колебания

$$a(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)=A_0\cos\psi(t)$$

набег фазы за какой-либо конечный промежуток времени (t_1, t_2) равен

$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=(\omega_0 t_2+\theta_0)-(\omega_0 t_1+\theta_0)=\omega_0(t_2-t_1). \tag{3.15}$$

Отсюда видно, что при постоянной угловой частоте набег фазы за какой-либо промежуток времени пропорционален длительности этого промежутка.

С другой стороны, если известно, что набег фазы за время t_2-t_1 равен $\psi(t_2)-\psi(t_1)$, то угловую частоту можно определить как отношение

$$\omega_0=[\psi(t_2)-\psi(t_1)]/(t_2-t_1), \tag{3.16}$$

если, конечно, имеется уверенность, что в течение рассматриваемого промежутка времени частота сохраняла постоянное значение.

Из (3.16) видно, что угловая частота есть не что иное, как скорость изменения фазы колебания.

Переходя к колебанию, частота которого может изменяться во времени, равенства (3.15), (3.16) необходимо заменить интегральным и дифференциальным соотношениями

$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\omega(t)\,dt, \tag{3.17}$$

$$\omega(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}. \tag{3.18}$$

В этих выражениях $\omega(t)=2\pi f(t)$ — мгновенная угловая частота колебания; $f(t)$ — мгновенная частота.

Согласно выражениям (3.17), (3.18) полную фазу высокочастотного колебания в момент t можно определить как

$$\psi(t)=\int_0^t\omega(t)\,dt+\theta_0, \tag{3.19}$$

где первое слагаемое в правой части определяет набег фазы за время от начала отсчета до рассматриваемого момента t; θ_0 — начальная фаза колебания (в момент $t=0$).

При таком подходе фазу $\psi(t)=\omega_0 t+\theta(t)$, фигурирующую в выражении (3.1), следует заменить на $\psi(t)=\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0$.

Итак, общее выражение для высокочастотного колебания, амплитуда которого постоянна, т. е. $A(t)=A_0$, а угол $\theta(t)$ модулирован, можно представить в форме

$$a(t)=A_0\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0]. \tag{3.20}$$

Соотношения (3.18), (3.19), устанавливающие связь между изменениями частоты и фазы, указывают на общность двух разновидностей угловой модуляции — частотной и фазовой.

Поясним соотношения (3.18) — (3.20) на примере простейшей гармонической ЧМ, когда по закону модулирующего сигнала изменяется мгновенная частота:

$$\omega(t)=\omega_0+\omega_д\cos\Omega t, \tag{3.21}$$

где $\omega_д=2\pi f_д$ представляет собой амплитуду частотного отклонения и называется девиацией частоты. Через ω_0 и Ω, как и при АМ, обозначены несущая и модулирующая частоты.

Составим выражение для модулированного колебания, частота которого изменяется по закону (3.21), а амплитуда постоянна.

Подставляя в (3.19) $\omega(t)$ из уравнения (3.21), получаем

$$\psi(t)=\int_0^t(\omega_0+\omega_д\cos\Omega t)\,dt+\theta_0.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\psi(t)=\omega_0 t+(\omega_д/\Omega)\sin\Omega t+\theta_0. \qquad (3.22)$$

Таким образом,

$$a(t)=A_0\cos[\omega_0 t+(\omega_д/\Omega)\sin\Omega t+\theta_0]. \qquad (3.23)$$

Фаза колебания $a(t)$ наряду с линейно возрастающим слагаемым $\omega_0 t$ содержит еще периодическое слагаемое $(\omega_д/\Omega)\sin\Omega t$. Это позволяет рассматривать $a(t)$ как колебание, модулированное по фазе. Закон этой модуляции является интегральным по отношению к закону изменения частоты. Именно модуляция частоты по закону $\omega_д\cos\Omega t$ приводит к модуляции фазы по закону $(\omega_д/\Omega)\sin\Omega t$. Амплитуду изменения фазы

$$\theta_{max}=\omega_д/\Omega=m \qquad (3.24)$$

часто называют *индексом угловой модуляции*.

Рассмотрим теперь ФМ, когда под действием модулирующего сигнала фаза стабильного по частоте несущего колебания изменяется по закону $\theta(t)=\theta_{max}\sin\Omega t$, так что модулированное колебание имеет вид

$$a(t)=A_0\cos[\omega_0 t+\theta_{max}\sin\Omega t+\theta_0]. \qquad (3.23')$$

Какова частота этого колебания? Используя выражение (3.18), находим

$$\omega(t)=\frac{d}{dt}\,(\omega_0 t+\theta_{max}\sin\Omega t+\theta_0)=\omega_0+\theta_{max}\Omega\cos\Omega t. \qquad (3.21')$$

Учитывая соотношение (3.24), приходим к выводу, что $\theta_{max}\Omega=\omega_д$. Таким образом, гармоническая модуляция фазы с индексом θ_{max} эквивалентна частотной модуляции с девиацией частоты $\omega_д=\theta_{max}\Omega$.

Из приведенного примера видно, что при гармонической угловой модуляции по характеру колебания нельзя заключить, с какой модуляцией мы имеем дело — с частотной или фазовой. В обоих случаях вектор OA, изображающий на векторной диаграмме модулированное колебание, качается относительно своего исходного положения таким образом, что угол θ (рис. 3.7) изменяется во времени по закону $\theta(t)=\theta_{max}\sin\Omega t$ при фазовой модуляции и по закону $\theta(t)=(\omega_д/\Omega)\sin\Omega t$ при частотной модуляции [когда $\omega(t)-\omega_0=\omega_д\times\cos\Omega t$]. Цифрами I, II, III и IV отмечено положение вектора OA при $\Omega t=0$, $\pi/2$, π и $3\pi/2$.

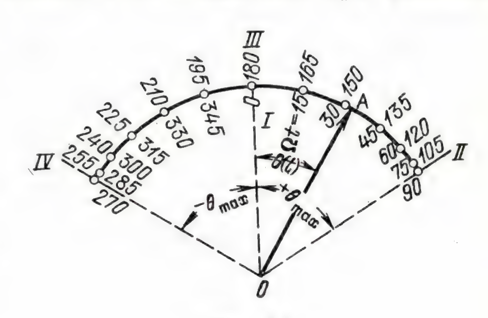


Рис. 3.7

Иное положение при негармоническом модулирующем сигнале. В этом случае вид модуляции—

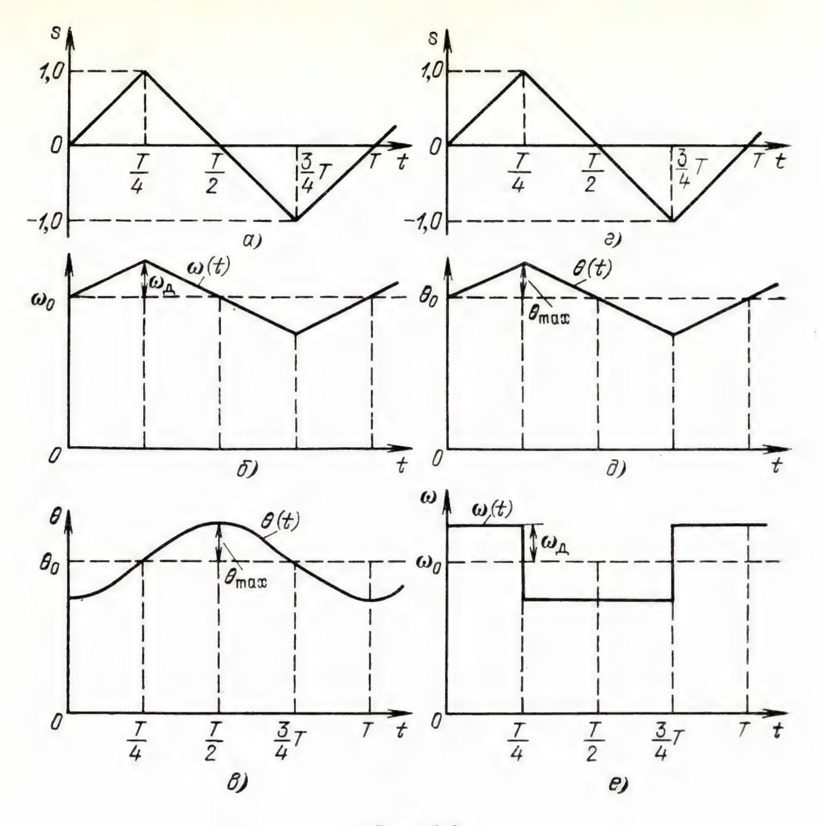


Рис. 3.8

частотной или фазовой — можно установить непосредственно по характеру изменения частоты и фазы во времени.

Покажем это на примере треугольного модулирующего сигнала (рис. 3.8,*а* и *г*). Очевидно, что треугольное изменение $\omega(t)$ (рис. 3.8,*б*), по форме совпадающее с $s(t)$, свидетельствует о наличии ЧМ, а такое же изменение $\theta(t)$ (рис. 3.8,*д*) — о наличии ФМ. Ясно также, что скачкообразное изменение $\omega(t)$, совпадающее по форме с производной сигнала $s(t)$ (рис. 3.8,*е*), указывает на ФМ.

При гармоническом модулирующем сигнале различие между ЧМ и ФМ можно выявить, только изменяя частоту модуляции.

При ЧМ величина $\omega_д$ пропорциональна амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω.

При ФМ величина θ_{max} пропорциональна амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω.

Эти положения поясняются рис. 3.9, на котором показаны частотные характеристики величин $\omega_д$ и θ_{max} при частотной и фазовой модуляциях. В обоих случаях предполагается, что на вход модулятора подается модулирующее напряжение с неиз-

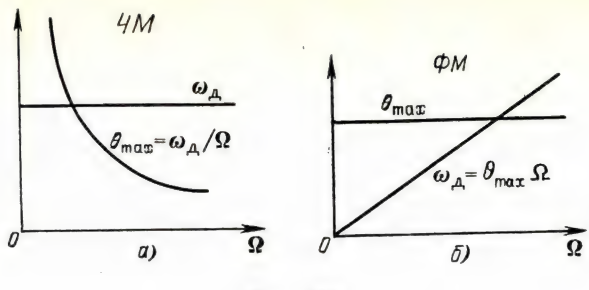


Рис. 3.9

менной амплитудой U, а частота Ω изменяется от Ω_{min} до Ω_{max}.

При ЧМ $\omega_д$, зависящая, как указывалось выше, только от амплитуды U, будет постоянной величиной, а индекс модуляции $m=\omega_д/\Omega=\theta_{max}$ с увеличением частоты будет убывать (рис. 3.9,*а*). При ФМ θ_{max} не зависит от Ω, а $\omega_д=\theta_{max}\Omega=m\Omega$ изменяется пропорционально частоте модуляции (рис. 3.9,*б*).

Кроме структуры колебания (при модуляции сложным сигналом) частотная и фазовая модуляции различаются и способом осуществления. При ЧМ обычно применяется прямое воздействие на частоту колебаний автогенератора. При ФМ генератор имеет стабильную частоту, а фаза колебания модулируется в одном из последующих элементов устройства.

3.5. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть задано колебание

$$a(t)=A_0\cos[\omega_0 t+\theta(t)], \tag{3.25}$$

о котором известно, что передаваемое сообщение $s(t)$ заложено в функцию $\theta(t)$. Если колебание $a(t)$ получено с помощью ФМ, то $\theta(t)$ и $s(t)$ полностью совпадают по форме и отличаются лишь постоянным коэффициентом. При этом, очевидно, с точностью до постоянного коэффициента совпадают и спектры функций $\theta(t)$ и $s(t)$.

При ЧМ функция $\theta(t)$ является интегралом от передаваемого сообщения $s(t)$. Это вытекает из выражений (3.19) и (3.20). Так как интегрирование является линейным преобразованием, то при ЧМ спектр функции $\theta(t)$ состоит из тех же компонентов, что и спектр сообщения $s(t)$, но с измененными амплитудами и фазами.

Отвлекаясь от конкретной разновидности угловой модуляции — фазовой или частотной — и считая заданным спектр функции $\theta(t)$, находим спектр модулированного колебания $a(t)$. Для этого выражение (3.25) преобразуем к виду

$$a(t)=A_0\cos\theta(t)\cos\omega_0 t - A_0\sin\theta(t)\sin\omega_0 t = a_c(t) - a_s(t). \tag{3.26}$$

Из (3.26) следует, что модулированное по углу колебание можно рассматривать как сумму двух *квадратурных* колебаний: *косинусного* $a_c(t)=A_0\cos\theta(t)\cos\omega_0 t$ и *синусного* $a_s(t)=$ $=A_0\sin\theta(t)\sin\omega_0 t$, каждое из которых модулировано только по амплитуде; закон АМ для косинусного колебания определяется медленной функцией $\cos\theta(t)$, а синусного — функцией $\sin\theta(t)$. Но в § 3.3 было установлено, что для определения спектра амплитудно-модулированного колебания достаточно сдвинуть на частоту ω_0 спектр огибающей амплитуд. Следовательно, для нахождения спектра колебания $a(t)$, определяемого выражением (3.26), необходимо сначала найти спектры функций $\cos\theta(t)$ и $\sin\theta(t)$, т. е. спектры огибающих квадратурных колебаний. Перенос этих спектров на частоту ω_0 можно затем осуществить таким же образом, как и при обычной АМ.

Из приведенных рассуждений следует, что при одном и том же передаваемом сообщении спектр колебания, модулированного по углу, значительно сложнее, чем спектр модулированного по амплитуде. Действительно, так как $\cos\theta(t)$ и $\sin\theta(t)$ являются нелинейными функциями своего аргумента $\theta(t)$, спектры этих функций могут существенно отличаться от спектра функции $\theta(t)$; возможно возникновение кратных и комбинационных частот, как это имеет место при обычных нелинейных преобразованиях спектра.

Это обстоятельство, а также наличие двух квадратурных слагаемых показывают, что при угловой модуляции спектр модулированного колебания нельзя получить простым сдвигом спектра сообщения на величину несущей частоты ω_0, как это имеет место при АМ. При угловой модуляции связь между спектрами сообщения и модулированного колебания оказывается более сложной.

3.6. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Используем полученные выше результаты для анализа колебания вида

$$a(t)=A_0\cos(\omega_0 t+m\sin\Omega t). \qquad (3.25')$$

Это выражение совпадает с (3.23) и (3.23′) при модуляции частоты по закону $\omega(t)=\omega_0+\omega_д\cos\Omega t$. Начальная фаза θ_0, а также начальная фаза модулирующей функции γ опущены для упрощения выкладок. При необходимости они легко могут быть введены в окончательные выражения.

В данном случае $\theta(t)=m\sin\Omega t$. Подставляя $\theta(t)$ в (3.26), получаем

$$a(t)=A_0\cos(m\sin\Omega t)\cos\omega_0 t - A_0\sin(m\sin\Omega t)\sin\omega_0 t. \qquad (3.27)$$

Учитывая, что функции $\cos(m\sin\Omega t)$ и $\sin(m\sin\Omega t)$ являются периодическими, разложим их в ряд Фурье.

В теории бесселевых функций доказываются следующие соотношения:

$$\sin(m\sin\Omega t) = 2J_1(m)\sin\Omega t + 2J_3(m)\sin 3\Omega t + \\ + 2J_5(m)\sin 5\Omega t + \ldots, \qquad (3.28)$$

$$\cos(m\sin\Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\Omega t + \\ + 2J_4(m)\cos 4\Omega t + \ldots, \qquad (3.29)$$

$$\sin(m\cos\Omega t) = 2J_1(m)\cos\Omega t - 2J_3(m)\cos 3\Omega t + \\ + 2J_5(m)\cos 5\Omega t - \ldots, \qquad (3.28')$$

$$\cos(m\cos\Omega t) = J_0(m) - 2J_2(m)\cos 2\Omega t + \\ + 2J_4(m)\cos 4\Omega t - \ldots \qquad (3.29')$$

Здесь $J_n(m)$ — бесселева функция первого рода n-го порядка от аргумента m.

С помощью соотношений (3.28) и (3.29) уравнение (3.27) можно привести к виду

$$a(t) = A_0[J_0(m)\cos\omega_0 t - 2J_1(m)\sin\Omega t\sin\omega_0 t + \\ + 2J_2(m)\cos 2\Omega t\cos\omega_0 t - 2J_3(m)\sin 3\Omega t\sin\omega_0 t + \ldots] \qquad (3.30)$$

или в более развернутой форме

$$a(t) = A_0\cos(\omega_0 t + m\sin\Omega t) = A_0\{J_0(m)\cos\omega_0 t + \\ + J_1(m)[\cos(\omega_0+\Omega)t - \cos(\omega_0-\Omega)t] + J_2(m)[\cos(\omega_0+ \\ + 2\Omega)t + \cos(\omega_0-2\Omega)t] + J_3(m)[\cos(\omega_0+3\Omega)t - \\ - \cos(\omega_0-3\Omega)t] + \ldots\}. \qquad (3.31)$$

Таким образом, при гармонической угловой модуляции спектр колебания состоит из бесконечного числа боковых составляющих, расположенных попарно симметрично относительно несущей, частоты которых отличаются от ω_0 на $n\Omega$, где n — любое целое число. Амплитуда n-й боковой составляющей $A_n = J_n(m)A_0$, где A_0 — амплитуда несущего колебания, а m — индекс модуляции. Отсюда следует, что вклад различных боковых составляющих в суммарную мощность модулированного колебания определяется величиной m.

Рассмотрим режимы угловой модуляции при малых и больших значениях m. Если $m \ll 1$, то имеют место приближенные равенства

$$\sin(m\sin\Omega t) \approx m\sin\Omega t, \quad \cos(m\sin\Omega t) \approx 1$$

и выражение (3.27) переходит в следующее:

$$a(t) \approx A_0(\cos\omega_0 t - m\sin\Omega t\sin\omega_0 t) = \\ = A_0\left[\cos\omega_0 t + \frac{m}{2}\cos(\omega_0+\Omega)t - \frac{m}{2}\cos(\omega_0-\Omega)t\right]. \qquad (3.32)$$

Сравним это уравнение с уравнением для амплитудно-модулированного колебания, у которого модулирующая функция (т. е. передаваемое сообщение) такая же, как и при ЧМ. Так как выражение (3.32) получено из (3.25′) для модуляции частоты по закону $\omega(t)=\omega_0+\omega_д\cos\Omega t$, для удобства сравнения зададим модуляцию амплитуды по аналогичному закону $A(t)=A_0+MA_0\cos\Omega t$. Тогда амплитудно-модулированное колебание запишется в форме

$$a_{ам}(t)=A_0(1+M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t=$$
$$=A_0\left[\cos\omega_0 t+\frac{M}{2}\cos(\omega_0+\Omega)t+\frac{M}{2}\cos(\omega_0-\Omega)t\right]. \qquad (3.33)$$

Из сравнения (3.32) и (3.33) видно, что при малых значениях m спектр колебания при ЧМ, как и при АМ, состоит приближенно из гармоник несущей частоты ω_0 и двух боковых частот: верхней $\omega_0+\Omega$ и нижней $\omega_0-\Omega$. Единственное отличие заключается в фазировке колебаний боковых частот относительно несущего колебания. При АМ фазы колебаний боковых частот симметричны относительно фазы несущего колебания, а при угловой модуляции фаза колебания нижней боковой частоты сдвинута на 180° [знак минус перед последним слагаемым (3.32)]. Это положение иллюстрируется векторной диаграммой, показанной на рис. 3.10,*а*. Направление вектора DC_2 при АМ обозначено штриховой линией. Изменение направления этого вектора на 180° приводит к тому, что вектор модуляции DF становится перпендикулярным направлению вектора OD, изображающего несущее колебание. Вектор OF, изображающий результирующее колебание, изменяется как по фазе, так и по амплитуде; однако при $m=\theta_{max}\ll 1$ амплитудные изменения настолько малы, что ими можно пренебречь и модуляцию можно в первом приближении рассматривать как чисто угловую.

Спектральная диаграмма для угловой модуляции при $m\ll 1$ показана на рис. 3.10,*б*. Равенство амплитуд колебаний боковых частот сохраняется, а фаза колебания нижней частоты сдвинута

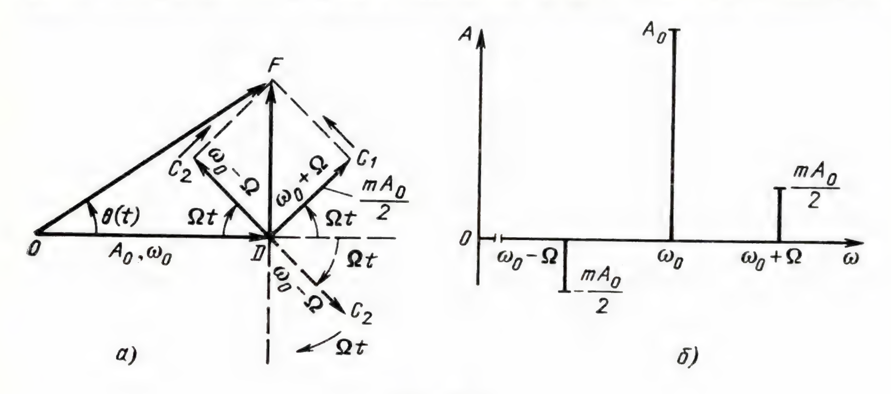


Рис. 3.10

на 180 . Амплитуды колебаний боковых частот равны $mA_0/2$, и поэтому в данном случае индекс модуляции m совпадает по значению с коэффициентом M, характеризующим глубину изменения амплитуды при AM.

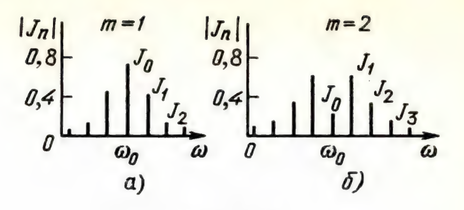


Рис. 3.11

Заметим, что ширина спектра при $m \ll 1$ равна 2Ω, как и при AM. Этот результат показывает, что при очень малой величине $\omega_д$ (по сравнению с Ω) ширина спектра от $\omega_д$ не зависит.

При увеличении фазового отклонения, т. е. при возрастании m, уравнение (3.32) и диаграмма на рис. 3.10,*а* не дают правильного представления о действительной картине явлений при частотной или фазовой модуляции. Это объясняется тем, что с помощью колебаний несущей частоты и всего лишь одной пары боковых частот невозможно представить колебание, частота или фаза которого изменяется в широких пределах, а амплитуда остается строго постоянной. Для получения правильной картины необходимо учитывать колебания боковых частот более высоких порядков в соответствии с выражением (3.31).

При значениях индексов m от 0,5 до 1 приобретает некоторое значение вторая пара колебаний боковых частот, вследствие чего ширина спектра должна быть приравнена 4Ω. Далее, при $1 < m < 2$ приходится учитывать третью и четвертую пары колебаний боковых частот и т. д.

На рис. 3.11,*а* приведена спектральная диаграмма для $m = 1$, а на рис. 3.11,*б* — для $m = 2$. Фазы колебаний на этих рисунках не учитываются, однако следует иметь в виду, что при нечетных n амплитуды колебаний нижних боковых частот имеют знак минус. Амплитуды всех составляющих спектра представлены на этих рисунках в виде вертикальных отрезков, длины которых равны $J_n(m)$, а расстояния от отрезка $J_0(m)$, соответствующего амплитуде колебания частоты ω_0, равны $n\Omega$, где Ω — частота модуляции, а n — порядковый номер боковой частоты. Амплитуда результирующего колебания принята за 100%, т. е. $A_0 = 1$.

Рассмотрим теперь спектр при больших значениях m. Прежде всего отметим, что нахождение спектра с помощью таблиц бесселевых функций в этом случае весьма затруднительно. В области относительно низких порядков $n \ll m$ справедливо приближенное равенство [4, с. 223]

$$J_n(m) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos(m - n\pi/2 - \pi/4),$$

из которого следует, что в указанной области нормированная к A_0 огибающая амплитуд колебаний боковых частот $|J_n(m)| \leqslant \sqrt{2/\pi m}$. Например, при $m = 100$ и $n \ll m$ $|J_n(m)| \leqslant 0{,}08$.

В области же значений n, близких к m, при $m \gg 1$ можно воспользоваться формулой Фока[1]

$$J_n(m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} |\nu(x)| = 0{,}71\, m^{-1/3} |\nu(x)|,$$

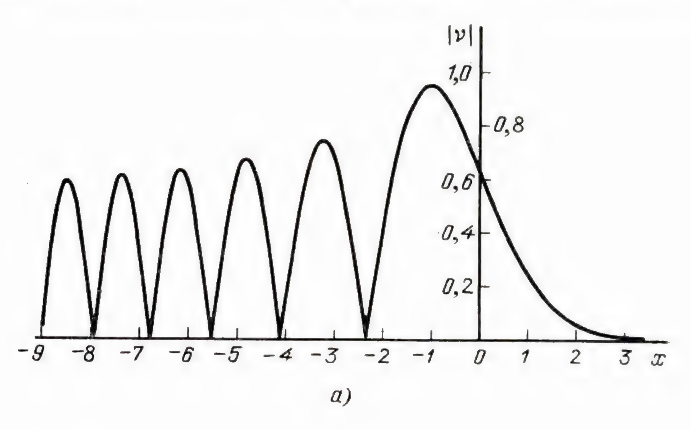
где $x = (n-m)(m/2)^{-1/3}$; $\nu(x)$ — функция Эйри.

В частном случае $m = 100$ эта формула принимает вид

$$|J_n(m)| = 0{,}153 |\nu(x)|.$$

График функции $|\nu(x)|$ при изменении x в интервале (—9,3), построенный по таблице Фока, приведен на рис. 3.12,*а*.

Нормированный спектр в диапазоне боковых частот, вписанный в этот график как в огибающую, представлен на рис. 3.12,*б*. Это участок характеризует спектр модулированного колебания вблизи его верхней границы (в данном примере при $n = 70 \ldots 110$). Из этого рисунка видно, что наивысший номер $n = n_{\max}$ боковой частоты, которым можно ограничиться при



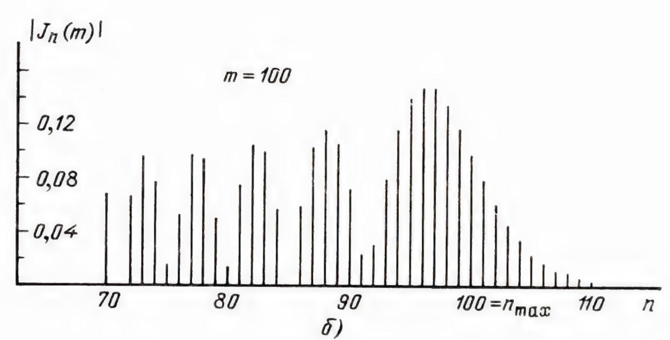


Рис. 3.12

[1] **Фок В. А.** Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.— 470 с.

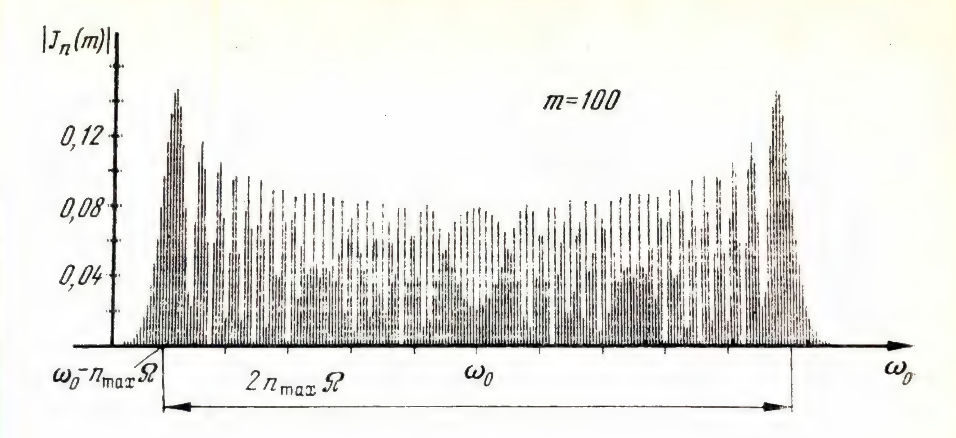


Рис. 3.13

определении ширины спектра, в данном примере $n_{max} \approx m = 100$. Иными словами, вклад гармоник более высоких боковых частот $(n > m)$ в среднюю мощность модулированного колебания ничтожно мал.

Полная структура спектра (при $m = 100$) показана на рис. 3.13. Ширина этого спектра, очевидно, равна $2n_{max}\Omega = 2m\Omega$. Но $m = \omega_д/\Omega$, следовательно, при больших индексах угловой модуляции ширина спектра близка к удвоенной девиации частоты

$$2n_{max}\Omega = 2\omega_д. \qquad (3.34)$$

Заметим, что в соответствии с определением индекса модуляции $m = \theta_{max}$ [см. (3.24)] выражение «угловая модуляция с малым индексом» эквивалентно выражению «узкополосная или быстрая модуляция» а выражение «угловая модуляция с большим индексом» эквивалентно выражению «широкополосная или медленная модуляция». Поэтому можно сформулировать следующее положение: при быстрой угловой модуляции (когда $\Omega \gg \omega_д$) ширина спектра модулированного колебания близка к значению 2Ω; при медленной угловой модуляции (когда $\omega_д \gg \Omega$) ширина спектра близка к значению $2\omega_д = m2\Omega$, т. е. при заданной частоте модуляции Ω ширина спектра в m раз больше, чем при быстрой угловой модуляции. Отсюда становятся понятными термины узкополосная (при $m \ll 1$) и широкополосная (при $m \gg 1$) модуляции. Напомним, что в обоих случаях модулированное колебание является узкополосным, т. е. ширина его спектра много меньше величины несущей частоты.

Аналогичным методом может быть найден спектр ЧМ- или ФМ-колебания при модуляции суммой гармоник двух тонов с частотами Ω_1 и Ω_2. В этом случае спектр содержит помимо составляющих с частотами $\omega_0 \pm n\Omega_1$ и $\omega_0 \pm n\Omega_2$ еще и составляющие, появляющиеся в результате взаимодействия гармоник мо-

дулирующей функции, с частотами $\omega_0 \pm n\Omega_1 \pm m\Omega_2$. В этом смысле в отличие от АМ процесс образования боковых частот может быть назван нелинейным.

3.7. СПЕКТР РАДИОИМПУЛЬСА С ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

При модуляции частоты колебания по закону, отличающемуся от гармонического, нахождение спектра колебания усложняется. Выбор наиболее удобного метода анализа зависит от характера модулирующей функции. Покажем это на примере широко применяемого в различных радиосистемах сигнала — радиоимпульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-импульса). Подобный сигнал с прямоугольной огибающей изображен на рис. 3.14,*а*, а закон изменения частоты заполнения импульса — на рис. 3.14,*б*.

Закон изменения частоты определяется выражением

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad |t| \leqslant T_c/2, \tag{3.35}$$

где $|\beta| = 2\omega_д/T_c = 2 \cdot 2\pi f_д/T_c$ — скорость линейного изменения частоты внутри импульса. Тогда мгновенное значение колебания, представленного на рис. 3.14,*а*, можно записать в виде

$$a(t) = A_0 \cos\left(\int \omega(t)\, dt\right) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta t^2/2), \quad |t| \leqslant T_c/2. \tag{3.36}$$

Произведение полной девиации частоты на длительность импульса

$$2f_д T_c = m \tag{3.37}$$

является основным параметром ЛЧМ-импульса. Напомним, что в § 2.11 аналогичный параметр $N = 2f_m T_c$ был назван базой сигнала. Поскольку $f_д$ определяет ширину спектра рассматриваемого сигнала, параметр m можно трактовать как базу ЛЧМ-импульса.

Определение спектральной плотности радиоимпульса (3.36) более удобно с помощью преобразования Фурье (2.38):

$$\mathbf{S}_a(\omega) = A_0 \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \cos(\omega_0 t + \beta t^2/2)\, e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \exp\{i[\beta t^2/2 - (\omega - \omega_0)t]\}\, dt +$$

$$+ \frac{A_0}{2} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \exp\{-i[\beta t^2/2 + (\omega + \omega_0)t]\}\, dt. \tag{3.38}$$

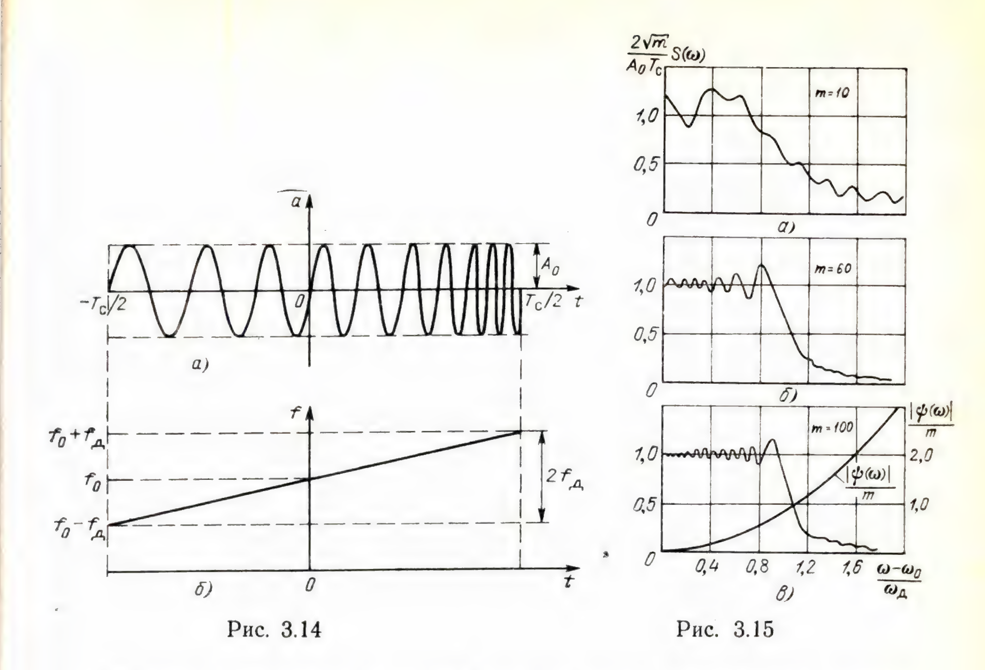


Рис. 3.14 Рис. 3.15

Первое слагаемое в правой части этого выражения определяет всплеск спектральной плотности вблизи частоты $\omega=\omega_0$, а второе — всплеск вблизи частоты $\omega=-\omega_0$.

При определении $\mathbf{S}_a(\omega)$ в области $\omega>0$ второе слагаемое можно отбросить [см. (3.10)]. Для вычисления первого интеграла в правой части (3.38) дополним показатель степени в подынтегральной функции до квадрата разности (считаем $\beta>0$):

$$\beta t^2/2-\Omega t=(\sqrt{\beta/2}\,t-d)^2-d^2, \tag{3.39}$$

где $\Omega=\omega-\omega_0$; $d=\Omega/\sqrt{2\beta}$.

Подставляя (3.39) в (3.38) и переходя к новой переменной

$$x=\sqrt{\beta/\pi}\,t-\Omega/\sqrt{\beta\pi},$$

получаем

$$\mathbf{S}_a(\omega)=\frac{A_0}{2}\,e^{-id^2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\int\limits_{-u_1}^{u_2} e^{i\pi x^2/2}dx, \tag{3.40}$$

где пределы интегрирования $u_{1,2}=\sqrt{m/2}\,(1\pm\Omega/\omega_д)$.

Используем известные из математики определения интегралов Френеля:

$$Z(u)=\int\limits_0^u e^{i\pi x^2/2}dx=\int\limits_0^u \cos(\pi x^2/2)\,dx+i\int\limits_0^u \sin(\pi x^2/2)\,dx=$$

$$=C(u)+iS(u).$$

Тогда (3.40) можно привести к виду

$$\mathrm{S}_a(\omega)=\frac{A_0T_c}{2\sqrt{2m}}\exp\left[-i\frac{\pi m(\omega-\omega_0)^2}{4\omega^2_д}\right][Z(u_1)+Z(u_2)]. \qquad (3.41)$$

Выражения для модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) найденного спектра имеют соответственно вид

$$S_a(\omega)=\frac{A_0T_c}{2\sqrt{2m}}\sqrt{[C(u_1)+C(u_2)]^2+[S(u_1)+S(u_2)]^2}, \qquad (3.42)$$

$$\psi(\omega)=-\frac{m\pi(\omega-\omega_0)^2}{4\omega^2_д}+\operatorname{arctg}\frac{S(u_1)+S(u_2)}{C(u_1)+C(u_2)}. \qquad (3.43)$$

Графики АЧХ спектра ЛЧМ-импульса (рис. 3.15, *а, б, в*) показывают, что при больших базах m форма $S_a(\omega)$ приближается к прямоугольной и ширина спектра близка к величине $2\omega_д$. При этом ФЧХ приобретает вид квадратичной параболы (рис. 3.15, *в*). Второе слагаемое в (3.43), стремящееся к постоянной величине $\pi/4$, опущено. При $\omega=\omega_0$ и $m\gg1$ квадратный корень в (3.42) обращается в $\sqrt{2}$, а $\mathrm{S}_a(\omega_0)=A_0T_c/2\sqrt{m}$.

При уменьшении m пульсации АЧХ спектра и плавный переход на граничных участках становятся более заметными ($m=60$ на рис. 3.15, *б*). При малых базах форма АЧХ спектра существенно отличается от прямоугольной ($m=10$ на рис. 3.15, *а*).

3.8. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Обобщим выражения (3.25) и (3.26), заменив в них постоянную амплитуду A_0 функцией времени $A(t)$:

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0t+\theta(t)]=A(t)\cos\theta(t)\cos\omega_0t-A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0t=$$
$$=a_c(t)-a_s(t). \qquad (3.44)$$

Как и в § 3.5 и 3.6, определение спектра колебания сводится к нахождению спектров функций $A_c(t)=A(t)\cos\theta(t)$ и $A_s(t)=A(t)\sin\theta(t)$, т. е. огибающих квадратурных колебаний, и к последующему сдвигу этих спектров на величину ω_0.

Обозначим спектральные плотности функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$ символами $\mathrm{S}_{A_c}(\omega)$ и $\mathrm{S}_{A_s}(\omega)$. Тогда

$$\mathrm{S}_{A_c}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t)\cos\theta(t)\,e^{-i\omega t}dt,$$
$$\mathrm{S}_{A_s}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t)\sin\theta(t)\,e^{-i\omega t}dt. \qquad (3.45)$$

Спектральная плотность косинусного квадратурного колебания $a_c(t)=$ $=A_c(t)\cos\omega_0t$ в соответствии с выражением (2.51) при $\theta_0=0$ будет

$$\mathrm{S}_{a_c}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{S}_{A_c}(\omega-\omega_0)+\mathrm{S}_{A_c}(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (3.46)$$

При определении спектра синусного квадратурного колебания $a_s(t) = A_s(t)\sin\omega_0 t$ фазовый угол θ_0 в (2.51) следует приравнять —90°. Следовательно,

$$\mathbf{S}_{a_s}(\omega) = -\frac{i}{2}\left[\mathbf{S}_{A_s}(\omega-\omega_0) - \mathbf{S}_{A_s}(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (3.46')$$

В области положительных частот можно пренебречь вторыми слагаемыми в выражениях (3.46) и (3.46′).

Таким образом, окончательно спектральная плотность колебания $a(t) = a_c(t) - a_s(t)$ определяется выражением

$$\mathbf{S}_a(\omega) = \mathbf{S}_{a_c}(\omega) - \mathbf{S}_{a_s}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{S}_{A_c}(\omega-\omega_0) + i\mathbf{S}_{A_s}(\omega-\omega_0)\right],\ \omega > 0. \qquad (3.47)$$

Переходя к переменной $\Omega = \omega - \omega_0$, получаем

$$\mathbf{S}_a(\omega_0+\Omega) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{S}_{A_c}(\Omega) + i\mathbf{S}_{A_s}(\Omega)\right]. \qquad (3.48)$$

Структура спектра колебания $a(t)$ при амплитудно-частотной модуляции зависит от соотношения и вида функций $A(t)$ и $\theta(t)$.

При АМ спектр колебания $a(t)$ характеризуется полной симметрией амплитуд и фаз колебаний боковых частот относительно несущего колебания; при угловой модуляции $[A(t) = A_0 = \text{const}]$ фазы колебаний нижних боковых частот при нечетных n сдвинуты на 180° (см. § 3.6). Одновременная модуляция по амплитуде и углу может при некоторых соотношениях между $A(t)$ и $\theta(t)$ приводить к асимметрии спектра $\mathbf{S}_a(\omega_0+\Omega)$ относительно ω_0 не только по фазам, но и по амплитудам. В частности, если $\theta(t)$ является нечетной функцией t, то при любой функции $A(t)$ спектр колебания $a(t)$ несимметричен.

Пример подобного спектра представлен на рис. 3.16. По отношению к точке $\omega = 0$ модуль спектральной плотности симметричен при любых условиях.

Для симметрии спектра $\mathbf{S}_a(\omega)$ требуется четность функции $\theta(t)$ при одновременном условии, чтобы функция $A(t)$ была либо четной, либо нечетной функцией t. Если функция $A(t)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих, то спектр $\mathbf{S}_a(\omega)$ несимметричен даже при четной функции $\theta(t)$. Например, ЛЧМ-импульс, рассмотренный в § 3.7, имеет симметричный спектр. В этом случае прямоугольная огибающая при надлежащем выборе начала отсчета времени является функцией, четной относительно t, как и функция $\theta(t) = \beta t^2/2$.

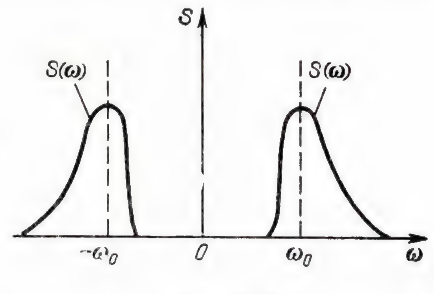


Рис. 3.16

Наглядное представление о деформации спектра колебания при смешанной модуляции — амплитудной и угловой — можно получить, рассмотрев случай, когда обе модуляции осуществляются гармонической функцией с одной и той же частотой Ω. Для

упрощения анализа зададим эту функцию в виде гармонического колебания $\cos\Omega t$ для угловой модуляции и в виде $\cos\Omega t$ или $\sin\Omega t$ для амплитудной.

1. Обе функции, как $A(t)$, так и $\theta(t)$, четные относительно t:

$$A(t)=A_0(1+M\cos\Omega t),\ M\leqslant 1;$$

$$\theta(t)=m\cos\Omega t,\ m\ll 1.$$

Выражение (3.44) принимает вид

$$a(t)=A_0(1+M\cos\Omega t)\cos[\omega_0 t+m\cos\Omega t].$$

Полагая, как и в § 3.6, справедливыми приближенные равенства $\cos(m\cos\Omega t)\approx 1$ и $\sin(m\cos\Omega t)\approx m\cos\Omega t$, приводим это выражение к виду, аналогичному (3.32):

$$a(t)=A_0\left[(1+M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t-m\left(\frac{M}{2}+\cos\Omega t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{M}{2}\cos 2\Omega t\right)\sin\omega_0 t\right]=A_0\left\{\cos\omega_0 t-\frac{mM}{2}\sin\omega_0 t+\right.$$

$$+\frac{M}{2}[\cos(\omega_0+\Omega)t+\cos(\omega_0-\Omega)t]-\frac{m}{2}[\sin(\omega_0+\Omega)t+\sin(\omega_0-\Omega)t]-$$

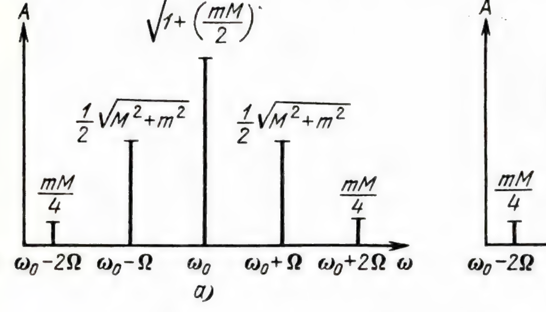
$$\left.-\frac{mM}{4}[\sin(\omega_0+2\Omega)t+\sin(\omega_0-2\Omega)t]\right\}.$$

Суммируя квадратурные составляющие $\cos\omega_0 t$ и $(mM/2)\sin\omega_0 t$, получаем для амплитуды результирующего колебания на частоте ω_0 следующее выражение: $\sqrt{1+(mM/2)^2}$ при $A_0=1$. Аналогичным образом находим амплитуду $0{,}5\sqrt{m^2+M^2}$ для колебаний с частотами $\omega_0\pm\Omega$. Амплитуды колебаний с частотами $\omega_0\pm 2\Omega$ равны $mM/4$. Спектр колебания $a(t)$, представленный на рис. 3.17, *а*, симметричен.

2. Функция $\theta(t)$ — четная, а $A(t)$ содержит четную и нечетную составляющие:

$$A(t)=A_0(1+M\sin\Omega t),\ \theta(t)=m\cos\Omega t,\ M\leqslant 1,\ m\ll 1.$$

Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к следующим результатам: амплитуда равна 1 на частоте ω_0; $(M+m)/2$ на частоте $\omega_0-\Omega$; $(M-m)/2$ на частоте $\omega_0+\Omega$ и $mM/4$ на частотах $\omega_0\pm 2\Omega$. Спектр колебания



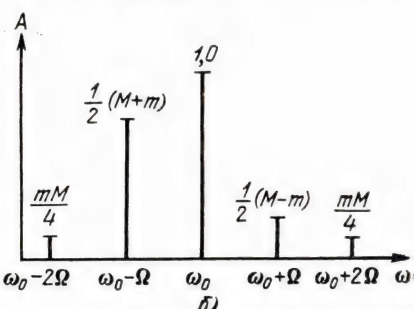


Рис. 3.17

для рассматриваемого случая представлен на рис. 3.17, *б*. Симметрия спектра нарушается в данном примере из-за неодинаковых амплитуд колебаний первой пары боковых частот.

Асимметрия спектра при амплитудно-угловой модуляции может рассматриваться как показатель неправильной работы устройства, осуществляющего АМ; перекос спектра указывает на то, что полезная АМ сопровождается паразитной угловой модуляцией.

3.9. ОГИБАЮЩАЯ, ФАЗА И ЧАСТОТА УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

Рассмотренные в предыдущих параграфах модулированные колебания являются лишь простейшими видами радиосигналов. Часто приходится иметь дело с радиосигналами, получаемыми в результате одновременной модуляции амплитуды и частоты (или фазы) по очень сложному закону.

В любом случае предполагается, что заданный сигнал $a(t)$ представляет собой узкополосный процесс. Это означает, что все спектральные составляющие сигнала группируются в относительно узкой по сравнению с некоторой центральной частотой ω_0 полосе.

При представлении подобных сигналов в форме

$$a(t)=A(t)\cos\psi(t) \tag{3.49}$$

возникает неоднозначность в выборе функций $A(t)$ и $\psi(t)$, так как при любой функции $\psi(t)$ всегда можно удовлетворить уравнению (3.49) надлежащим выбором функции $A(t)$.

Так, простейшее (гармоническое) колебание

$$a(t)=A_0\cos\omega_0 t \tag{3.50}$$

можно представить в форме

$$a(t)=A(t)\cos\omega t, \tag{3.50'}$$

где $\omega=\omega_0+\Delta\omega$.

В выражении (3.50′) огибающая $A(t)$ в отличие от A_0 является функцией времени, которую можно определить из условия сохранения заданной функции $a(t)$

$$A_0\cos\omega_0 t=A(t)\cos(\omega_0+\Delta\omega)t,$$

откуда

$$A(t)=\frac{A_0\cos\omega_0 t}{\cos(\omega_0+\Delta\omega)t}=\frac{A_0\cos\omega_0 t}{\cos\Delta\omega t\cos\omega_0 t-\sin\Delta\omega t\sin\omega_0 t}=$$

$$=\frac{A_0}{\cos\Delta\omega t-\sin\Delta\omega t\cdot\operatorname{tg}\omega_0 t}. \tag{3.51}$$

Из этого примера видно, что при нерациональном выборе $\psi(t)$ (ωt вместо $\omega_0 t$) очень усложнилось выражение для $A(t)$, причем эта новая функция $A(t)$ по существу не является «оги-

бающей» в общепринятом смысле, так как она может пересекать кривую $a(t)$ (вместо касания в точках, где $a(t)$ имеет максимальное значение). Оперирование подобной «огибающей» не имеет смысла, а в некоторых случаях и недопустимо, так как может привести к ошибочным практическим выводам (например, при рассмотрении работы амплитудного детектора).

Неопределенности можно избежать при представлении $A(t)$ и $\psi(t)$ с помощью соотношений

$$A(t)=\sqrt{a^2(t)+a_1^2(t)}, \quad \psi(t)=\operatorname{arctg}[a_1(t)/a(t)], \qquad (3.52), (3.53)$$

где $a_1(t)$ — новая функция, связанная с исходной соотношениями

$$a_1(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \quad a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \qquad (3.54), (3.55)$$

Эти соотношения называются **преобразованиями Гильберта**, а функция $a_1(t)$ — функцией, сопряженной (по Гильберту) с исходной функцией $a(t)$.

Для выяснения смысла выражений (3.52), (3.53), а также требования, чтобы $a_1(t)$ являлась функцией, сопряженной по Гильберту с исходной функцией $a(t)$, рассмотрим сначала некоторые свойства $A(t)$, вытекающие непосредственно из выражения (3.52) и справедливые при любой функции $a_1(t)$.

Прежде всего мы видим, что в точках, где функция $a_1(t)$ равна нулю, имеет место равенство $A(t)=a(t)$.

Дифференцируя (3.52), получаем

$$A\frac{dA}{dt}=a\frac{da}{dt}+a_1\frac{da}{dt}.$$

Отсюда видно, что при $a_1=0$, когда $A(t)=a(t)$, имеет место дополнительное равенство

$$\frac{dA}{dt}=\frac{da}{dt}.$$

Следовательно, в точках, в которых $a_1(t)=0$, кривые $A(t)$ и $a(t)$ имеют общие касательные.

Этих условий, однако, еще недостаточно для того, чтобы можно было рассматривать $A(t)$ как «простейшую» огибающую быстро осциллирующей функции $a(t)$. Необходимо потребовать, чтобы кривая $A(t)$ касалась кривой $a(t)$ в точках, в которых последняя имеет амплитудное или достаточно близкое к нему значение. Иными словами, в точках, где $a_1(t)$ обращается в нуль, функция $a(t)$ должна принимать значения, близкие к амплитудным. Это условие как раз и обеспечивается, если функция $a_1(t)$ является сопряженной по Гильберту с функцией $a(t)$. Это свойство преобразований Гильберта нагляднее всего иллюстрируется на примере гармонического сигнала.

Пусть $a(t)=\cos\omega_0 t$, $-\infty<t<\infty$. Найдем сопряженную

функцию $a_1(t)$. Применяя общее выражение (3.54) и переходя к новой переменной $x=\tau - t$, находим

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0\tau}{\tau - t}\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0 x}{x}\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_0 x}{x}\,dx.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

(в смысле главного значения) и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Следовательно, функции $a(t)=\cos\omega_0 t$ соответствует сопряженная функция $a_1(t)=\sin\omega_0 t$, которая проходит через нуль в моменты, когда исходная функция проходит через максимум. Аналогичным образом нетрудно убедиться, что функции $a(t)=\sin\omega_0 t$, $-\infty<t<\infty$, соответствует сопряженная функция $a_1(t)=-\cos\omega_0 t$.

Подставляя $a(t)=\cos\omega_0 t$ и $a_1(t)=\sin\omega_0 t$ в выражение (3.52), получаем для огибающей гармонического колебания общепринятое выражение $A(t)=\sqrt{\cos^2\omega_0 t+\sin^2\omega_0 t}=1$.

Аналогичный результат получается и для $a(t)=\sin\omega_0 t$, $a_1(t)=-\cos\omega_0 t$.

Как видим, выражение (3.52) определяет огибающую в виде линии, касательной к исходной функции в точках ее максимума и в случае гармонического колебания соединяющей два соседних максимума кратчайшим путем. Таким образом, выражение (3.52) определяет «простейшую» огибающую. Это свойство выражения (3.52) сохраняется и для сложного сигнала, если выполняется условие медленности изменения огибающей, т. е. если речь идет об узкополосном сигнале (см. § 3.1).

Если исходный сигнал представляет собой сумму спектральных составляющих

$$a(t)=\sum_n(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t), \tag{3.56}$$

то сопряженная функция

$$a_1(t)=\sum(a_n\sin\omega_n t-b_n\cos\omega_n t). \tag{3.57}$$

Ряд (3.57) называется рядом, сопряженным с рядом (3.56).

Если сигнал $a(t)$ представлен не рядом (3.64), а интегралом Фурье

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]\,d\omega, \qquad (3.58)$$

то функция $a_1(t)$ может быть представлена в виде интеграла

$$a_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [a(\omega)\sin\omega t-b(\omega)\cos\omega t]\,d\omega, \qquad (3.59)$$

сопряженного с интегралом (3.58).

Нетрудно установить связь между спектрами функций $a(t)$ и $a_1(t)$. Так как при преобразовании гармонического колебания по Гильберту его амплитуда остается неизменной, то очевидно, что по модулю спектральная плотность $\mathbf{S}_1(\omega)$ сопряженной функции $a_1(t)$ не может отличаться от спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ исходной функции $a(t)$. Фазовая же характеристика спектра $\mathbf{S}_1(\omega)$ отличается от ФЧХ спектра $\mathbf{S}(\omega)$. Из сопоставления выражений (3.58) и (3.59) непосредственно вытекает, что спектральные составляющие функции $a_1(t)$ отстают по фазе на 90° от соответствующих составляющих функции $a(t)$. Следовательно, при $\omega>0$ спектральные плотности $\mathbf{S}_1(\omega)$ и $\mathbf{S}(\omega)$ связаны соотношением

$$\mathbf{S}_1(\omega)=-i\mathbf{S}(\omega),\ \omega>0. \qquad (3.60)$$

В области отрицательных частот соответственно получается

$$\mathbf{S}_1(\omega)=iS(\omega),\ \omega<0. \qquad (3.61)$$

Вследствие изменения ФЧХ сопряженная функция $a_1(t)$ по своей форме может очень отличаться от исходной функции $a(t)$.

После того как найдена сопряженная функция $a_1(t)$, можно с помощью выражений (3.52), (3.53) найти огибающую $A(t)$, полную фазу $\psi(t)$ и мгновенную частоту узкополосного сигнала

$$\omega(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}\frac{a_1(t)}{a(t)}\right]=\frac{a(t)\,a_1'(t)-a_1(t)\,a'(t)}{a^2(t)+a_1^2(t)}. \qquad (3.62)$$

Чтобы представить (3.49) в форме

$$a(t)=A(t)\cos\psi(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0],\ -\infty<t<\infty,$$

необходимо под ω_0 подразумевать среднее значение функции $\omega(t)$, определяемой (3.62). Тогда приходим к выражению

$$\psi(t)=\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0, \qquad (3.63)$$

в котором $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно зависящего от времени. Тем самым устраняется произвол в выборе «средней частоты» сигнала ω_0 и соответственно функции $\theta(t)$.

В заключение следует отметить, что в некоторых случаях выражения (3.52)—(3.61) используют и для широкополосных сигналов, когда понятие «огибающая амплитуд» теряет свой обычный смысл. При этом отказываются от требования, чтобы огибающая $A(t)$ касалась кривой $a(t)$ вблизи точек, в которых $a(t)$ имеет амплитудное значение.

Поясним применение преобразования Гильберта для определения огибающей, фазы и мгновенной частоты сигнала.

Пусть задан сигнал в виде суммы двух гармонических колебаний с близкими частотами[1]

$$a(t)=A_1\cos\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t \qquad (3.64)$$

и требуется представить $a(t)$ в форме

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0]. \qquad (3.65)$$

Расстройка $|\Delta\omega|=|\omega_2-\omega_1|$ полагается настолько малой по сравнению с $(\omega_1+\omega_2)/2$, что колебание $a(t)$ можно считать узкополосным.

Что в данном случае подразумевать под $A(t)$, ω_0 и $\theta(t)$? Непосредственно из выражения (3.64) трудно выявить структуру огибающей и фазы результирующего колебания $a(t)$. Поэтому используем выражения (3.52) и (3.53). Сопряженная функция имеет вид

$$a_1(t)=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t.$$

С помощью формулы (3.52) находим огибающую сигнала $a(t)$

$$A(t)=\sqrt{(A_1\cos\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t)^2+(A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t)^2}=$$
$$=A_1\sqrt{1+k^2+2k\cos\Delta\omega t}, \qquad (3.66)$$

где $k=A_2/A_1$; $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$, причем для определенности считаем, что $k<1$ и $\Delta\omega>0$.

Полную фазу сигнала $a(t)$ находим по формуле (3.53):

$$\psi(t)=\operatorname{arctg}\frac{a_1(t)}{a(t)}=\operatorname{arctg}\frac{\sin\omega_1 t+k\sin\omega_2 t}{\cos\omega_1 t+k\cos\omega_2 t}. \qquad (3.67)$$

Применяя (3.62), можно получить следующее выражение для мгновенной частоты:

$$\omega(t)=\omega_1+\Delta\omega\eta(t), \qquad (3.68)$$

где

$$\eta(t)=k\frac{k+\cos\Delta\omega t}{1+k^2+2k\cos\Delta\omega t}. \qquad (3.69)$$

Так как постоянная составляющая функции $\eta(t)$ равна нулю, входящие в выражение (3.63) средняя частота ω_0 и функция $\theta(t)$ будут

$$\omega_0=\omega_1, \quad \theta(t)=\Delta\omega\int\limits_0^t \eta(x)\,dx. \qquad (3.70),\ (3.71)$$

[1] Для сокращения выкладок положим начальные фазы $\theta_1=\theta_2=0$.

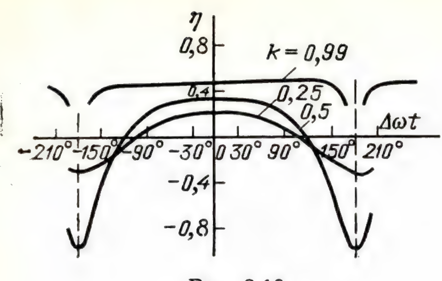


Рис. 3.18

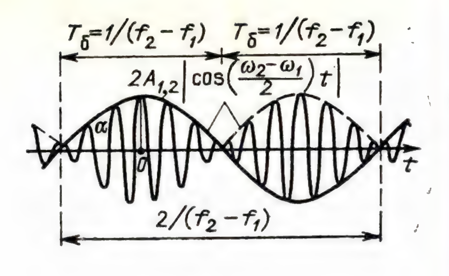


Рис. 3.19

Итак, на основании (3.66), (3.68) — (3.71) выражение (3.65) приводится к виду

$$a(t)=A_1\sqrt{1+k^2+2k\cos\Delta\omega t}\cos\left[\omega_1 t+\Delta\omega\int_0^t\eta(x)\,dx\right]. \qquad (3.72)$$

Графики функции $\eta(t)$, характеризующие изменение частоты, приведены на рис. 3.18 для некоторых значений k.

При $k\ll 1$, т. е. при наложении слабого колебания $A_2\cos\omega_2 t$ на сильное $A_1\cos\omega_1 t$, выражения (3.66)—(3.69) значительно упрощаются:

$$A(t)\approx A_1(1+k\cos\Delta\omega t),\ \omega(t)\approx\omega_1+k\Delta\omega\cos\Delta\omega t,$$

$$\psi(t)\approx\omega_1 t+k\sin\Delta\omega t. \qquad (3.73)$$

В этом случае огибающая, частота и фаза заданного сигнала изменяются по гармоническому закону с частотой $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$ относительно своих средних значений соответственно A_1, ω_1 и $\omega_1 t$.

С увеличением k закон изменения $\omega(t)$ на интервале $|\Delta\omega t|\leqslant\pi$ усложняется. Так, при $k=0{,}5$ $\eta(t=\pi/\Delta\omega)=-1$, т. е. отклонение $\omega(t)$ от частоты ω_1 достигает наибольшей возможной величины, равной $\Delta\omega$ (см. рис. 3.18).

При значениях k, близких к единице, по формуле (3.69)

$$\eta(t)\approx\frac{1+\cos\Delta\omega t}{2(1+\cos\Delta\omega t)}=1/2. \qquad (3.74)$$

Таким образом, на протяжении почти всего интервала частота суммарного колебания $\omega_1+\Delta\omega/2=(\omega_1+\omega_2)/2$.

Этот результат можно получить непосредственно из выражения (3.64), которое при $A_1=A_2$ подстановкой $\omega_2=\omega_0+\Delta\omega_0$, $\omega_1=\omega_0-\Delta\omega_0$ легко приводится к виду

$$a(t)=2A_{1,2}\cos\Delta\omega_0 t\cos\omega_0 t=2A_{1,2}\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right).$$

График колебания $a(t)$ при $k=1$ представлен на рис. 3.19. Период функции $\cos\Delta\omega_0 t=\cos 2\pi\frac{f_2-f_1}{2}t$ равен $2/(f_2-f_1)$, причем в точках пере-

хода через нуль эта функция, как отмечалось выше, меняет свой знак. Если не учитывать перемену знака, т. е. определять огибающую амплитуд функцией $\left|\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t\right|$, то период биений будет вдвое короче, как это показано на рис. 3.19. Поэтому частота биений равна $f_2 - f_1$.

Формулы (3.66)—(3.74) имеют важное прикладное значение, так как в технике часто приходится иметь дело с биениями двух гармонических колебаний.

3.10. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

При анализе воздействия гармонического колебания на линейную систему его принято представлять в комплексной форме, что позволяет использовать преимущества методов теории функций комплексной переменной. В конце анализа осуществляется переход к тригонометрической форме путем отбрасывания мнимой части

$$a(t) = \mathrm{Re}[\mathbf{A}_0 e^{i\omega_0 t}] = \mathrm{Re}[A_0 e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}] = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

где $\mathbf{A}_0 = A_0 e^{i\theta_0}$ — комплексная амплитуда.

В современной радиотехнике представление колебаний в комплексной форме распространено на негармонические колебания.

Если задан физический сигнал в виде действительной функции $a(t)$, то соответствующий ему комплексный сигнал представляется в форме

$$z_a(t) = a(t) + i a_1(t), \tag{3.75}$$

где $a_1(t)$ — функция, сопряженная по Гильберту с сигналом $a(t)$.

Заметим, что мнимая часть комплексной формы гармонического колебания является функцией, сопряженной по Гильберту с ее действительной частью.

Главная особенность определенного таким образом комплексного сигнала заключается в том, что его спектральная плотность

$$\mathbf{Z}_a(\omega) = \mathbf{S}_a(\omega) + i\mathbf{S}_{a1}(\omega) \tag{3.76}$$

содержит только положительные частоты. Действительно, согласно (3.60), (3.61) при $\omega > 0$ $\mathbf{S}_{a1}(\omega) = -i\mathbf{S}_a(\omega)$, а при $\omega < 0$, $\mathbf{S}_{a1}(\omega) = i\mathbf{S}_a(\omega)$.

Следовательно,

$$\mathbf{Z}_a(\omega) = \begin{cases} 2\mathbf{S}_a(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \tag{3.77}$$

Так, если узкополосному сигналу $a(t)$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}_a(\omega)$, модуль которой изображен на рис. 3.20 штриховой линией, то сигналу $z_a(t)=a(t)+ia_1(t)$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{Z}_a(\omega)$, модуль которой изображен на том же рисунке сплошной линией.

Интеграл Фурье для сигнала $z_a(t)$ принимает следующий вид:

$$z_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \mathbf{Z}_a(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty 2\mathbf{S}_a(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega, \qquad (3.78)$$

где $\mathbf{S}_a(\omega)$ — спектральная плотность исходного (физического) сигнала $a(t)$.

Комплексный сигнал, определяемый выражениями (3.75) и (3.76), называется **аналитическим сигналом**[1].

Пусть задан физический сигнал

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]=A(t)\cos\psi(t)$$

и требуется определить соответствующий ему аналитический сигнал $z_a(t)$. Исходя из общего выражения (3.54) для сопряженной функции $a_1(t)$ можно написать

$$z_a(t)=A(t)\cos\psi(t)-\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\tau)\cos\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

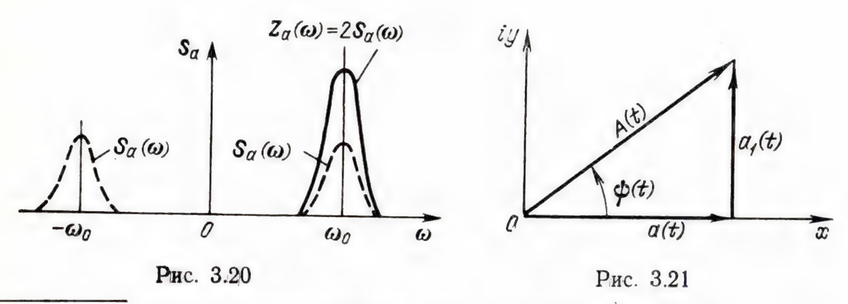


Рис. 3.20 Рис. 3.21

[1] Смысл термина «аналитический сигнал» заключается в том, что при переходе к переменной $t=x+iy$ функция $z_a(t)=z_a(x+iy)$, определяемая в соответствии с (3.78) интегралом $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty 2\mathbf{S}_a(\omega)\,e^{-\omega y}e^{i\omega x}d\omega$, является аналитической функцией для каждого $y>0$. Для доказательства определим энергию сигнала $z_a(x+iy)$ с помощью равенства Парсеваля

$$Э_z=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty[2\mathbf{S}_a(\omega)\,e^{-\omega y}]^2\,d\omega\leqslant 2Э_a.$$

Как видим, множитель $e^{-2\omega y}$ обеспечивает сходимость интеграла при любом $y>0$, поскольку $\omega>0$. В случае же действительного сигнала $a(t)$ переход к $a(x+iy)$ приводит к бесконечному возрастанию множителя $e^{-2\omega y}$ в области $\omega<0$. Иными словами, аналитичность сигнала обусловлена тем, что в области $\omega<0$ спектральная плотность функции $z_a(t)$ равна нулю.

Точное определение $a_1(t)$ при сложной функции $A(\tau)\cos\psi(\tau)$ является трудной задачей, которую можно обойти, если исходный сигнал $a(t)$ является достаточно узкополосным процессом. Можно показать, что в этом случае

$$a_1(t)=A(t)\sin\psi(t)=A(t)\sin[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0].$$

Таким образом, аналитический сигнал можно записать в следующем виде:

$$z_a(t)=A(t)\,e^{i\psi(t)}=A(t)\,e^{i[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0]}=\mathbf{A}(t)\,e^{i\omega_0 t}, \tag{3.79}$$

где

$$\mathbf{A}(t)=A(t)\,e^{i[\theta(t)+\theta_0]} \tag{3.80}$$

представляет собой комплексную огибающую узкополосного сигнала.

Соотношения между $A(t)$, $a(t)$ и $a_1(t)$ иллюстрируются векторной диаграммой на рис. 3.21. Модуль комплексной огибающей, равный $A(t)$ [поскольку $|e^{i[\theta(t)+\theta_0]}|=1$ при любом законе изменения $\theta(t)$], содержит информацию только об амплитудной модуляции колебания, а фазовый множитель $e^{i\theta(t)}$ — только об угловой модуляции. В целом же произведение $A(t)e^{i\theta(t)}$ содержит полную информацию о сигнале $a(t)$ (за исключением несущей частоты ω_0, которая предполагается известной).

Это свойство комплексной огибающей, позволяющее при анализе узкополосных сигналов исключить из рассмотрения частоту ω_0, придает важное значение понятию «аналитический сигнал».

Рассмотрим основные свойства аналитического сигнала и комплексной огибающей.

1. Произведение аналитического сигнала $z_a(t)$ на сопряженный с ним сигнал $z_a^*(t)$ равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала $a(t)$.

Действительно,

$$z_a(t)z_a^*(t)=[a(t)+ia_1(t)][a(t)-ia_1(t)]=a^2(t)+a_1^2(t)=$$
$$=A^2(t). \tag{3.81}$$

Таким образом, модуль аналитического сигнала $z_a(t)$ равен просто огибающей сигнала $A(t)$.

2. Спектральная плотность комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ совпадает со смещенной на ω_0 влево спектральной плотностью аналитического сигнала $z_a(t)$.

Основываясь на общей формуле (2.38), можно написать

$$\mathbf{Z}_a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} z_a(t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Подставляя в это выражение $z_a(t)=\mathbf{A}(t)e^{i\omega_0 t}$, получаем

$$\mathbf{Z}_a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(t)\,e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt=\mathbf{S}_A(\omega-\omega_0),\ \ \omega>0. \tag{3.82}$$

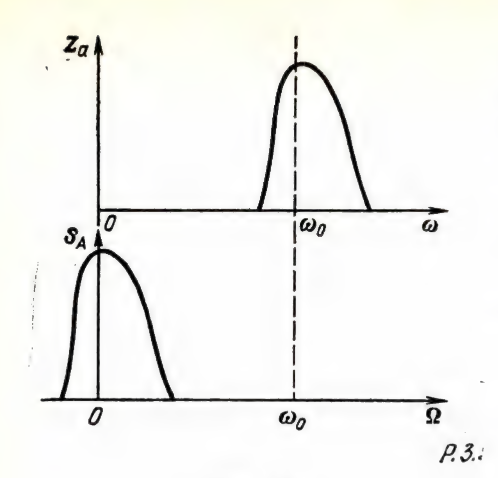


Рис. 3.22

Это соотношение является обобщением формулы (2.50) на случай комплексной функции времени $\mathbf{A}(t)$. Выражение (3.9), выведенное для вещественной огибающей $A(t)$ (при чисто амплитудной модуляции), является частным случаем общего выражения (3.82).

Введя обозначение $\omega-\omega_0=\Omega$, перепишем (3.82) в несколько иной форме

$$\mathbf{Z}_a(\omega_0+\Omega)=\mathbf{S}_A(\Omega)= =2\mathbf{S}_a(\omega_0+\Omega) \qquad (3.83)$$

[см. (3.77)].

Соотношение между спектрами $\mathbf{S}_A(\Omega)$ и $\mathbf{Z}_a(\omega_0+\Omega)$ иллюстрирует рис. 3.22. Особо следует отметить, что спектр $\mathbf{S}_A(\Omega)$ комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ не обязательно симметричен относительно нулевой частоты (см. рис. 3.22). Если спектр $\mathbf{S}_a(\omega)$ физического колебания $a(t)$ несимметричен относительно $\omega=\omega_0$, как это может иметь место, например, при амплитудно-угловой модуляции (см. § 3.8), то и функция $\mathbf{Z}_a(\omega)=2\mathbf{S}_a(\omega)$, $\omega>0$, несимметрична: после сдвига $\mathbf{Z}_a(\omega)$ на величину ω_0 влево спектр комплексной огибающей $\mathbf{S}_A(\Omega)$ будет несимметричен относительно частоты $\Omega=0$. В любом случае функция $\mathbf{S}_A(\Omega)$ отлична от нуля в области частот $\Omega<0$. Следовательно, комплексная функция $\mathbf{A}(t)$ не является аналитическим сигналом. Это объясняется тем, что действительная и мнимая части $\mathbf{A}(t)$ не являются функциями, сопряженными по Гильберту.

3. Корреляционная функция аналитического сигнала, определяемая общим выражением

$$B_z(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} z_a(t)\,z^*_a(t+\tau)\,dt, \qquad (3.84)$$

является комплексной.

Действительно, выразив $B_z(\tau)$ через модуль спектральной плотности сигнала $\mathbf{S}_a(\omega)$ с помощью выражения вида (2.122), получим

$$B_z(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} Z^2{}_a(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega=4\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} S^2{}_a(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega=$$

$$=4\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} S^2{}_a(\omega)\cos\omega\tau d\omega+i4\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} S^2{}_a(\omega)\sin\omega\tau d\omega. \qquad (3.85)$$

Действительная часть этого выражения есть не что иное, как удвоенная корреляционная функция исходного физического колебания $a(t)$, т. е. $2B_a(\tau)$, а мнимая часть учитывает взаимную корреляцию колебаний $a(t)$ и $a_1(t)$.

Для раскрытия смысла мнимой части выражения (3.85) вернемся к общему определению корреляционной функции (3.84) и запишем ее в форме

$$B_z(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}[a(t)+ia_1(t)][a(t+\tau)-ia_1(t+\tau)]\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}a(t)\,a(t+\tau)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}a_1(t)\,a_1(t+\tau)\,dt+$$

$$+i\left[\int_{-\infty}^{\infty}a_1(t)\,a(t+\tau)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}a(t)\,a_1(t+\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=B_a(\tau)+B_{a_1}(\tau)+i\,[B_{a_1a}(\tau)-B_{aa_1}(\tau)]. \qquad (3.85')$$

В § 2.14 было установлено, что корреляционная функция действительного сигнала зависит только от модуля спектральной плотности. Так как модули спектров функций $a(t)$ и $a_1(t)$ одинаковы (см. § 3.9), первые два интеграла в (3.85′) равны и в сумме дают $2B_a(\tau)$. Следовательно, мнимые части в выражениях (3.85), (3.85′) совпадают и можно написать следующее равенство:

$$B_{a_1a}(\tau)-B_{aa_1}(\tau)=4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}S_a^{\,2}(\omega)\sin\omega\tau d\omega.$$

Но в соответствии с (2.118) $B_{aa_1}(\tau)=B_{a_1a}(-\tau)$, так что левую часть можно записать в форме $B_{a_1a}(\tau)-B_{a_1a}(-\tau)$. Далее, правая часть, содержащая под интегралом множитель $\sin\omega\tau$, является нечетной функцией τ, откуда следует, что и разность $B_{a_1a}(\tau)-B_{aa_1}(\tau)$ является нечетной функцией. Это возможно только при нечетности функции $B_{a_1a}(\tau)$. Таким образом, приходим к равенству $B_{a_1a}(\tau)-B_{aa_1}(\tau)=2B_{a_1a}(\tau)$ и соответственно к соотношению

$$B_{a_1a}(\tau)=2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}S_a^2(\omega)\sin\omega\tau d\tau.$$

Формулу (3.85′) теперь можно представить в виде

$$B_z(\tau)=2B_a(\tau)+i2B_{a_1a}(\tau). \qquad (3.86)$$

Итак, $\mathrm{Re}[B_z(\tau)]=2B_a(\tau)$, откуда вытекает полезное соотношение между корреляционной функцией $B_a(\tau)$ исходного действительного сигнала и корреляционной функцией $B_z(\tau)$ аналитического сигнала

$$B_a(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[B_z(\tau)]. \tag{3.87}$$

4. Корреляционные функции аналитического сигнала и комплексной огибающей этого сигнала связаны между собой соотношением

$$B_z(\tau)=e^{-i\omega_0\tau}B_A(\tau). \tag{3.88}$$

Действительно, подставив в (3.84) $z_a(t)=\mathbf{A}(t)e^{i\omega_0 t}$ и $z_a^*(t)=\mathbf{A}^*(t)e^{-i\omega_0 t}$, получим важное соотношение

$$B_z(\tau)=e^{-i\omega_0\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*(t+\tau)\,dt, \tag{3.89}$$

в котором интеграл есть *корреляционная функция комплексной огибающей* $\mathbf{A}(t)$. Поэтому выражение (3.87) можно записать в форме

$$B_a(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[e^{-i\omega_0\tau}B_A(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*(t+\tau)\,dt\right]. \tag{3.87'}$$

В частности, при $\tau=0$

$$B_a(0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}A^2(t)\,dt=\frac{1}{2}B_z(0). \tag{3.90}$$

Из этого выражения видно, что, поскольку $B_a(0)=Э$, энергия аналитического сигнала равна удвоенной энергии исходного действительного сигнала.

Следует указать, что применение понятия энергии к комплексной функции имеет не только формальный смысл. В гл. 13 будет показано, что в некоторых устройствах обработки сигналов приходится иметь дело с совокупностью двух функций времени, сопряженных по Гильберту, т. е. с аналитическим сигналом как с физическим процессом.

Формирование аналитического сигнала можно пояснить на простой модели, показанной на рис. 3.23. Исходный сигнал $a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$ подается на выход непосредственно по прямому каналу и через фазосдвигающее устройство, обеспечивающее сдвиг на $-90°$ для всех спектральных составляющих узкополосного сигнала $a(t)$. В результате такого сдвига получается колебание $A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)-90°]=A(t)\sin[\omega_0 t+\theta(t)]=a_1(t)$, сопряженное по Гильберту с функцией $a(t)$. Следова-

$$a(t) \rightarrow a(t),\quad \varphi=-90^\circ \rightarrow a_1(t),\quad z_a(t)=a(t)+ia_1(t)$$

Рис. 3.23

тельно, совокупность $a(t)$ и $a_1(t)$, действующую на выходе, можно трактовать как аналитический сигнал

$$z_a(t)=A(t)e^{i\theta(t)}e^{i\omega_0 t}=\mathbf{A}(t)e^{i\omega_0 t}.$$

В последующих главах будут даны примеры применения понятия «аналитический сигнал» как для упрощения анализа прохождения через радиоцепи действительных сигналов, так и для описания совокупности двух квадратурных сигналов.

3.11. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

При нахождении корреляционной функции модулированного колебания $a(t)=A(t)\cos\psi(t)$ будем исходить из условия абсолютной интегрируемости функции $a(t)$ (сигнал с конечной энергией), что позволяет применять определение (2.115)

$$B_a(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} a(t)\,a(t+\tau)\,dt. \tag{3.91}$$

Вычисление интеграла для сложных сигналов требует громоздких выкладок. Задача существенно упрощается при переходе от колебания $a(t)$ к аналитическому сигналу $z_a(t)=\mathbf{A}(t)e^{i\omega_0 t}$. Основываясь на соотношениях, выведенных в предыдущем параграфе, рассмотрим сначала чисто амплитудную модуляцию, когда $a(t)=A(t)\cos\omega_0 t$, $\theta(t)=0$ и, следовательно, $\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}^*(t)=$ $=A(t)$.

Тогда формула (3.87′) принимает вид

$$B_a(\tau)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0\tau}\int_{-\infty}^{\infty} A(t)\,A(t+\tau)\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\int_{-\infty}^{\infty} A(t)\,A(t+\tau)\,dt. \tag{3.92}$$

Обозначив, как и в выражении (3.87′), интегральный множитель через $B_A(\tau)$, окончательно получим

$$B_a(\tau)=B_A(\tau)\,(^1/_2\cos\omega_0\tau). \tag{3.93}$$

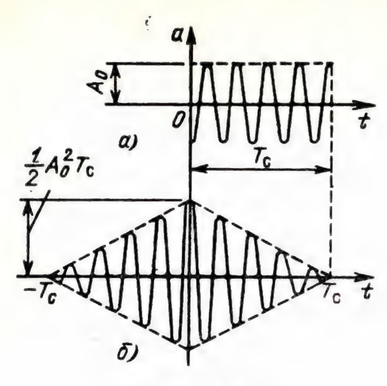


Рис. 3.24

Второй множитель ($\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$) есть корреляционная функция гармонического колебания с частотой ω_0 и единичной амплитудой.

Итак, корреляционная функция амплитудно-модулированного радиосигнала равна произведению корреляционных функций огибающей и высокочастотного заполнения.

В качестве примера на рис. 3.24, *а* показан радиоимпульс с прямоугольной огибающей, а на рис. 3.24, *б* — соответствующая этому импульсу корреляционная функция. Следует отметить, что эта функция не зависит от начальной фазы заполнения радиоимпульса, а ее огибающая совпадает с корреляционной функцией прямоугольного видеоимпульса (см. § 2.14, рис. 2.29, *г*).

Для иллюстрации применения общего выражения (3.89) к амплитудно-частотной модуляции найдем корреляционную функцию импульса, изображенного на рис. 3.14, *а*.

При обозначениях формулы (3.36) и рис. 3.14 аналитический сигнал запишется в виде

$$z_a(t)=A_0 e^{i\beta t^2/2}e^{i\omega_0 t},\ -T_c/2\leqslant t\leqslant T_c/2. \qquad (3.94)$$

Используя формулы (3.64) и (3.87′), получаем

$$B_a(\tau)=\frac{A^2_0}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-T_c/2}^{T_c/2-\tau} e^{i[\omega_0 t+\beta t^2/2]}e^{-i[\omega_0(t+\tau)+\beta(t+\tau)^2/2]}dt. \qquad (3.95)$$

С помощью несложных преобразований выражение (3.95) приводится к виду

$$B_a(\tau)=\begin{cases}\dfrac{A^2_0\sin\left(\dfrac{\beta T_c}{2}\tau-\dfrac{\beta\tau^2}{2}\right)\cos\omega_0\tau}{\beta\tau} & \text{при } |\tau|\leqslant\dfrac{T_c}{2},\\ 0 & \text{при } |\tau|>T_c/2.\end{cases} \qquad (3.96)$$

Используя введенный в § 3.7 параметр m [см. (3.37)] и учитывая, что $\beta T^2_c=2\omega_д T_c=2\pi m$, приводим выражение (3.96) к более общему виду

$$B_a(\tau)=\frac{1}{2}A^2_0 T_c\frac{\sin\left[\pi m\dfrac{\tau}{T_c}\left(1-\dfrac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\dfrac{\pi m\tau}{T_c}}\cos\omega_0\tau. \qquad (3.96')$$

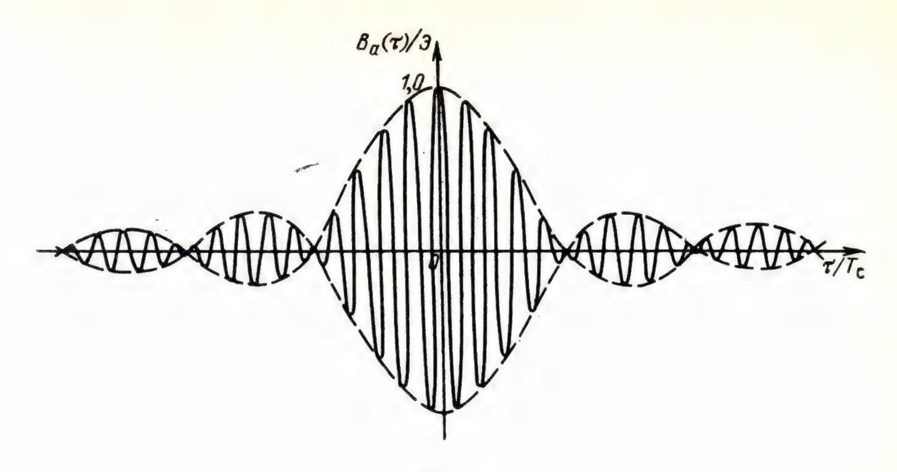


Рис. 3.25

Множитель $^1/_2 A_0 T_c = B_a(0) = Э$ равен полной энергии рассматриваемого радиоимпульса (как и при импульсе с постоянной частотой заполнения, см. рис. 3.24, *б*).

Таким образом,

$$\frac{B_a(\tau)}{B_a(0)} = \frac{B_a(\tau)}{Э} = \frac{\sin\left[\frac{\pi m \tau}{T_c}\left(1 - \frac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\frac{\pi m \tau}{T_c}} \cos \omega_0 \tau. \tag{3.97}$$

График этой функции построен на рис. 3.25 для параметра $m = 100$ в предположении, что $\omega_0 T_c$ очень велико (масштаб выбран произвольно). Огибающая корреляционной функции образует весьма острый пик (при $m \gg 1$), а частота заполнения постоянна и равна центральной частоте ω_0 исходного радиоимпульса.

Рассмотренный здесь сигнал с большой базой m и его корреляционная функция представляют большой практический интерес для современной радиотехники.

Глава 4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

4.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Информация, передаваемая по каналу связи или извлекаемая в результате измерения, заключена в сигнале. До приема

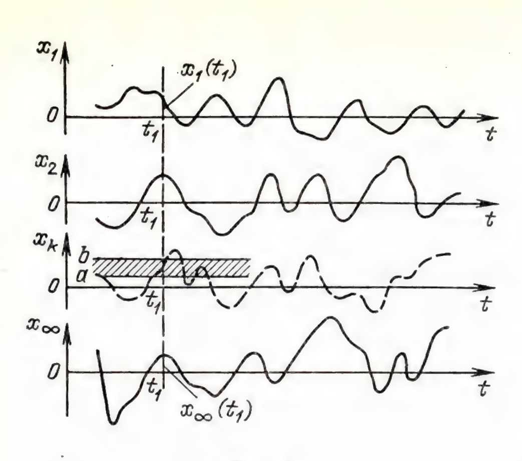


Рис. 4.1

сообщения (до испытания) сигнал следует рассматривать как случайный процесс, представляющий собой совокупность (ансамбль) функций времени, подчиняющихся некоторой общей для них статистической закономерности. Одна из этих функций, ставшая полностью известной после приема сообщения, называется **реализацией** случайного процесса. Эта реализация является уже не случайной, а детерминированной функцией времени.

Важной, но не исчерпывающей характеристикой случайного процесса является присущий ему одномерный закон распределения вероятностей.

На рис. 4.1 изображена совокупность функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., образующих случайный процесс $X(t)$. Значения, которые могут принимать отдельные функции в момент времени $t=t_1$, образуют совокупность случайных величин $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots$

Вероятность того, что величина $x_k(t_1)$ при измерении попадает в какой-либо заданный интервал (a, b) (рис. 4.1), определяется выражением

$$P_{t_1}(a<x\leqslant b)=\int_a^b p(x;\ t_1)\,dx. \qquad (4.1)$$

Функция $p(x;\ t_1)$, представляющая собой дифференциальный закон распределения случайной величины $x(t_1)$, называется одномерной плотностью вероятности, а P_{t_1} — интегральной вероятностью.

Функция $p(x;\ t_1)$ определена для случайных x непрерывного типа, могущих принимать любое значение в некотором интервале. При любом характере функции $p(x;\ t_1)$ должно выполняться равенство

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x;\ t_1)\,dx=1, \qquad (4.2)$$

где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — границы возможных значений $x(t_1)$.

Если x является случайной величиной дискретного типа и

может принимать любое из конечного числа дискретных значений, то (4.2) следует заменить суммой

$$\sum_i P_i = 1, \qquad (4.2')$$

где P_i — вероятность, соответствующая дискретному значению x_i.

Задание одномерной плотности вероятности $p(x;\ t_1)$ позволяет произвести статистическое усреднение как самой величины x, так и любой функции $f(x)$. Под статистическим усреднением подразумевается усреднение x по множеству (по ансамблю) в каком-либо «сечении» процесса, т. е. в фиксированный момент времени.

Для практических приложений наибольшее значение имеют следующие параметры случайного процесса:

математическое ожидание

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;\ t)\,dx; \qquad (4.3)$$

дисперсия

$$D_x(t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}; \qquad (4.4)$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x(t) = \sqrt{M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}} = \sqrt{D_x(t)}. \qquad (4.5)$$

Одномерная плотность вероятности недостаточна для полного описания процесса, так как она дает вероятностное представление о случайном процессе $X(t)$ только в отдельные фиксированные моменты времени. Более полной характеристикой является двумерная плотность вероятности[1] $p(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$, позволяющая учитывать связь значений x_1 и x_2, принимаемых случайной функцией в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2.

Исчерпывающей вероятностной характеристикой случайного процесса является n-мерная плотность вероятности при достаточно больших n. Однако большое число задач, связанных с описанием случайных сигналов, удается решать на основе двумерной плотности вероятности.

Задание двумерной плотности вероятности $p(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$

---

[1] Здесь и в дальнейшем одной и той же буквой p обозначаются плотности вероятности различных случайных функций. В некоторых разделах, если это необходимо для устранения путаницы, будут применяться индексы, уточняющие параметр, к которому относится данное распределение. Например, при рассмотрении случайного процесса $x(t) = A(t)\cos\theta(t)$ будут применяться обозначения $p_x(x)$, $p_A(A)$ и $p_\theta(\theta)$.

позволяет, в частности, определить важную характеристику случайного процесса — ковариационную функцию

$$K_x(t_1, t_2)=M[x(t_1)x(t_2)]. \tag{4.6}$$

Согласно этому определению ковариационная функция случайного процесса $X(t)$ представляет собой статистически усредненное произведение значений случайной функции $X(t)$ в моменты t_1 и t_2.

Для каждой реализации случайного процесса произведение $x(t_1)x(t_2)$ является некоторым числом. Совокупность реализаций образует множество случайных чисел, распределение которых характеризуется двумерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$. При заданной функции $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ операция усреднения по множеству осуществляется по формуле

$$K_x(t_1, t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p(x_1, x_2; t_1, t_2)\,dx_1dx_2. \tag{4.7}$$

При $t_2=t_1$ двумерная случайная величина x_1x_2 вырождается в одномерную величину $x_1^2=x_2^2$. Поэтому можно написать

$$K_x(t_1, t_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^2p(x_1; t_1)\,dx_1=M[x^2(t)]. \tag{4.7$'$}$$

Таким образом, при нулевом интервале между моментами времени t_1 и t_2 ковариационная функция определяет величину среднего квадрата случайного процесса в момент $t=t_1$.

При анализе случайных процессов часто основной интерес представляет его флуктуационная составляющая. В таких случаях применяется корреляционная функция

$$R_x(t_1, t_2)=M\{[x(t_1)-m_x(t_1)][x(t_2)-m_x(t_2)]\}. \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.7) $x(t_1)-m_x(t_1)$ вместо $x(t_1)$ и $x(t_2)-m_x(t_2)$ вместо $x(t_2)$, можно получить следующее выражение:

$$R_x(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2).$$

При $t_1=t_2=t$ выражение (4.8) в соответствии с (4.4) определяет дисперсию случайного процесса $D_x(t)$. Следовательно,

$$K_x(t, t)-m_x^2(t)=R_x(t, t)=D_x(t).$$

Исследование случайного процесса, а также воздействия его на радиоцепи существенно упрощается при стационарности процесса.

Случайный процесс называется строго стационарным, если его плотность вероятности $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ произвольного порядка n зависит только от интервалов t_2-t_1, $t_3-t_1, \ldots, t_n-t_1$ и не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента t.

В радиотехнических приложениях теории случайных процессов условие стационарности обычно ограничивается требованием независимости от времени только одномерной и двумерной плотностей вероятности (случайный процесс, стационарный в широком смысле). Выполнение этого условия позволяет считать, что математическое ожидание, средний квадрат и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит не от самих моментов времени t_1, и t_2, а только от интервала между ними $\tau=t_2-t_1$.

Стационарность процесса в широком смысле можно трактовать как стационарность в рамках корреляционной теории (для моментов не выше второго порядка).

В дальнейшем усреднение по множеству часто будет обозначаться чертой над случайной функцией или величиной.

Таким образом, для случайного процесса, стационарного в широком смысле, предыдущие выражения можно записывать без обозначения фиксированных моментов времени. В частности,

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \overline{x}, \tag{4.9}$$

$$K_x(\tau) = M[x(t)\,x(t+\tau)] = \overline{x(t)\,x(t+\tau)}, \tag{4.10}$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - m^2{}_x = K_x(\tau) - (\overline{x(t)})^2, \tag{4.11}$$

$$D_x = K_x(0) - m^2{}_x = \overline{x^2(t)} - (\overline{x(t)})^2 = R_x(0) = \sigma^2{}_x, \tag{4.12}$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m^2{}_x} = \sqrt{K_x(0) - (\overline{x(t)})^2}. \tag{4.13}$$

Дальнейшее упрощение анализа случайных процессов достигается при использовании условия эргодичности процесса. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной теоретически бесконечно длинной реализации.

Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие его стационарности. В соответствии с определением эргодического процесса соотношения (4.9) — (4.13) эквивалентны следующим выражениям, в которых операция усреднения по времени обозначена угловыми скобками:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt, \tag{4.14}$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt, \tag{4.15}$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - \langle x(t) \rangle^2, \tag{4.16}$$

$$D_x = K_x(0) - \langle x(t) \rangle^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \sigma^2_x, \tag{4.17}$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - \langle x(t) \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}. \tag{4.18}$$

Если $x(t)$ представляет собой электрический сигнал (ток, напряжение), то $\langle x(t) \rangle$ — постоянная составляющая случайного сигнала, $R_x(0) = \langle x^2(t) \rangle$ — средняя мощность флуктуации сигнала [относительно постоянной составляющей $\langle x(t) \rangle$].

Выражение (4.15) внешне совпадает с определением (2.120) корреляционной функции детерминированного сигнала (периодического).

Часто применяется нормированная корреляционная функция

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/D_x = [K_x(\tau) - \langle x \rangle^2]/D_x. \tag{4.19}$$

Функции $K_x(\tau)$, $R_x(\tau)$ и $r_x(\tau)$ характеризуют связь (корреляцию) между значениями $x(t)$, разделенными промежутком τ. Чем медленнее, плавнее изменяется во времени $x(t)$, тем больше промежуток τ, в пределах которого наблюдается статистическая связь между мгновенными значениями случайной функции.

При экспериментальном исследовании случайных процессов используются временные корреляционные характеристики процесса (4.15)—(4.19), поскольку, как правило, экспериментатору доступно наблюдение одной реализации сигнала, а не множества его реализаций. Интегрирование выполняется, естественно, не в бесконечных пределах, а на конечном интервале T, длина которого должна быть тем больше, чем выше требование к точности результатов измерения.

4.2. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПРИМЕРЫ

Применение общих определений, приведенных в предыдущем параграфе, иллюстрируется ниже на нескольких характерных случайных процессах.

Наряду с обозначением случайного процесса символом $X(t)$ будет применяться в том же смысле обозначение $x(t)$, под которым подразумевается случайная функция времени. Как и ранее, $x_k(t)$ обозначает k-ю реализацию случайной функции $x(t)$.

4.2.1. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДОЙ

Пусть в выражении, определяющем сигнал

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) = A\cos\psi(t), \tag{4.20}$$

частота ω_0 и начальная фаза θ_0 являются детерминированными и постоянными величинами, а амплитуда A — случайная, равновероятная в интервале от 0 до A_{max} величина (рис. 4.2).

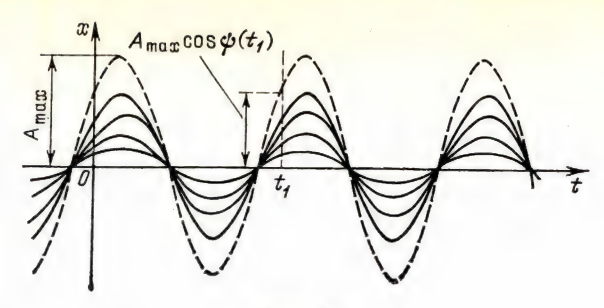


Рис. 4.2

Найдем одномерную плотность вероятности $p(x;\ t_1)$ для фиксированного момента времени t_1. Мгновенное значение $x(t_1)$ может быть любым в интервале от 0 до $A_{max}\cos\psi(t_1)$, причем будем считать, что $\cos\psi(t_1)>0$. Следовательно,

$$p(x;\ t_1)=1/A_{max}\cos\psi(t_1),\ 0<x<A_{max}\cos\psi(t_1).$$

График функции $p(x;\ t_1)$ для фиксированного значения t_1 представлен на рис. 4.3.

Математическое ожидание

$$M[x(t_1)]=\frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)}\int\limits_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} xdx=\frac{1}{2}A_{max}\cos\psi(t_1).$$

Далее,

$$M[x^2(t_1)]=\frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)}\int\limits_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} x^2dx=\frac{1}{3}A_{max}^2\cos^2\psi(t_1).$$

Наконец, дисперсия

$$D_x(t_1)=M[x^2(t_1)]-[M[x(t_1)]]^2=\frac{1}{3}A_{max}^2\cos^2\psi(t_1)-$$

$$-\frac{1}{4}A_{max}^2\cos^2\psi(t_1)=\frac{1}{12}A_{max}^2\cos^2\psi(t_1). \qquad (4.21)$$

Рассматриваемый случайный процесс нестационарный и неэргодический.

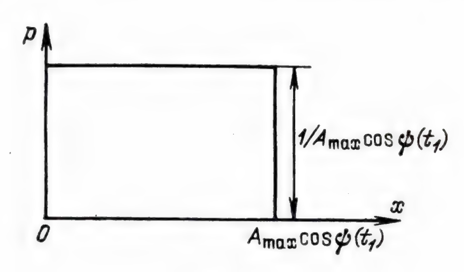


Рис. 4.3

4.2.2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ

Пусть амплитуда и частота гармонического сигнала заранее достоверно известны, а начальная фаза θ — случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в интервале от $-\pi$ до π. Это означает, что плотность вероятности начальной фазы

$$p_\theta(\theta)=1/2\pi, \quad -\pi\leqslant\theta<\pi. \tag{4.22}$$

Одну из реализаций случайного процесса $x(t)$, образуемого совокупностью гармонических колебаний со случайными фазами (рис. 4.4), можно определить выражением

$$x_k(t)=\cos(\omega_0 t+\theta_k)=\cos\psi_k(t). \tag{4.23}$$

Полная фаза колебания $\psi(t)=\omega_0 t+\theta$ является случайной величиной, равновероятной в интервале от $\omega_0 t-\pi$ до $\omega_0 t+\pi$. Следовательно,

$$p_\psi(\psi)=1/2\pi, \quad \omega_0 t-\pi\leqslant\psi<\omega_0 t+\pi. \tag{4.24}$$

Найдем одномерную плотность вероятности $p_x(x)$ случайного процесса $x(t)$. Выделим интервал x, $x+dx$ (рис. 4.5) и определим вероятность того, что при измерении, проведенном в промежутке времени от t_1 до t_1+dt, мгновенное значение сигнала окажется в интервале x, $x+dx$. Эту вероятность можно записать в виде $p_x(x)\,dx$, где $p_x(x)$ — искомая плотность вероятности. Очевидно, что вероятность $p_x(x)\,dx$ совпадает с вероятностью попадания случайной фазы колебаний ψ в один из двух

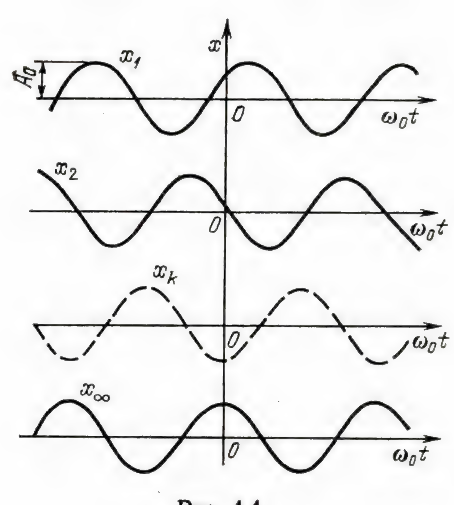


Рис. 4.4

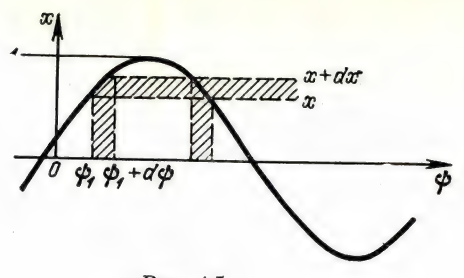


Рис. 4.5

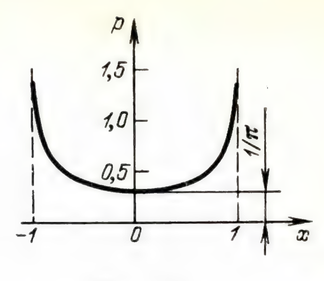


Рис. 4.6

заштрихованных на рис. 4.5 фазовых интервалов. Эта последняя вероятность равна $2p_\psi(\psi)\,d\psi$. Следовательно,

$$p_x(x)\,dx = 2p_\psi(\psi)\,d\psi = (2/2\pi)\,d\psi,$$

откуда искомая функция[1]

$$p_x(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\left|\dfrac{dx}{d\psi}\right|}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Но

$$\left|\frac{dx}{d\psi}\right| = |\sin\psi| = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, окончательно

$$p_x(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.25}$$

График этой функции изображен на рис. 4.6.

Существенно, что одномерная плотность вероятности не зависит от выбора момента времени t, а среднее по множеству [см. (2.271.7) в [5]]

$$M[x(t)] = \int_{-1}^{1} x p_x(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \tag{4.26}$$

совпадает со средним по времени

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega_0 t+\theta)\,dt = 0.$$

(Это справедливо для любой реализации рассматриваемого случайного процесса.)

Корреляционную функцию[2] в данном случае можно получить усреднением произведения $x(t_1)x(t_2)$ по множеству без

---

[1] Абсолютное значение производной берется на том основании, что плотность вероятности является неотрицательной величиной.

[2] Ковариационная функция рассматриваемого процесса совпадает с корреляционной функцией, так как $M[x(t)] = 0$.

обращения к двумерной плотности вероятности [см. общее выражение (4.7)]. Подставляя в (4.6)

$$x(t_1)x(t_2)=\cos(\omega_0 t_1+\theta)\cos(\omega_0 t_2+\theta)={}^1/_2\{\cos\omega_0(t_2-t_1)+$$
$$+\cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\theta]\},$$

а также учитывая, что первое слагаемое $\cos\omega_0(t_2-t_1)$ является детерминированной величиной, а второе слагаемое при статистическом усреднении с помощью одномерной плотности вероятности $p_\theta(\theta)=1/2\pi$ [см. (4.22)] обращается в нуль, получаем

$$R_x(t_1,\ t_2)=M[x(t_1)x(t_2)]={}^1/_2\cos\omega_0\tau. \tag{4.27}$$

Такой же результат и при усреднении произведения $x_k(t)x_k(t+\tau)$ по времени для любой реализации процесса.

Независимость среднего значения от t_1 и корреляционной функции от положения интервала $\tau=t_2-t_1$ на оси времени позволяет считать рассматриваемый процесс стационарным. Совпадение же результатов усреднения по множеству и времени (для любой реализации) указывает на эргодичность процесса. Аналогично нетрудно показать, что гармоническое колебание со случайными амплитудой и фазой образует стационарный, но не эргодический процесс (различные реализации обладают неодинаковой дисперсией).

4.2.3. ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных величин чаще других встречается в природе. Гауссовский процесс особенно характерен для помех канала связи. Он очень удобен для анализа. Поэтому случайные процессы, распределение которых не слишком сильно отличается от нормального, часто заменяют гауссовским процессом. Одномерная плотность вероятности гауссовского процесса определяется выражением

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2{}_x}\right]. \tag{4.28}$$

В данном параграфе рассматривается стационарный и эргодический гауссовский процесс. Поэтому под m_x и σ_x^2 можно подразумевать соответственно постоянную составляющую и среднюю мощность флуктуационной составляющей одной (достаточно длительной) реализации случайного процесса.

Графики плотности вероятности при нормальном законе для некоторых значений σ_x изображены на рис. 4.7. Функция $p(x)$ симметрична относительно среднего значения. Чем больше σ_x, тем меньше максимум, а кривая становится более пологой [площадь под кривой $p(x)$ равна единице при любых значениях σ_x].

Широкое распространение нормального закона распределения в природе объясняется тем, что при суммировании доста-

точно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин распределение суммы близко к нормальному при любом распределении отдельных слагаемых.

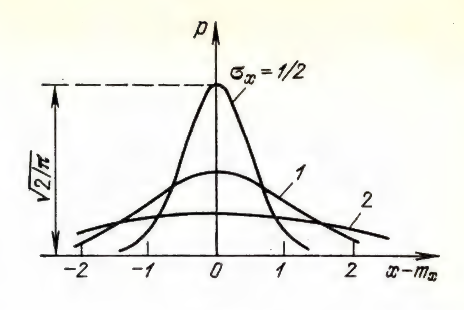


Рис. 4.7

Это положение, сформулированное в 1901 г. А. М. Ляпуновым, получило название центральной предельной теоремы.

Наглядными физическими примерами случайного процесса с нормальным законом распределения являются шумы, обусловленные тепловым движением свободных электронов в проводниках электрической цепи или дробовым эффектом в электронных приборах (см. § 7.3). Не только шумы и помехи, но и полезные сигналы, являющиеся суммой большого числа независимых случайных элементарных сигналов, например гармонических колебаний со случайной фазой или амплитудой, часто можно трактовать как гауссовские случайные процессы.

На основе функции $p(x)$ можно найти относительное время пребывания сигнала $x(t)$ в определенном интервале уровней, отношение максимальных значений к среднеквадратическому (пик-фактор) и ряд других важных для практики параметров случайного сигнала. Поясним это на примере одной из реализаций гауссовского процесса, изображенной на рис. 4.8, a для $m_x=0$. Эта функция времени соответствует шумовой помехе,

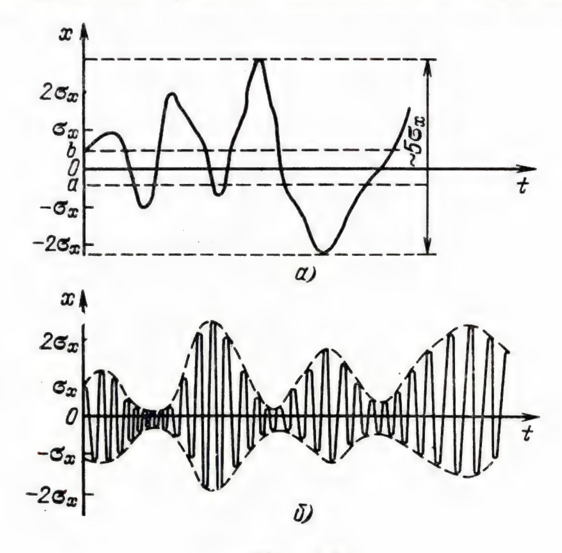


Рис. 4.8

энергетический спектр которой простирается от нулевой частоты до некоторой граничной частоты. Вероятность пребывания значения $x(t)$ в интервале от a до b определяется выражением (4.1). Подставляя в это выражение (4.28), при $m_x=0$ получаем

$$P(a \leqslant x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_a^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_0^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_0^a e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2}dy -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{a/\sigma_x} e^{-y^2/2}dy = \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right). \tag{4.29}$$

Функция

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-y^2/2}dy \tag{4.30}$$

называется интегралом вероятностей. В математических справочниках приводятся таблицы этой функции.

Подставив в (4.29) $b/\sigma_x=1$, 2, 3 и соответственно $a/\sigma_x=-1$, -2, и -3, нетрудно найти вероятности пребывания $x(t)$ в полосах шириной $2\sigma_x$, $4\sigma_x$ и $6\sigma_x$, симметричных относительно оси t.

В рассматриваемом частном случае ($|a|=b$) формулу (4.29) можно упростить на основании симметрии функции относительно оси ординат (рис. 4.7).

Таким образом,

$$P(-b < x < b) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2}dy = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right).$$

Результаты вычислений сведены в табл. 4.1. В последней графе приведены значения, равные $1-2\Phi(b/\sigma_x)$. Из этой таблицы следует, что ширину шумовой дорожки (рис. 4.8, *а*) нормального шума можно приравнять $(4\ldots5)\sigma_x$. Если принять во внимание пики функции $x(t)$, вероятность которых не менее

Таблица 4.1

Интервал значений	Вероятность пребывания в интервале	Вероятность пребывания вне интервала
$(-\sigma_x,\ \sigma_x)$	$2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$	$\sim 0{,}317$
$(-2\sigma_x,\ 2\sigma_x)$	$2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$	$\sim 0{,}046$
$(-3\sigma_x,\ 3\sigma_x)$	$2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$	$\sim 0{,}003$

1%, то пик-фактор шума (отношение пика к σ_x) можно оценить значением ~ 3. Напомним, что для гармонического колебания пик-фактор равен $\sqrt{2}$.

Отношение времени пребывания $x(t)$ в заданном интервале к общему времени наблюдения (достаточно большому для эффективного усреднения) можно трактовать как вероятность попадания $x(t)$ в указанный интервал. На такой трактовке основан принцип построения различных приборов, используемых для экспериментального нахождения одномерной плотности вероятности случайного процесса.

Можно отметить, что приведенные выше данные о распределении вероятностей не дают никаких представлений о поведении функции $x(t)$ во времени. На рис. 4.8, *б* показана реализация гауссовского процесса со спектром, сосредоточенным в узкой полосе частот с центральной частотой ω_0. По своей плотности вероятности $p(x)$ и, следовательно, по значениям m_x и σ_x этот процесс не отличается от низкочастотного, показанного на рис. 4.8, *а*.

Для описания временных характеристик функции $x(t)$ необходимо привлечь двумерную плотность вероятности, позволяющую найти ковариационную функцию [см. (4.7)]. Другой способ — нахождение спектра мощности случайного процесса. Он рассматривается в следующем параграфе.

4.3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Подразумевая под случайным процессом множество (ансамбль) функций времени, необходимо иметь в виду, что функциям, имеющим различную форму, соответствуют различные спектральные характеристики. Усреднение комплексной спектральной плотности, введенной в § 2.4, по всем функциям приводит к нулевому спектру процесса (при $M[x(t)]=0$) из-за случайности и независимости фаз спектральных составляющих в различных реализациях. Можно, однако, ввести понятие спектральной плотности среднего квадрата случайной функции, поскольку значение среднего квадрата не зависит от соотношения фаз суммируемых гармоник. Если под случайной функцией $x(t)$ подразумевается электрическое напряжение или ток, то средний квадрат этой функции можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую в сопротивлении 1 Ом. Эта мощность распределена по частотам в некоторой полосе, зависящей от механизма образования случайного процесса. Спектральная плотность средней мощности представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте ω. Размерность функции $W(\omega)$, являющейся отношением мощности к полосе частот, есть

$$[W(\omega)] = \left[\frac{\text{Мощность}}{\text{Полоса частот}}\right] = [\text{Мощность} \times \text{время}] = [\text{Энергия}].$$

Спектральную плотность случайного процесса можно найти, если известен механизм его образования. Применительно к шумам, связанным с атомистической структурой материи и электричества, эта задача будет рассмотрена в § 7.3. Здесь же мы ограничимся несколькими определениями общего характера.

Выделив из ансамбля какую-либо реализацию $x_k(t)$ и ограничив ее длительность конечным интервалом T, можно применить к ней обычное преобразование Фурье и найти спектральную плотность $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$. Тогда энергию рассматриваемого отрезка реализации можно вычислить с помощью формулы (2.58):

$$Э_{kT}=\int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{4.31}$$

Разделив эту энергию на T, получим среднюю мощность k-й реализации на отрезке T

$$\overline{x_{kT}^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega. \tag{4.32}$$

При увеличении T энергия $Э_{kT}$ возрастает, однако отношение $Э_{kT}/T$ стремится к некоторому пределу. Совершив предельный переход $T\to\infty$, получим

$$\overline{x_k^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_k(\omega)\,d\omega,$$

где

$$W_k(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T} \tag{4.33}$$

представляет собой спектральную плотность средней мощности рассматриваемой k-й реализации.

В общем случае величина $W_k(\omega)$ должна быть усреднена по множеству реализаций. Ограничиваясь в данном случае рассмотрением стационарного эргодического процесса, можно считать, что найденная усреднением по одной реализации функция $W_k(\omega)$ характеризует весь процесс в целом. Опуская индекс k, получаем окончательное выражение для средней мощности случайного процесса

$$\overline{x^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_x(\omega)\,d\omega,$$

где

$$W_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T}. \tag{4.34}$$

Если рассматривается случайный процесс с ненулевым средним значением $x(t)$, то спектральную плотность следует представить в форме

$$W_x(\omega)=\langle x(t)\rangle^2\cdot 2\pi\delta(\omega)+W_\sim(\omega), \tag{4.35}$$

где $W_\sim(\omega)$ — сплошная часть спектра, соответствующая флуктуационной составляющей x; $\delta(\omega)$ — дельта-функция.

При интегрировании по $f=\omega/2\pi$ первое слагаемое в правой части дает $\langle x(t)\rangle^2$, т. е. мощность постоянной составляющей, а второе — мощность флуктуационной составляющей, т. е. дисперсию

$$D_x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_\sim(\omega)\,d\omega=\sigma_x^2. \tag{4.36}$$

Для процесса с нулевым средним

$$\overline{x^2(t)}=D_x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(\omega)\,d\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(2\pi f)\,df, \tag{4.37}$$

Из определения спектральной плотности (4.33) очевидно, что $W_x(\omega)$ является четной и неотрицательной функцией ω.

4.4. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Скорость изменения $x(t)$ во времени определяет, с одной стороны, ширину спектра, с другой — ход ковариационной функции. Очевидно, что между $W_x(\omega)$ и $K_x(\tau)$ имеется тесная связь.

Теорема Винера—Хинчина утверждает, что $K_x(\tau)$ и $W_x(\omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$W_x(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{4.38}$$

$$K_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{4.39}$$

Для случайных процессов с нулевым средним аналогичные выражения имеют вид

$$W_x(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{4.38'}$$

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{4.39'}$$

Из этих выражений вытекает свойство, аналогичное свойствам преобразований Фурье, установленным в гл. 2 для детерминированных сигналов: чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и соответственно чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса.

Большой интерес представляет белый шум, спектр которого равномерен на всех частотах $-\infty < \omega < \infty$.

Если в выражение (4.39) подставить $W_x(\omega) = W_0 = \text{const}$, то получим [см. (2.75)]

$$R_x(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau), \tag{4.40}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Для белого шума с бесконечным и равномерным спектром корреляционная функция равна нулю для всех значений τ, кроме $\tau = 0$, при котором $R_x(0)$ обращается в бесконечность. Подобный шум, имеющий игольчатую структуру с бесконечно тонкими случайными выбросами, иногда называют дельта-коррелированным процессом. Дисперсия белого шума бесконечно велика.

Поясним применение приведенных выше соотношений на примерах. Заданы следующие параметры напряжения шума (гауссовский стационарный процесс с нулевым средним): среднеквадратическое значение $u_{ск} = 2$ В и энергетический спектр $W_1(2\pi f)$, равномерный в полосе частот $-f_1 \ldots f_1$ (сплошная линия на рис. 4.9), при $f_1 = 10$ МГц.

Шум с подобным спектром обычно называют широкополосным. В данном случае

$$W_1(2\pi f) = u^2_{ск}/2f_1 = (2)^2/2 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2/\text{Гц}.$$

Корреляционная функция рассматриваемого процесса при $\overline{x(t)} = 0$ [см. (4.38′)]

$$R_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) \cos \omega\tau d\omega =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi} \frac{2 \sin \omega_1\tau}{\tau} = 2 \cdot 10^{-7} 2 f_1 \frac{\sin \omega_1\tau}{\omega_1\tau} = \sigma^2 \frac{\sin \omega_1\tau}{\omega_1\tau}. \tag{4.41}$$

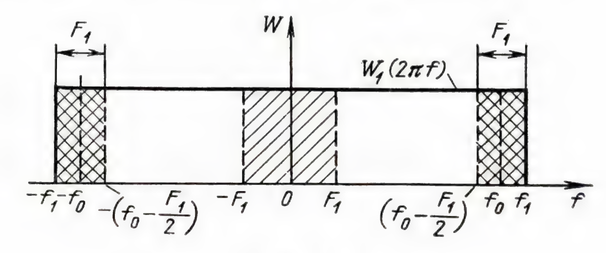


Рис. 4.9

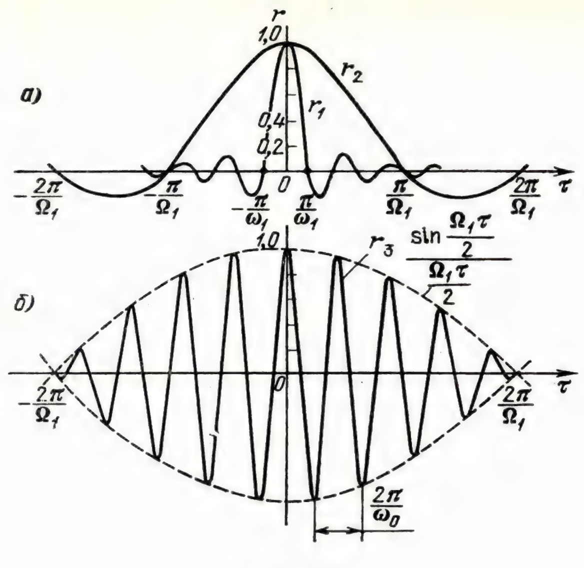


Рис. 4.10

Дисперсия шума

$D_1 = u^2_{\text{ск}} = R_1(0) = 4\text{В}^2$.

Нормированная корреляционная функция (рис. 4.10, *а*)

$$r_1(\tau) = R_1(\tau)/\sigma_1^2 = \sin\omega_1\tau/\omega_1\tau. \qquad (4.42)$$

Вырежем из спектра исходного шума полосу от $f=-F_1$ до $f=F_1$, обозначенную на рис. 4.9 штриховкой, и найдем D_2, $R_2(\tau)$ и $r_2(\tau)$, соответствующие этому ограниченному по полосе шуму.

При $F_1 = 2$ МГц

$$D_2 = 2F_1W_1(\omega) = 2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-7} = 0{,}8\ B^2,$$

$$R_2(\tau) = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\,\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau} = 0{,}8\,\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau},$$

$$r_2(\tau) = R_2(\tau)/\sigma_2^2 = (\sin\Omega_1\tau)/\Omega_1\tau.$$

Сужение спектра привело к растяжению графика $r_2(\tau)$ по оси τ (рис. 4.10, *а*). Интервал корреляции увеличился в $f_1/F_1 = 5$ раз.

Найдем аналогичные характеристики для шума, спектр которого обозначен на рис. 4.9 двойной штриховкой. От предыдущего этот случай отличается положением спектральной полосы на оси частот. Шум с подобным спектром называют узкополосным (при $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$).

Дисперсия этого шума D_3, очевидно, не отличается от D_2.

Корреляционная функция

$$R_3(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-(\omega_0+\Omega_1/2)}^{-(\omega_0-\Omega_1/2)} W_1(\omega)\, e^{i\omega\tau}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2} W_1(\omega)\, e^{i\omega\tau}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2} W_1(\omega)\cos\omega\tau d\omega=$$

$$=2\cdot 10^{-7}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega_0+\Omega_1/2)\tau}{\tau}-\frac{\sin(\omega_0-\Omega_1/2)\tau}{\tau}\right]=$$

$$=2\cdot 10^{-7}\frac{1}{\pi\tau}\cdot 2\sin\frac{\Omega_1\tau}{2}\cos\omega_0\tau=2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{\sin\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}\cos\omega_0\tau. \quad (4.43)$$

Нормированная корреляционная функция (рис. 4.10, *б*)

$$r_3(\tau)=\frac{\sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1\tau/2}\cos\omega_0\tau. \quad (4.44)$$

Огибающая функции $r_3(\tau)$ (штриховая линия) по форме подобна огибающей функции $r_2(\tau)$, однако эта функция имеет вдвое большую протяженность. Высокочастотное заполнение функции $r_3(\tau)$ имеет частоту ω_0, равную центральной частоте спектра шума.

График нормированной корреляционной функции, показанный на рис. 4.10, *б*, позволяет составить представление о характере шумового колебания с узкополосным спектром. Осцилляции корреляционной функции с частотой ω_0 указывают на то, что и мгновенное значение шумового колебания изменяется в среднем с частотой ω_0. Напомним, что корреляционная функция гармонического колебания является также гармонической функцией той же частоты (см. § 2.14). Изменение же огибающей корреляционной функции по закону $\frac{\sin\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}$ указывает на то, что огибающая шумового колебания, являющаяся случайной величиной, изменяется во времени относительно медленно, подобно функции времени, спектр которой ограничен наивысшей частотой Ω_1. Примерный вид шумового колебания, соответствующего корреляционной функции (4.44), представлен на рис. 4.11 (в измененном масштабе времени).

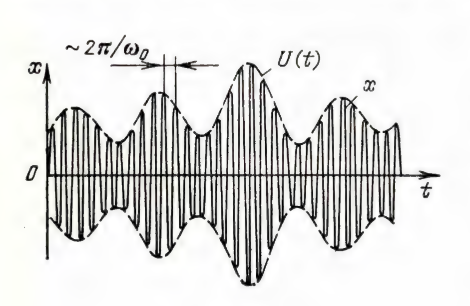


Рис. 4.11

Итак, шумовое колебание с узкополосным спектром следует представлять высокочастотным колебанием с медленно (по сравнению с частотой ω_0) изменяющимися амплитудой и фазой:

$$x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)], \quad (4.45)$$

где ω_0 — центральная частота спектра шума.

Следует подчеркнуть, что все параметры этого колебания: амплитуда, фаза и частота — являются случайными функциями времени. Статистические характеристики этих параметров рассматриваются в § 4.6.

4.5. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В данном параграфе рассматриваются стационарные процессы с нулевым средним, поэтому связь между процессами $x(t)$ и $y(t)$ оценивается с помощью взаимной корреляционной функции, определяемой выражениями[1]

$$R_{xy}(\tau)=M[x(t)y(t+\tau)],\ R_{yx}(\tau)=M[y(t)x(t+\tau)]. \tag{4.46}$$

Кроме того, имеются в виду эргодические процессы, поэтому можно применять усреднение как по множеству, так и по времени:

$$R_{xy}(\tau)=\overline{x(t)\,y(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,y(t+\tau)\,dt, \tag{4.47}$$

$$R_{yx}(\tau)=\overline{y(t)\,x(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}y(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{4.48}$$

Как и для детерминированных колебаний, взаимная корреляционная функция не изменяется, если сдвиг на τ одной из функций $x(t)$ или $y(t)$ заменить сдвигом в обратном направлении другой функции. Поэтому можно написать следующие равенства:

$$R_{xy}(\tau)=\overline{x(t)\,y(t+\tau)}=\overline{x(t-\tau)\,y(t)}, \tag{4.49}$$

$$R_{yx}(\tau)=\overline{y(t)\,x(t+\tau)}=\overline{y(t-\tau)\,x(t)}. \tag{4.50}$$

Из последних выражений вытекают следующие соотношения между $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$, аналогичные выражению (2.118):

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau),\ R_{yx}(\tau)=R_{xy}(-\tau). \tag{4.51}$$

Соотношения (4.49) — (4.51) не следует смешивать с условиями четности функций. Каждая из функций $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ не обязательно четна относительно τ (см. § 2.14).

В итоге корреляция между значениями функций $x(t)$ и $y(t)$

---

[1] Подразумевается, что не только сами процессы $x(t)$ и $y(t)$, но и связи между ними стационарны.

в два различных момента времени, разделенных интервалом τ, задается корреляционной матрицей

$$R(\tau)=\begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

где $R_{xx}(\tau)$ и $R_{yy}(\tau)$ — корреляционные функции соответственно процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Пусть, например, рассматривается сумма двух эргодических процессов $x(t)$ и $y(t)$ с нулевыми средними ($\overline{x}=\overline{y}=0$) и требуется определить корреляционную функцию случайного процесса $s(t)=x(t)+y(t)$ (при условии, что взаимные корреляционные функции стационарны).

Используя формулу (4.16) и учитывая равенства (4.47), (4.48), получаем

$$R_s(\tau)=\overline{s(t)\,s(t+\tau)}=\overline{[x(t)+y(t)]\,[x(t+\tau)+y(t+\tau)]}=$$
$$=\overline{x(t)\,x(t+\tau)}+\overline{x(t)\,y(t+\tau)}+\overline{y(t)\,x(t+\tau)}+\overline{y(t)\,y(t+\tau)}=$$
$$=R_{xx}(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau)+R_{yy}(\tau). \tag{4.53}$$

При $\tau=0$ $R_{xx}(0)=\sigma^2_x$ и $R_{yy}(0)=\sigma^2_y$, а $R_{xy}(0)=R_{yx}(0)$. Следовательно,

$$D_s=R_s(0)=D_x+D_y+R_{xy}(0)+R_{yx}(0)=D_x+D_y+2R_{xy}(0). \tag{4.53'}$$

Если процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то дисперсия (средняя мощность) суммы будет $D_s=D_x+D_y$.

В противном случае в зависимости от знака $R_{xy}(0)$ мощность процесса $s(t)$ может быть больше или меньше суммы дисперсий D_x и D_y.

Для разности $s(t)=x(t)-y(t)$ получается выражение, аналогичное (4.53). Необходимо лишь знак плюс перед членом $2R_{xy}$ заменить минусом. При независимости процессов $x(t)$ и $y(t)$ дисперсия процесса $s(t)$, как и при суммировании, будет

$$D_s=D_x+D_y. \tag{4.54}$$

Применим к $R_s(\tau)$ соотношение Винера—Хинчина (4.38):

$$W_s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau=W_x(\omega)+W_y(\omega)+W_{xy}(\omega)+$$
$$+W_{yx}(\omega). \tag{4.55}$$

В этом выражении

$$W_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau,\quad W_{yx}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{4.56}$$

имеют смысл взаимных спектральных плотностей случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

В отличие от спектральных плотностей $W_x(\omega)$ или $W_y(\omega)$, которые являются действительными функциями ω и не могут принимать отрицательных значений, взаимные спектральные плотности $W_{xy}(\omega)$ и $W_{yx}(\omega)$ могут быть комплексными функциями. Это связано с тем, что функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ не обязательно четные относительно τ. Подстановка в (4.56) соотношения (4.51) приводит к равенству

$$W_{xy}(\omega)=W^*_{yx}(\omega), \tag{4.57}$$

откуда следует, что

$$W_{xy}(\omega)+W_{yx}(\omega)=2\mathrm{Re}[W_{xy}(\omega)]=2\mathrm{Re}[W_{yx}(\omega)]. \tag{4.58}$$

Таким образом, выражение (4.55) можно записать в форме

$$W_s(\omega)=W_x(\omega)+W_y(\omega)+2\mathrm{Re}[W_{xy}(\omega)]. \tag{4.59}$$

Это выражение поясняет физический смысл взаимной спектральной плотности $W_{xy}(\omega)$. Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то $W_{xy}(\omega)=0$ и спектр суммы $s(t)=x(t)+y(t)$ равен сумме спектров $W_x(\omega)$ и $W_y(\omega)$ и, следовательно, мощность процесса $s(t)$ равна сумме мощностей процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Если действительная часть взаимной спектральной плотности положительна, то $W_s(\omega)>W_x(\omega)+W_y(\omega)$ и, следовательно, корреляция между процессами приводит к возрастанию средней мощности суммарного процесса ($\sigma_s^2>\sigma_x^2+\sigma_y^2$). Очевидно, что при отрицательной действительной части $W_{xy}(\omega)$ средняя мощность суммарного процесса меньше, чем D_x+D_y.

Если $D_s=D_x+D_y$, то процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются независимыми, аддитивными.

В практике часто встречается случай суммирования процесса $x(t)$ с процессом $Kx(t-T)$, т. е. с тем же процессом, задержанным на время T и усиленным в K раз (рис. 4.12).

Составим матрицу (4.52) для процессов $x(t)$ и $y(t)=$ $=Kx(t-T)$. В обозначениях (4.52) получаем

$$R_{xx}(\tau)=R_x(\tau);$$

$$R_{xy}(\tau)=\overline{x(t)\,y(t+\tau)}=\overline{Kx(t)\,x(t-T+\tau)}=KR_x(\tau-T),$$

$$R_{yx}(\tau)=\overline{y(t)\,x(t+\tau)}=\overline{Kx(t-T)\,x(t+\tau)}=KR_x(\tau+T),$$

$$R_{yy}(\tau)=R_y(\tau)=\overline{y(t)\,y(t+\tau)}=\overline{K^2x(t-T)\,x(t-T+\tau)}=$$
$$=K^2R_x(\tau).$$

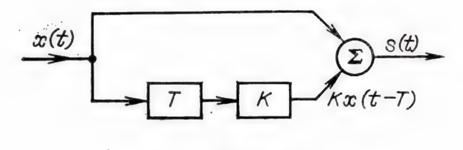


Рис. 4.12

Таким образом, корреляционная матрица процессов $x(t)$ и $y(t)=Kx(t-T)$ принимает вид

$$R(\tau)=\begin{bmatrix} R_x(\tau) & KR_x(\tau-T) \\ KR_x(\tau+T) & K^2R_x(\tau) \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь корреляционную функцию процесса $s(t)=x(t)+y(t)$ на выходе сумматора (рис. 4.12). Подставив в (4.53) элементы матрицы $R(\tau)$, получим

$$R_s(\tau)=R_x(\tau)+KR_x(\tau-T)+KR_x(\tau+T)+K^2R_x(\tau).$$

Приравнивая $\tau=0$, находим дисперсию процесса

$$D_s=D_x+KR_x(-T)+KR_x(T)+K^2D_x=(1+K^2)D_x+2KR_x(T)=$$
$$=D_x[1+K^2+2Kr_x(T)],$$

где $r_x(T)=R_x(T)/D_x$ — нормированная корреляционная функция процесса $x(t)$ (напомним, что в данном примере $M[x(t)]=0$).

При замене сумматора вычитающим устройством знак плюс перед слагаемым $2Kr_x(T)$ должен быть заменен минусом.

Если задержка T значительно больше интервала корреляции процесса $x(t)$, то $r_x(T)\to 0$ и $D_s=D_x(1+K^2)$

4.6. УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Краткое описание свойств гауссовского шума, сформированного из белого шума вырезанием относительно узкой полосы частот, было дано в § 4.4. Там же отмечалось, что каждая из реализаций подобного случайного процесса имеет вид почти гармонического колебания [см. (4.45)]

$$x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]=A(t)\cos\psi(t), \tag{4.60}$$

все параметры которого — огибающая $A(t)$, фаза $\theta(t)$ и частота $\omega(t)$ — являются случайными медленно меняющимися функциями времени.

При представлении шума в форме (4.60) предполагается, что огибающая $A(t)$ отвечает соотношению

$$A(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}, \tag{4.61}$$

где $y(t)$ — функция, сопряженная по Гильберту с исходной функцией $x(t)$, а ω_0 выбрана таким образом, что фаза $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно зависящего от t.

В этом смысле нет различия между случайным и детерминированным процессами (см. § 3.9). Дополнительно этот вопрос рассматривается в § 4.7.

Дальнейшее рассмотрение основано на допущении, что спектральная плотность шума $x(t)$ сконцентрирована в узкой по сравнению с величиной ω_0 полосе, причем функция $W_x(\omega)$

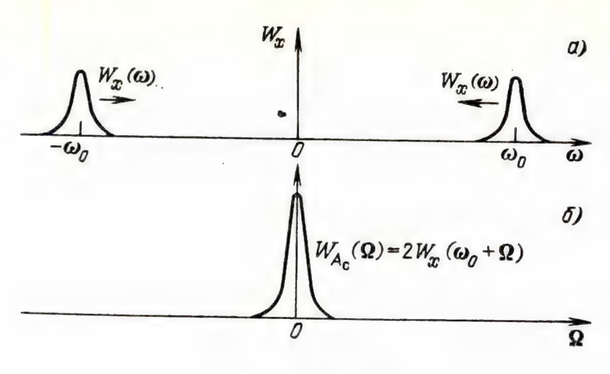


Рис. 4.13

в указанной полосе симметрична относительно точки ω_0 (рис. 4.13, *а*).

Рассмотрим стационарный эргодический процесс с нормальным законом распределения вероятностей. Необходимо подчеркнуть, что указанное распределение характеризует физическое колебание $x(t)$, т. е. мгновенное значение колебания (в любой момент времени t). Параметры же колебания $A(t)$, $\theta(t)$ и $\omega(t)=d\psi/dt$ обладают законами распределения, существенно отличающимися от нормального[1]. Для полного описания свойств узкополосного процесса требуется знание законов распределения, а также корреляционных функций всех параметров колебания.

4.6.1. ОГИБАЮЩАЯ

Представим высокочастотное колебание $x(t)$, определяемое выражением (4.60), в виде двух квадратурных колебаний:

$$x(t)=A(t)\cos\theta(t)\cos\omega_0 t - A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0 t=$$
$$=A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t. \qquad (4.60')$$

Здесь, как и в § 3.5,

$$A_c(t)=A(t)\cos\theta,\ A_s(t)=A(t)\sin\theta \qquad (4.62)$$

представляют собой амплитуды соответственно косинусной и синусной составляющих колебания $x(t)$, причем

$$A(t)=\sqrt{A_c^2(t)+A_s^2(t)},\ \theta(t)=\operatorname{arctg} A_s/A_c. \qquad (4.63)$$

Для отыскания плотностей вероятности $p_A(A)$ и $p_\theta(\theta)$ требуется знание соответствующих плотностей $p(A_c)$ и $p(A_s)$, а также совместной плотности вероятности $p(A_c, A_s)$.

---

[1] Это вытекает из нелинейной зависимости параметров A, θ и ω от x и y.

Плотности $p(A_c)$ и $p(A_s)$ можно определить, сопоставив случайную функцию $A_c(t)$ [или $A_s(t)$] с функцией $x(t)$:

$$x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)],\ A_c(t)=A(t)\cos\theta(t).$$

Отличие $A_c(t)$ от $x(t)$ заключается в исключении слагаемого $\omega_0 t$ из аргумента косинуса. Как и для детерминированного колебания, это означает сдвиг спектра каждой из реализаций случайного процесса на величину ω_0 (в направлении к нулевой частоте при сохранении структуры спектра). При этом сохраняется и закон распределения случайной функции $x(t)$. Поэтому если процесс $x(t)$ гауссовский, то и процесс $A_c(t)$ гауссовский (оба процесса с нулевым средним).

Спектр $W_{A_c}(\Omega)$ (рис. 3.13, *б*) случайной функции $A_c(t)$ можно получить из спектра функции $x(t)$ сдвигом на ω_0 левого лепестка и на $-\omega_0$ правого лепестка спектра $W_x(\omega)$.

В результате получается спектр

$$W_{A_c}(\Omega)=2W_x(\omega_0+\Omega), \tag{4.64}$$

группирующийся вблизи нулевой частоты. Коэффициент 2 учитывает[1] сложение мощностей, приходящихся на оба лепестка $W_x(\omega)$.

Аналогичные рассуждения используем для случайного процесса $A_s(t)$ и его спектра

$$W_{A_s}(\Omega)=2W_x(\omega_0+\Omega).$$

Из этого выражения и рис. 4.13 вытекает, что площадь под кривой $W_x(\omega)$ (в двух лепестках) совпадает с площадью под кривой $W_{A_c}(\Omega)$ [или $W_{A_c}(\Omega)$]. Следовательно, дисперсии случайных функций $A_c(t)$, $A_s^2(t)$ и $x(t)$ одинаковы: $\sigma^2{}_{A_c}=\sigma^2{}_{A_s}=\sigma_x^2$.

При учете первого выражения (4.63), из которого вытекает равенство $A^2(t)=A_c^2(t)+A_s^2(t)$, приходим к следующему выражению для среднего квадрата огибающей (из-за некоррелированности квадратур):

$$\langle A^2\rangle=\overline{A^2(t)}=D_{A_c}+D_{A_s}=2D_x=2\sigma_x^2. \tag{4.65}$$

Итак, одномерные плотности вероятности случайных функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$ можно определить выражениями

$$p(A_c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$$p(A_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{4.66}$$

---

[1] В случае детерминированного АМ колебания (рис. 3.9) при переходе от спектра $S_a(\omega)$ к спектру $S_A(\omega)$ удваивается спектральная плотность напряжения (или тока), что приводит к учетверению спектральной плотности энергии, пропорциональной $S_A^2(\omega)$. В данном случае мощность случайного процесса всего лишь удваивается из-за некогерентного суммирования спектров от обоих лепестков $W_x(\omega)$.

Кроме того, взаимная корреляция между функциями $A_c(t)$ и $A_s(t)$ равна нулю при $\tau=0$. Действительно, возводя выражение (4.60′) в квадрат и усредняя по множеству, получаем

$$M[x^2(t)]=M[A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t]^2=$$
$$=M[A_c^2(t)]\cos^2\omega_0 t+M[A_s^2(t)]\sin^2\omega_0 t-$$
$$-2M[A_c(t)A_s(t)]\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t.$$

Но левая часть этого выражения равна $R_x(0)=D_x$, кроме того, $M[A_c^2(t)]=M[A_s^2(t)]=D_x=R_{A_s}(0)$, а $M[A_c(t)A_s(t)]=$ $=R_{A_cA_s}(0)$ является взаимной корреляционной функцией случайных процессов $A_c(t)$ и $A_s(t)$ при $\tau=0$. Следовательно, предыдущее равенство приводится к виду

$$R_x(0)=R_{A_c}(0)-R_{A_cA_s}(0)\sin 2\omega_0 t=\sigma_x^2-R_{A_cA_s}(0)\sin 2\omega_0 t, \qquad (4.67)$$

откуда следует, что $R_{A_cA_s}(0)=0$ [поскольку процессы $x(t)$ и $A_c(t)$ стационарны, равенство (4.67) должно выполняться в любой момент времени].

Итак, $A_c(t)$ и $A_s(t)$, отсчитываемые в один и тот же момент времени, — статистически независимые величины[1]. Поэтому совместную плотность вероятности $p(A_c, A_s)$ можно определить выражением

$$p(A_c, A_s)=p(A_c)\,p(A_s)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(\frac{-A_c^2-A_s^2}{2\sigma_x^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \qquad (4.68)$$

Вероятность того, что конец вектора $A(t)$ лежит в элементарном прямоугольнике $dA_c dA_s$ (рис. 4.14), равна произведению вероятностей пребывания A_c в интервале dA_c и A_s в интервале dA_s:

$$p(A_c)\,dA_c p(A_s)\,dA_s=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA_c dA_c.$$

При переходе от прямоугольных координат к полярным площадь заштрихованного на рис. 4.15 элемента будет $Ad\theta dA$, а вероятность пребывания конца вектора в этом элементе равна $\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^x}{2\sigma_x^2}\right)Ad\theta dA$.

Из этого выражения следует, что двумерная плотность вероятности

$$p(A, \theta)=\frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \qquad (4.69)$$

---

[1] Это положение вытекает также из соотношения (4.65), показывающего, что средний квадрат огибающей $A(t)$, т. е. D_A, является аддитивной суммой средних квадратов функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$.

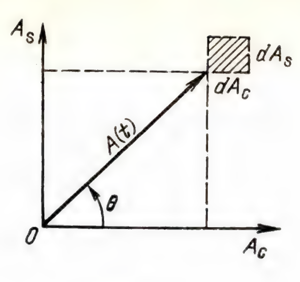


Рис. 4.14

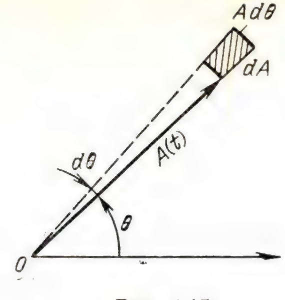


Рис. 4.15

Интегрируя по переменной θ, получаем одномерную плотность вероятности

$$p_A(A)=\int_{-\pi}^{\pi} p(A,\theta)\,d\theta=\frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right),\quad 0<A<\infty. \quad (4.70)$$

Обоснование пределов интеграла приводится в следующем пункте данного параграфа.

Распределение огибающей, характеризуемое плотностью вероятности (4.70), называется **распределением Рэлея** (рис. 4.16). Максимальное значение функции $p_A(A)$ получается при $A=\sigma_x$. Это означает, что $A=\sigma_x$ является наивероятнейшим значением огибающей.

Среднее же значение (математическое ожидание) огибающей

$$M[A]=\int_0^\infty A p_A(A)\,dA=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^2\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_x. \quad (4.71)$$

Аналогично средний квадрат огибающей

$$M[A^2]=\int_0^\infty A^2 p_A(A)\,dA=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^3\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=2\sigma_x^2. \quad (4.72)$$

Этот результат совпадает с (4.65). Таким образом, средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии шума. Это аналогично соотношению между квадратом амплитуды A_0 и средней мощностью гармонического колебания $a(t)=A_0\cos\omega_0 t$, равной $\overline{a^2(t)}=\frac{1}{2}A_0^2$.

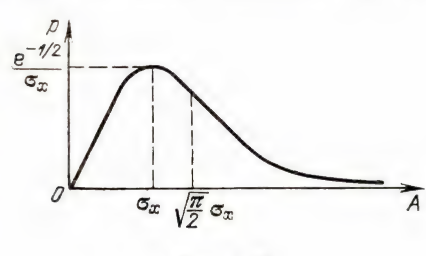


Рис. 4.16

Вероятность того, что

огибающая $A(t)$ превысит некоторый заданный уровень C, определяется формулой

$$P(A>C)=\int\limits_C^\infty p_A(A)\,dA=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}\int\limits_C^\infty A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=\exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right), \tag{4.73}$$

а вероятность того, что огибающая $A(t)$ будет ниже уровня C, — формулой

$$P(A<C)=1-\exp(-C^2/2\sigma_x^2). \tag{4.74}$$

Из этих формул видно, что уже при $C=3\sigma_x$ вероятность превышения уровня C составляет всего около 1%. Поэтому можно считать, что ширина шумовой дорожки, наблюдаемой, например, на экране осциллографа (рис. 4.17), не превышает $(5\ldots6)\sigma_x$.

Этот результат, естественно, близок к данным, приведенным в § 4.2 для шумовой дорожки широкополосного гауссовского процесса (со спектром, примыкающим к нулевой частоте).

Ковариационная функция огибающей узкополосного нормального шума [6] определяется по формуле, приводимой без вывода:

$$K_A(\tau)=\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0^{\,2}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2\cdot4\ldots2n}\right]^2 r_0^{2n}(\tau)\right\}. \tag{4.75}$$

Здесь $r_0(\tau)$ представляет собой огибающую нормированной

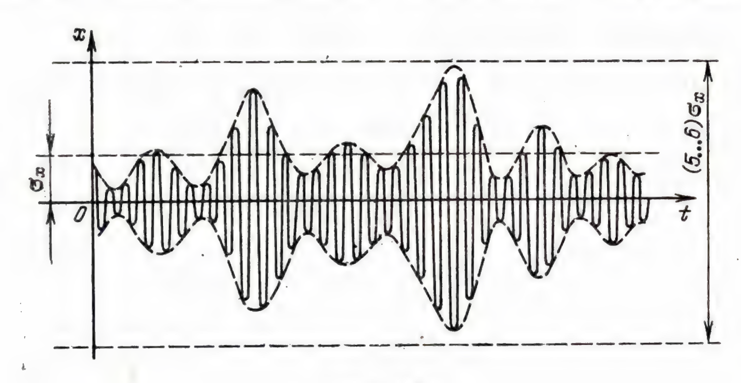


Рис. 4.17

корреляционной функции шума $x(t)$, т. е. функции, определяемой выражением (при $\overline{x}=0$)

$$r_x(\tau)=R_x(\tau)/\sigma_x^2=r_0(\tau)\cos\omega_0\tau. \quad (4.76)$$

Так как $r_0\leqslant 1$, то ряд (4.75) быстро сходится. Поэтому можно ограничиться первыми двумя членами:

$$K_A(\tau)\approx\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1+\frac{1}{4}r_0^2(\tau)\right]. \quad (4.77)$$

Применяя к $K_A(\tau)$ преобразование Фурье [см. (4.38)], находим спектральную плотность мощности огибающей

$$W_A(\Omega)=\frac{\pi\sigma_x^2}{2}2\pi\delta(\Omega)+\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}r_0^2(\tau)\,e^{-i\Omega\tau}d\tau. \quad (4.78)$$

Из выражения (4.78) видно, что спектр огибающей примыкает к нулевой частоте. Первое слагаемое в правой части (4.78) соответствует постоянной составляющей огибающей, а второе — сплошной части спектра.

Примеры применения формул (4.75)—(4.78) приводятся в § 11.3—11.5.

4.6.2. ФАЗА

Интегрирование двумерной плотности вероятности $p(A,\theta)$, определяемой выражением (4.69), по переменной A дает одномерную плотность вероятности фазы

$$p_\theta(\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^{\infty}A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)d(A^2)=\frac{1}{2\pi},\quad -\pi<\theta\leqslant\pi. \quad (4.79)$$

Этот результат согласуется с пределами интегрирования в (4.70).

Заметим, что из представления $p(A,\theta)$ [см. (4.69)] в виде произведения

$$p(A,\theta)=\frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)=$$

$$=\left[\frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi}\right)=p_A(A)\,p_\theta(\theta)$$

непосредственно вытекает статистическая независимость случайных величин A и θ. Как и в отношении $A_c(t)$ и $A_s(t)$, это справедливо при отсчете $A(t)$ и $\theta(t)$ в один и тот же момент времени [см. замечание к (4.67)].

Соотношения (4.70) и (4.79) позволяют сделать следующее общее заключение: произведение вида $x=A\cos\theta$, в котором A и θ — независимые случайные величины, причем A распределена по Рэлею, а θ равновероятна в интервале $(-\pi, \pi)$, обладает нормальной плотностью вероятности.

Условие узкополосности процесса $x(t)$ не обязательно; необходимо лишь, чтобы A и θ были связаны соотношениями (4.63).

Корреляционная функция фазы $\theta(t)$ определяется выражением [6]

$$R_\theta(\tau)=\frac{\pi}{2}r_0(\tau)+\frac{\pi}{4}r_0^2(\tau)+\frac{\pi}{12}r_0^3(\tau)+\ldots \tag{4.80}$$

При $\tau=0$ ряд сходится к $\pi^2/3$, т. е. дисперсия фазы равна $\pi^2/3$. Действительно, при распределении (4.79)

$$D_\theta=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\theta^2 p_\theta(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}. \tag{4.81}$$

4.6.3. ЧАСТОТА

Основываясь на выражении (4.60), мгновенную частоту шума можно записать в форме

$$\omega(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}=\omega_0+\frac{d\theta(t)}{dt}=\omega_0+\dot{\theta}(t),$$

откуда следует, что закон распределения мгновенной частоты определяется распределением производной фазы θ.

Приведем без вывода [7] выражение для плотности вероятности случайной величины $\dot{\theta}$

$$p(\dot{\theta})=\left[2\Delta\omega_{эк}\left(1+\frac{\dot{\theta}^2}{(\Delta\omega_{эк})^2}\right)^{3/2}\right]^{-1}, \tag{4.82}$$

где $\Delta\omega_{эк}$ — эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса, определяемая выражением

$$(\Delta\omega_{эк})^2=\int\limits_0^\infty(\omega-\omega_0)^2\,W(\omega)\,d\omega\Bigg/\int\limits_0^\infty W(\omega)\,d\omega. \tag{4.83}$$

График функции $p(\dot{\theta})$ изображен на рис. 4.18. Среднее значение абсолютной величины $|\dot{\theta}|$, т. е. мгновенной частоты, равно $\Delta\omega_{эк}$.

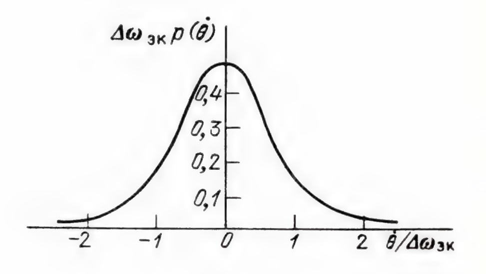


Рис. 4.18

Рассмотрим случай, когда энергетический спектр $W_x(\omega)=W_0(\omega)$ равномерен в полосе частот $\pm F_1/2$ при центральной частоте f_0 (в обозна-

чениях рис. 4.9). Переходя в (4.83) к новой переменной $\omega-\omega_0=\Omega$, получаем следующие соотношения

$$\int_0^\infty (\omega-\omega_0)^2 W_x(\omega)\,d\omega = \int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} \Omega^2 W_0 d\Omega = W_0 \frac{2}{3}\Omega_1^3,$$

$$\int_0^\infty W_x(\omega)\,d\omega = W_0 \int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} d\Omega = W_0 2\Omega_1$$

и

$$(\Delta\omega_{\text{эк}})^2 = \frac{W_0 \frac{2}{3}\Omega_1^3}{W_0 2\Omega_1} = \frac{1}{3}\Omega_1^2.$$

Итак, для узкополосного шума со спектром W_0 в полосе $(-\Omega_1, \Omega_1)$ среднее значение

$$|\dot{\theta}| = \Delta\omega_{\text{эк}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Omega_1. \tag{4.83'}$$

4.7. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Пусть задан действительный стационарный случайный процесс $x(t)$ со спектром $W_x(\omega)$. В теории случайных процессов доказывается, что если $x(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом смысле так, что выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 W_x(\omega)\,d\omega<\infty$, то к $x(t)$ можно применить интегральное преобразование

$$x_1(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t)}{\tau-t}\,d\tau,$$

причем интеграл также понимается в среднеквадратическом смысле.

Определенный таким образом случайный (стационарный) процесс $x_1(t)$ по отношению к $x(t)$ является сопряженным (по Гильберту), а процесс

$$z(t) = x(t) + ix_1(t) \tag{4.84}$$

является комплексным случайным процессом.

Применение понятия комплексного случайного процесса особенно полезно при рассмотрении узкополосных процессов. Если $x(t)$ можно представить в виде $x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$, где $A(t)$ и $\theta(t)$ — случайные функции, то, как и для детерминированного аналитического сигнала (см. § 3.10), $x_1(t)= =A(t)\sin[\omega_0 t+\theta(t)]$ и

$$z(t) = A(t)e^{i[\omega_0 t+\theta(t)]}. \tag{4.85}$$

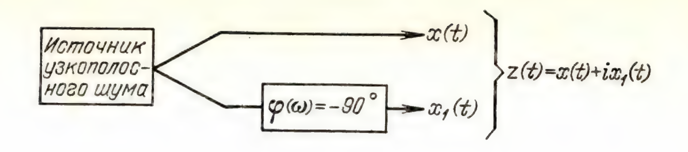


Рис. 4.19

Поясним физический смысл этого понятия на модели (рис. 4.19), аналогичной использованной в гл. 3 модели формирования детерминированного аналитического сигнала (см. рис. 3.23).

Пусть узкополосный стационарный шум со спектром $W_x(\omega)$ поступает на выход по двум каналам: прямому и через фазосдвигающее звено с характеристикой $\varphi(\omega)=-90°$ (в полосе шума). Различие между процессами $x(t)$ и $x_1(t)$ обусловлено лишь влиянием фазосдвигающего звена. Амплитудно-частотная характеристика этого звена равна единице, следовательно, спектры мощности процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ одинаковы: $W_{x_1}(\omega)=W_x(\omega)$. То же относится к корреляционным функциям

$$R_x(\tau)=R_{x_1}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega$$

и к дисперсиям

$$\sigma_x{}^2=\sigma_{x_1}^2=R_x(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,d\omega.$$

(Имеются в виду процессы с нулевым средним.)

Найдем теперь спектральную и корреляционную функции совокупности процессов $x(t)$ и $x_1(t)$.

С этой целью выделим одну из реализаций процесса $x(t)$ и обозначим через $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ спектральную плотность отрезка k-й реализации с конечной длительностью T (см. § 4.3). Этот же отрезок k-й реализации на выходе канала со звеном $\varphi(\omega)=-90°$ будет иметь спектральную плотность $\mathbf{X}_{1kT}(\omega)=\mathbf{X}_{kT}(\omega)e^{i\varphi(\omega)}=-i\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ при $\omega>0$ и $+i\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ при $\omega<0$.

Рассматривая совокупность отрезков $x_{kT}(t)$ и $x_{1kT}(t)$ как сумму квадратурных колебаний

$$z_{kT}(t)=x_{kT}(t)+ix_{1kT}(t),$$

можно определить спектральную плотность отрезка $z_{kT}(t)$ следующим образом:

при $\omega>0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega)=\mathbf{X}_{kT}(\omega)+i[-i\mathbf{X}_{kT}(\omega)]=2\mathbf{X}_{kT}(\omega);$$

при $\omega<0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega)=\mathbf{X}_{kT}(\omega)+i[i\mathbf{X}_{kT}(\omega)]=0.$$

На основании этих равенств можно утверждать, что $x_{1kT}(t)$ является по отношению к $x_{kT}(t)$ функцией, сопряженной по Гильберту (см. § 3.9), и, следовательно, при определении спектра и корреляционной функции аналитического случайного процесса (4.84) исходить из выражений, аналогичных (3.84) и (3.85), выведенных в § 3.10 для детерминированного аналитического сигнала

Переходя в выражении (3.77) от спектральной плотности $\mathbf{S}_a(\omega)$ колебания (напряжение, ток) к спектральной плотности $W_x(\omega)$ средней мощности исходного колебания $x(t)$, получаем

$$W_z(\omega)=\begin{cases}4W_x(\omega) & \text{при } \omega>0,\\ 0 & \text{при } \omega<0.\end{cases} \tag{4.86}$$

Применяя теорему Винера — Хинчина [см. (4.39′)], находим корреляционную функцию аналитического случайного процесса

$$R_z(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 4W_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega=4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega+$$

$$+i4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau d\omega. \tag{4.87}$$

Это выражение совершенно аналогично выражению (3.85). Как и для детерминированного аналитического сигнала, $R_z(\tau)$ — комплексная корреляционная функция. Действительная часть этой функции совпадает с удвоенной корреляционной функцией исходного процесса $x(t)$, т. е. с $2R_x(\tau)$, а мнимая часть учитывает взаимную корреляцию процессов $x(t)$ и $x_1(t)$.

Комплексный характер корреляционной функции $R_z(\tau)$ обусловлен тем, что спектр $W_z(\omega)$ несимметричен относительно оси $\omega=0$, т. е. существует только в области $\omega>0$.

При $\tau=0$ мнимая часть в соотношении (4.87) обращается в нуль, что означает некоррелированность процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ в один и тот же момент t.

По аналогии с выражениями (3.86) можно написать

$$R_z(\tau)=2R_x(\tau)+i2R_{x_1x}(\tau), \tag{4.88}$$

где

$$R_{x_1x}(\tau)=2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau d\tau. \tag{4.89}$$

Характер взаимной корреляционной функции $R_{x_1x}(\tau)$ определяется формой энергетического спектра процесса $W_x(\omega)$.

При $\tau=0$ $R_{x_1x}(0)=0$ и, следовательно, средняя мощность аналитического случайного процесса

$$D_z=\sigma_z^2=R_z(0)=2R_x(0)=2D_x. \tag{4.90}$$

Очевидно также, что средние мощности процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ одинаковы: $D_x = D_{x_1}$.

Проиллюстрируем свойства корреляционной функции $R_{x_1 x}(\tau)$, входящей в выражение (4.88), на примере, когда исходный узкополосный случайный процесс $x(t)$ обладает спектром прямоугольной формы при центральной частоте ω_0 и полосе $\Omega_1 \ll \omega_0$. Подобный спектр показан на рис. 4.9 (двойная штриховка).

Приравнивая в (4.89) $W_x(\omega) = W_1(\omega)$ и интегрируя в пределах от $\omega_0 - \Omega_1/2$ до $\omega_0 + \Omega_1/2$, получаем

$$R_{x_1 x}(\tau) = 2\frac{W_1\Omega_1}{2\pi}\frac{\sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1\tau/2}\sin\omega_0\tau = D_x\frac{\sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1\tau/2}\sin\omega_0\tau.$$

Здесь через $D_x = W_1 2F_1$ обозначена дисперсия исходного процесса $x(t)$.

В данном примере огибающая $\sin(\Omega_1\tau/2)/(\Omega_1\tau/2)$ взаимной корреляционной функции $R_{x_1 x}(\tau)$ совпадает с огибающей корреляционной функции $R_x(\tau)$ [см. (4.44)]. Различие между двумя этими функциями заключается в фазах высокочастотного заполнения [$\cos\omega_0\tau$ в $R_x(\tau)$ и $\sin\omega_0\tau$ в $R_{x_1 x}(\tau)$].

При $\tau = 0$ $R_{x_1 x}(\tau) = 0$ — процессы $x_1(t)$ и $x(t)$ в один и тот же момент времени некоррелированны. Однако при $\omega_0\tau = \pi/2$ $\tau = \pi/2\omega_0 = 1/4f_0$ — функция $R_{x_1 x}(\tau) = R_{x_1 x}(1/4f_0) = 1/4f_0 = D_x \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\frac{F_1}{f_0}\right)$. При $F_1/f_0 \ll 1$ эта функция достигает максимального значения, близкого к $D_x = \sigma_x^2$.

Глава 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. АКТИВНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

В общей теории электрических цепей под активной подразумевается цепь, содержащая наряду с пассивными элементами (катушками индуктивности, конденсаторами и резисторами) источники энергии (генераторы ЭДС или генераторы тока).

Активный характер цепей радиоэлектронных устройств обусловлен применением в них усилительных элементов: транзисторов, ламп бегущей волны и т. д. При этом предполагается, что энергия сигнала на выходе активной цепи больше, чем на входе. Для большей определенности видоизменим формулировку

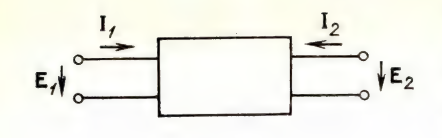


Рис. 5.1

следующим образом: цепь активна, если при гармоническом возбуждении средняя мощность сигнала на выходе больше мощности на входе, т. е. коэффициент усиления по мощности больше единицы. Из такого определения ясно, что цепь, осуществляющая усиление напряжения, например, с помощью повышающего трансформатора без усиления мощности, является пассивной, даже если в нее входят активные элементы со своими источниками питания.

При построении схем замещения активных цепей источники постоянного тока или напряжения опускаются. На этих схемах активные элементы (транзисторы и др.) отображаются с помощью элементов, параметры которых не зависят от передаваемых сигналов. При этих допущениях любой (как активный, так и пассивный) линейный четырехполюсник можно представить схемой, изображенной на рис. 5.1. На этом рисунке $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ обозначают комплексные амплитуды гармонических напряжений и токов независимых источников при фиксированной частоте ω.

Четырехполюсник полностью характеризуется соотношениями между напряжениями и токами на его входе и выходе. Вид этих соотношений зависит от исходных величин.

Напомним вкратце основные формы представления четырехполюсников.

Если исходными являются напряжения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, то уравнения для определения токов $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ записываются в форме

$$\mathbf{I}_1=\mathbf{Y}_{11}\mathbf{E}_1+\mathbf{Y}_{12}\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{I}_2=\mathbf{Y}_{21}\mathbf{E}_1+\mathbf{Y}_{22}\mathbf{E}_2 \tag{5.1}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}=[Y]\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

где

$$[Y]=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

является матрицей параметров, имеющих смысл и размерность проводимостей.

Если уравнение (5.1) решить относительно $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, то получатся системы уравнений

$$\mathbf{E}_1=Z_{11}\mathbf{I}_1+Z_{12}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{E}_2=Z_{21}\mathbf{I}_1+Z_{22}\mathbf{I}_2, \tag{5.4}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\end{bmatrix}=[Z]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

где

$$[Z]=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

является матрицей параметров, имеющих размерность сопротивлений.

Исходным уравнениям четырехполюсника, записанным в форме

$$\mathbf{E}_1 = H_{11}\mathbf{I}_1 + H_{12}\mathbf{E}_2,\ \ \mathbf{I}_2 = H_{21}\mathbf{I}_1 + H_{22}\mathbf{E}_2, \tag{5.7}$$

соответствует матрица параметров

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

в которой H_{11} имеет размерность сопротивления, H_{22} — проводимости, а H_{12} и H_{21} — безразмерные параметры.

Приведем еще уравнения в форме

$$\mathbf{I}_1 = G_{11}\mathbf{E}_1 + G_{12}\mathbf{I}_2,\ \ \mathbf{E}_2 = G_{21}\mathbf{E}_1 + G_{22}\mathbf{I}_2, \tag{5.9}$$

которой соответствует матрица

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

где G_{11} — проводимость; G_{22} — сопротивление, а G_{12} и G_{21} — безразмерные параметры.

В теории усилителей наибольшее распространение получили матрицы Z-, Y- и H-параметров.

Уравнения (5.1), (5.4), (5.7) и аналогичные им другие уравнения позволяют построить эквивалентные схемы замещения четырехполюсников.

На рис. 5.2, *а* изображена схема замещения, построенная в соответствии с уравнением (5.1). На этой схеме оба напряжения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ рассматриваются как напряжения внешних источников. Генератор тока $Y_{12}\mathbf{E}_2$ учитывает влияние выходного напряжения $\mathbf{E}_2$ на входной ток $\mathbf{I}_1$, а генератор тока $Y_{21}\mathbf{E}_1$ — влияние напряжения $\mathbf{E}_1$ на выходной ток $\mathbf{I}_2$. Оба генератора можно рассматривать как зависимые источники, так как обеспечиваемые ими токи пропорциональны напряжениям внешних источников. Параметр Y_{21} имеет смысл взаимной проводимости от входа к выходу, а Y_{12} — от выхода к входу. Очевидно также, что Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника при $\mathbf{E}_2=0$, т. е. при коротком замыка-

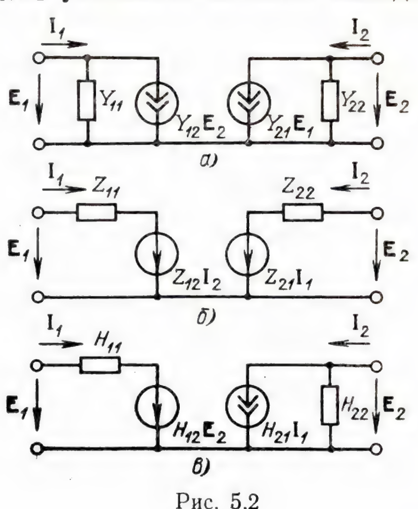


Рис. 5.2

нии выхода, а Y_{22} — выходная проводимость при возбуждении четырехполюсника от источника $\mathbf{E}_2$ при коротком замыкании входа.

Эквивалентная схема четырехполюсника, соответствующая уравнениям (5.4) и (5.5), изображена на рис. 5.2, *б*. На этой схеме зависимые источники напряжения $Z_{12}\mathbf{I}_2$ и $Z_{21}\mathbf{I}_1$ учитывают влияние $\mathbf{I}_2$ на $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{I}_1$ на $\mathbf{E}_2$ соответственно. Уравнениям (5.7), (5.8) соответствует схема замещения на рис. 5.2, *в*.

Здесь необходимо отметить следующую особенность активного четырехполюсника: как правило, $Y_{21} \neq Y_{12}$ или $Z_{21} \neq Z_{12}$, $H_{21} \neq H_{12}$. Это означает, что активные четырехполюсники необратимы и, следовательно, принцип взаимности к активным четырехполюсникам неприменим.

При анализе радиоэлектронных цепей часто приходится иметь дело с четырехполюсниками, возбуждаемыми только со стороны входа: при этом под выходным напряжением подразумевается падение напряжения на сопротивлении нагрузки $Z_н = 1/G_н$, т. е. $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_н$. В подобных случаях нагрузочный элемент целесообразно вводить внутрь четырехполюсника.

При представлении четырехполюсника с помощью Y-матрицы получается схема замещения, показанная на рис. 5.3, *а*, которая отличается от схемы на рис. 5.2, *а* только тем, что нагрузочная проводимость $G_н$ введена в четырехполюсник. Это позволяет рассматривать новый четырехполюсник как разомкнутый, у которого ток на выходе $\mathbf{I}_2' = 0$. Матрица параметров этого нового четырехполюсника

$$[Y]' = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix}, \qquad (5.11)$$

где $Y'_{22} = Y_{22} + G_н$.

Рис. 5.3

Второе уравнение (5.1) принимает при этом вид

$$\mathbf{I}'_2 = Y_{21}\mathbf{E}_1 + Y'_{22}\mathbf{E}_2 = 0,$$

откуда следует важное соотношение

$$\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = -\frac{Y_{21}}{Y'_{22}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + G_{\text{н}}}. \qquad (5.12)$$

При использовании Z- или H-матриц получаются схемы замещения, представленные на рис. 5.3, *б* и *в*.

Выражение (5.12) можно трактовать как передаточную функцию линейного четырехполюсника

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{E}_2/\mathbf{E}_1, \qquad (5.13)$$

где под $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ независимо от выбранной матрицы параметров Y, Z или H подразумеваются соответственно сигналы на входе и выходе четырехполюсника.

Характер функции $\mathbf{K}(i\omega)$ определяется частотными свойствами проводимости нагрузки $G_{\text{н}}$, а также параметрами Y_{22} и Y_{21} активного элемента[1] (например транзистора), или Z_{22}, Z_{21} и т. д.

Безразмерная комплексная функция $\mathbf{K}(i\omega)$ является исчерпывающей характеристикой в частотной области. Она определяется в стационарном режиме при гармоническом возбуждении четырехполюсника.

Передаточную функцию удобно представлять в форме

$$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\,e^{i\varphi(\omega)}. \qquad (5.14)$$

Модуль $K(\omega)$ обычно называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) четырехполюсника. Аргумент $\varphi(\omega)$ называют фазочастотной характеристикой (ФЧХ) четырехполюсника.

Другой исчерпывающей характеристикой четырехполюсника является его импульсная характеристика $g(t)$, которая используется для описания поведения цепи во временной области. Для активных линейных цепей, как и для пассивных, под импульсной характеристикой цепи $g(t)$ подразумевается отклик, реакция цепи на воздействие, имеющее вид единичного импульса (дельта-функции). Связь между $g(t)$ и $\mathbf{K}(i\omega)$ нетрудно установить с помощью интеграла Фурье.

Если на входе четырехполюсника действует единичный импульс (дельта-функция) ЭДС со спектральной плотностью, равной единице для всех частот, то спектральная плотность выходного напряжения равна просто $\mathbf{K}(i\omega)$. Отклик на единичный импульс, т. е. импульсная характеристика цепи, легко

---

[1] Инерционность активного элемента в данном случае не учитывается, т. е. параметры Y_{22} и Y_{21} — вещественные величины.

определяется с помощью обратного преобразования Фурье, примененного к передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\omega}^{c+i\omega}\mathbf{K}(p)\,e^{pt}dp. \tag{5.15}$$

Соответственно функция $\mathbf{K}(i\omega)$ является преобразованием Фурье импульсной характеристики

$$\mathbf{K}(i\omega)=\int_{0}^{\infty}g(t)\,e^{-i\omega t}dt. \tag{5.16}$$

В дальнейшем импульсную характеристику будем обозначать функцией $g(t)$, под которой можно подразумевать не только напряжение, но и любую другую электрическую величину, являющуюся откликом на воздействие в виде дельта-функции.

5.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

В основе этого метода лежит использование введенной в предыдущем параграфе передаточной функции цепи $\mathbf{K}(i\omega)$. Если на входе линейного четырехполюсника действует сигнал произвольной формы в виде ЭДС $e(t)$, то, применяя спектральный метод, следует определить спектральную плотность входного сигнала $\mathbf{E}(\omega)$. Эта операция легко осуществляется с помощью выражения (2.38). Умножением $\mathbf{E}(\omega)$ на $\mathbf{K}(i\omega)$ определяется спектральная плотность сигнала на выходе четырехполюсника. Наконец, применение к произведению $\mathbf{E}(\omega)\mathbf{K}(i\omega)$ обратного преобразования Фурье [см. (2.39)] определяет выходной сигнал в виде функции времени.

Таким образом, если входной сигнал записан в виде интеграла

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega, \tag{5.17}$$

то выходной сигнал можно представить в аналогичной форме

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega. \tag{5.18}$$

Сравнение выражений (5.18) и (5.17) показывает, что сигнал на выходе линейной цепи можно получить суммированием составляющих спектра $\mathbf{E}(\omega)$ входного сигнала, взятых с весом $\mathbf{K}(i\omega)$. Иными словами, передаточная функция цепи $\mathbf{K}(i\omega)$ яв-

ляется **весовой функцией**, определяющей относительный вклад различных составляющих спектра $\mathbf{E}(\omega)$ в сигнал $u(t)$.

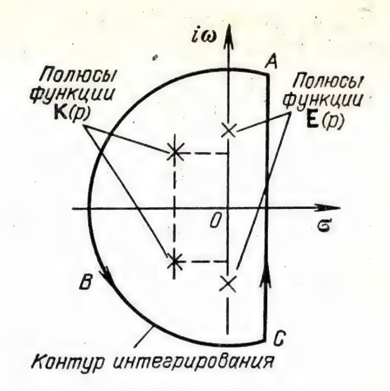


Рис. 5.4

В § 2.9 отмечалось, что анализ переходных процессов значительно упрощается при представлении как внешнего воздействия, так и передаточной функции в виде преобразований Лапласа. При этом обозначение передаточной функции можно сохранить прежним, а изменить только аргумент, так что $\mathbf{K}(i\omega)$ перейдет в $\mathbf{K}(p)$. Функция же $\mathbf{E}(\omega)$ переходит в $\mathbf{E}(p)$ (см. § 2.9). При этом выражение (5.18) приводится к виду (см. § 2.9)

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(p)\,K(p)\,\mathrm{e}^{pt}dp. \tag{5.19}$$

При $t>0$ замкнутый контур интегрирования, образованный добавлением дуги бесконечно большого радиуса в левой полуплоскости (рис. 5.4), охватывает все полюсы подынтегральных функций как $\mathbf{E}(p)$, так и $\mathbf{K}(p)$, благодаря чему имеет место соотношение

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint \mathbf{E}(p)\mathbf{K}(p)\,\mathrm{e}^{pt}dp=\sum \mathrm{res},\ \ t>0 \tag{5.19'}$$

(здесь $\Sigma\mathrm{res}$ — сумма вычетов в указанных полюсах).

При $t<0$ контур интегрирования лежит в правой полуплоскости, не содержит полюсов и интеграл равен нулю.

Показанное на рис. 5.4 расположение полюсов функции $\mathbf{E}(p)$ (на мнимой оси) соответствует ЭДС вида $e(t)=E_0\cos\omega_0 t$, существующей при $t\geqslant 0$.

Итак вычисление интеграла (5.19) сводится к определению вычетов в полюсах подынтегральной функции. Представим подынтегральную функцию выражения (5.19) в виде

$$\mathbf{E}(p)\,\mathbf{K}(p)\,\mathrm{e}^{pt}=\mathbf{U}(p)\,\mathrm{e}^{pt}=C(p)/D(p). \tag{5.20}$$

В данном случае знаменатель $D(p)$ образуется произведением множителей вида $(p-p_{\text{п}i})$, где $p_{\text{п}i}$ — полюсы не только функции $\mathbf{K}(p)$, но и функции $\mathbf{E}(p)$.

Тогда вычет функции $C(p)/D(p)$, имеющей в точке p_i простой полюс (первой кратности), определится формулой

$$\mathrm{res}_i=C\,(p_i)\Big/\left[\frac{dD\,(p)}{dp}\right]_{p=p_i}. \tag{5.21}$$

Если функция $C(p)/D(p)$ имеет в точке p полюс кратности k (k — целое положительное число), то

$$\mathrm{res}_i=\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left[\frac{C(p)}{D(p)}(p-p_i)^k\right]_{p=p_i}. \qquad (5.22)$$

5.3. МЕТОД ИНТЕГРАЛА НАЛОЖЕНИЯ

Вместо разложения сложного сигнала на гармонические составляющие (спектральный метод) можно воспользоваться разбиением сигнала на достаточно короткие импульсы (рис. 5.5, *а*).

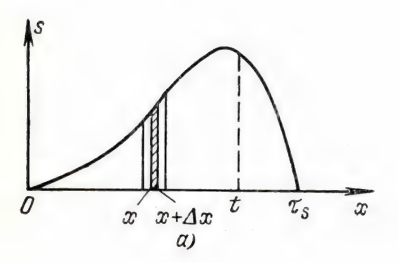
Если в основе спектрального метода лежит передаточная функция цепи $\mathbf{K}(i\omega)$, то метод интеграла наложения базируется на импульсной характеристике цепи $g(t)$, введенной в § 5.1.

Пусть требуется найти сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе цепи, если задан сигнал $s(t)$ на входе цепи и известна ее импульсная характеристика $g(t)$. Для уяснения сути метода интеграла наложения поступим следующим образом. Разобьем произвольный сигнал $s(x)$ на элементарные импульсы, как это показано на рис. 5.5, *а*, и найдем отклик цепи в момент t на элементарный импульс (на рис. 5.5, *а* заштрихован), действующий на входе в момент x. Если бы площадь этого импульса равнялась единице, то импульс можно было бы рассматривать как дельта-функцию, возникшую в момент x. При импульсной характеристике цепи $g(x)$ отклик в момент t был бы, очевидно, равен $g(t-x)$. Поскольку, однако, заштрихованная на рис. 5.5, *а* площадь импульса равна $s(x)\Delta x$ (а не единице), отклик в момент t будет $s(x)\Delta x g(t-x)$.

Для определения полного значения выходного сигнала в момент t нужно просуммировать действие всех импульсов в промежутке от $x=0$ до $x=t$. При $\Delta x\to 0$ суммирование сводится к интегрированию.

Следовательно,

$$s_{\text{вых}}(t)=\int_0^t s(x)\,g(t-x)\,dx. \qquad (5.23)$$



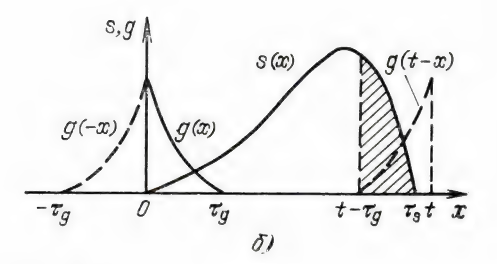


Рис. 5.5

В общем случае, если начало сигнала $s(x)$ не совпадет с началом отсчета времени x, последнее выражение можно записать в форме

$$s_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} s(x)\, g(t-x)\, dx. \qquad (5.24)$$

Приведем еще одну форму записи, которая получается из выражения (5.24) при замене переменной x на $t-\tau$ и соответственно $t-x$ на τ:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{t+\infty}^{0} s(t-\tau)\, g(\tau)\, d(-\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} s(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \qquad (5.25)$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$s_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{0}^{\infty} s(t-x)\, g(x)\, dx. \qquad (5.26)$$

Выражение (5.23) можно также записать в эквивалентной форме

$$s_{\text{вых}}(t) = \int\limits_{0}^{\infty} s(x)\, g(t-x)\, dx, \qquad (5.27)$$

поскольку для реальных цепей всегда выполняется условие $g(t-x)=0$ при $t<x$ (отклик не может опережать воздействие). Интеграл, стоящий в правой части выражения (5.26) или (5.27), в математике называется сверткой функций $s(t)$ и $g(t)$ (см. § 2.5). Таким образом, приходим к следующему важному положению: *сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе линейной цепи является сверткой входного сигнала $s(t)$ с импульсной характеристикой цепи $g(t)$.*

Из выражения (5.23) видно, что сигнал на выходе цепи $s_{\text{вых}}(t)$ в момент t получается суммированием мгновенных значений входного сигнала $s(t)$, взятых с весом $g(t-x)$ за все предыдущее время.

В § 5.2 при суммировании спектра входного сигнала весовой функцией являлась передаточная функция цепи $\mathbf{K}(i\omega)$. В данном случае при суммировании мгновенных значений входного сигнала $s(t)$ весовой функцией является импульсная характеристика цепи, взятая с аргументом $(t-x)$, т. е. функция $g(t-x)$.

Из рис. 5.5,*б*, построенного для момента времени $t>\tau_s$, видно, что отклик цепи на воздействие $s(x)$ не может закончиться раньше, чем функция $g(t-x)$ сместится вправо от $s(x)$ на время, равное длительности импульсной характеристики τ_g. Иными словами, сигнал на выходе цепи не может быть короче $\tau_s+\tau_g$.

Чтобы при прохождении через цепь сигнал не удлинялся,

требуется выполнение условия $\tau_g \to 0$, т. е. импульсная характеристика цепи должна приближаться к дельта-функции, а это равносильно требованию равномерности передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ при $0 < |\omega| < \infty$.

5.4. СОПОСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА И МЕТОДА ИНТЕГРАЛА НАЛОЖЕНИЯ

Для большей наглядности проведем сопоставление на простом примере — прохождение импульса прямоугольной формы через резистивный усилитель. Схема замещения коллекторной цепи усилителя представлена на рис. 5.6. Активный элемент обозначен в виде зависимого источника тока $S\mathbf{E}$ с внутренней проводимостью $G_i = 1/R_i$. Емкость C_0 включает в себя межэлектродную емкость и емкость внешней цепи, а $G_н = 1/R_н$ — проводимость нагрузки; S — крутизна характеристики тока коллектора.

Напряжение на выходе усилителя

$$\mathbf{U}_{вых} = S\mathbf{E}\,\frac{1}{G_i + G_н + i\omega C_0},$$

передаточная функция усилителя

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{\mathbf{U}_{вых}}{\mathbf{E}} = -\frac{S/(G_i + G_н)}{1 + i\omega C_0/(G_i + G_н)} = \frac{K_{max}}{1 + i\omega\tau_0},$$

$$\mathbf{K}(p) = -\frac{K_{max}}{1 + p\tau_0}, \quad K_{max} = -S(G_i + G_н) \quad \text{при} \quad \omega = 0;$$

$\tau_0 = C_0/(G_i + G_н) = C_0 R_э$ — постоянная времени, $R_э = 1/(G_i + G_н)$.

Импульсная характеристика усилителя [см. (5.15)]

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} K_{max} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}dp}{1 + p\tau_0} = -\frac{K_{max}}{\tau_0}\,e^{-t/\tau_0}.$$

Пусть в момент $t = 0$ на вход усилителя поступает прямоугольный импульс ЭДС $e(t)$ с амплитудой E и длительностью T (рис. 5.7, *а*). В интервале времени от $t = 0$ до $t = T$ напряжение на входе можно рассматривать как результат включения постоянной ЭДС $e_1(t)$ (рис. 5,7, *б*).

Изображение по Лапласу для этой функции (см. табл. 2.1)

$$\mathbf{E}_1(p) = E/p.$$

Тогда по формуле (5.19) напряжение на выходе

$$u_1(t) = E\,\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p}\,\mathbf{K}(p)\,e^{pt}dp = -\frac{EK_{max}}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}dp}{p(1 + p\tau_0)}.$$

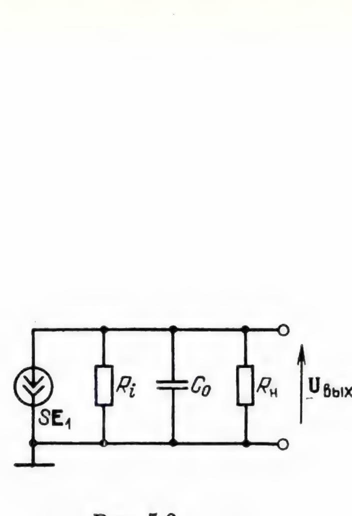


Рис. 5.6

Рис. 5.7

Вычислив по формуле (5.21) вычеты в полюсах $p_1=0$ и $p_2=-1/\tau_0$, получим

$$u_1(t)=-EK_{\max}(1-e^{-t/\tau_0}),\quad t\geqslant 0.$$

В момент $t=T$ включается ЭДС $e_2(t)=-E$, компенсирующая первую ЭДС $e_1(t)$ (рис. 5.7, *б*).

Суперпозиция функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (рис. 5.7, *в*) обусловленных действием $e_1(t)$ и $e_2(t)$, образует выходной сигнал (рис. 5.7, *г*).

Получим теперь этот результат, основываясь на заданной импульсной характеристике усилителя $g(t)=-\frac{K_{\max}}{\tau_0}e^{-t/\tau_0}$.

Обратимся к интегральной свертке (5.23), в которой под $s(x)$ будем подразумевать входной сигнал, т. е. прямоугольный импульс $e(t)$ предыдущего примера. Тогда

$$u_{\text{вых}}(t)=-\int_0^t \frac{EK_{\max}}{\tau_0}e^{-(t-x)/\tau_0}dx=$$

$$=-\frac{K_{\max}E}{\tau_0}e^{-t/\tau_0}\int_0^t e^{x/\tau_0}dx=-K_{\max}E(1-e^{-t/\tau_0}),$$

при $0\leqslant t\leqslant T$.

При $t\geqslant T$ $u_{\text{вых}}(t)$ определяется наложением отклика на воздействие компенсирующей ЭДС, как и в предыдущем рассмотрении (рис. 5.7, *г*).

5.5. АКТИВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Введение отрицательной обратной связи (ООС) позволяет существенно улучшить характеристики устройств обработки сигналов, а также повысить стабильность режима работы этих устройств.

На рис. 5.8 изображена структурная схема усилителя с внешней обратной связью, осуществляемой с помощью вспомогательного четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$.

Как усилитель $\mathbf{K}_y(i\omega)$, так и четырехполюсник $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ предполагаются полностью однонаправленными. Подобное представление имеет смысл в тех случаях, когда входное сопротивление четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ достаточно велико, чтобы не нагружать усилитель $\mathbf{K}_y(i\omega)$; выходное сопротивление четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ должно быть достаточно малым по сравнению с входным сопротивлением усилителя $\mathbf{K}_y(i\omega)$. При этих допущениях передаточную функцию системы

$$\mathbf{K}_0(i\omega) = \mathbf{U}/\mathbf{E} \tag{5.28}$$

можно найти с помощью следующих очевидных соотношений.

Напряжение на выходе четырехполюсника обратной связи

$$\mathbf{U}_{oc} = \mathbf{K}_{oc}(i\omega)\,\mathbf{U}. \tag{5.29}$$

Напряжение на входе усилителя $\mathbf{K}_y(i\omega)$ равно сумме входной ЭДС $\mathbf{E}$ и напряжения обратной связи $\mathbf{U}_{oc}$.

Следовательно, напряжение на выходе всей цепи

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_y(i\omega)\,(\mathbf{E}+\mathbf{U}_{oc}) = \mathbf{K}_y(i\omega)[\mathbf{E}+\mathbf{K}_{oc}(i\omega)\,\mathbf{U}].$$

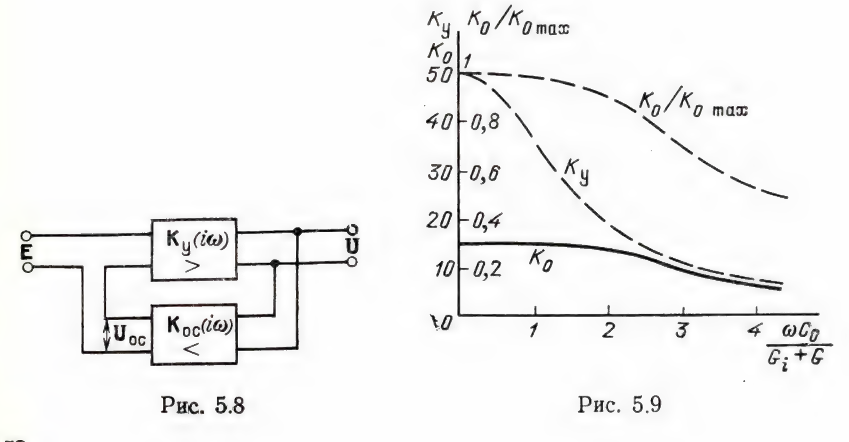


Рис. 5.8 Рис. 5.9

Решая это уравнение относительно **U**, получаем

$$\mathbf{U}=\frac{\mathbf{K}_у(i\omega)}{1-\mathbf{K}_у(i\omega)\,\mathbf{K}_{ос}(i\omega)}\mathbf{E},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{K}_0(i\omega)=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{E}}=\frac{\mathbf{K}_у(i\omega)}{1-\mathbf{K}_у(i\omega)\,\mathbf{K}_{ос}(i\omega)}. \qquad (5.30)$$

Это выражение является основным для системы с обратной связью; $\mathbf{K}_0(i\omega)$ иногда называют *общей передаточной функцией*, или *передаточной функцией замкнутой системы*. Произведение же $\mathbf{K}_у(i\omega)\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$, имеющее смысл передаточной функции каскадного соединения четырехполюсников $\mathbf{K}_у(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$, называют *передаточной функцией разомкнутой системы*.

При замене $i\omega$ на p получаем передаточную функцию замкнутой цепи в операторной форме

$$\mathbf{K}_0(p)=\mathbf{K}_у(p)/[1-\mathbf{K}_у(p)\,\mathbf{K}_{ос}(p)]. \qquad (5.31)$$

Сопоставление $\mathbf{K}_0(i\omega)$ с $\mathbf{K}_у(i\omega)$ позволяет определить знак обратной связи в общем случае, когда эти функции являются комплексными. Если на какой-нибудь частоте имеет место неравенство $K_0(\omega)<K_у(\omega)$, т. е. если введение обратной связи приводит к уменьшению усиления, то обратная связь на данной частоте отрицательна, в противном случае — положительна.

При $\mathbf{K}_у(i\omega)\mathbf{K}_{ос}(i\omega)=1$ усиление $K_0(\omega)$ становится бесконечно большим. Это означает, что цепь становится неустойчивой и для исследования ее поведения необходимо использовать другие методы, так как выражения (5.28), (5.29), относящиеся к стационарным режимам, теряют смысл.

Рассмотрим влияние отрицательной обратной связи на АЧХ усилителя. Непосредственно из (5.30) следует, что при $|\mathbf{K}_у(i\omega)\cdot\mathbf{K}_{ос}(i\omega)|\gg 1$ модуль передаточной функции

$$K_0(\omega)\approx 1/K_{ос}(\omega). \qquad (5.32)$$

Если в заданной полосе частот обеспечивается равномерность $K_{ос}(\omega)$, то $K_0(\omega)=\text{const}$. Таким образом, задача сводится к выравниванию АЧХ пассивного четырехполюсника обратной связи, что значительно проще, чем устранение неравномерности характеристики усилителя $K_у(\omega)$.

В промежуточных случаях, когда $K_уK_{ос}$ измеряется несколькими единицами, предельное соотношение (5.32) не достигается, однако характеристика $K_0(\omega)$ становится значительно равномернее, чем $K_у(\omega)$. Это иллюстрируется рис. 5.9, построенным для усилителя с АЧХ, максимальное значение которой (при $\omega=0$) $K_{у\,max}=50$; коэффициент обратной связи $|\mathbf{K}_{ос}|=0{,}05$. Характеристика $K_0(\omega)$ расположена ниже, чем $K_у(\omega)$ (на всех частотах). Это является результатом подачи выходного

напряжения на вход усилителя в противофазе с входным сигналом.

На частотах, близких к нулю,

$$K_{0\,max} = \frac{K_{y\,max}}{1 + |K_{oc} K_{y\,max}|} = \frac{50}{1+2,5} = \frac{1}{3,5} K_{y\,max},$$

т. е. усиление уменьшается в 3,5 раза.

Однако нормированная характеристика $K_0(\omega)/K_{0\,max}$ (см. рис. 5.9) значительно равномернее, чем $K_y(\omega)$.

Заметим, что требуемую полосу пропускания можно получить и без отрицательной обратной связи, соответствующим образом уменьшив сопротивление нагрузки $R_н$. Однако при этом остальные характеристики усилителя — линейность усиления и стабильность уровня усиления — были бы ухудшены.

Дело в том, что из-за кривизны вольт-амперных характеристик активных элементов на выходе усилителя возникают высшие гармоники усиливаемого сигнала. Введение отрицательной обратной связи уменьшает в одинаковой степени как полезный сигнал, так и его гармоники (в месте их возникновения), однако повышением уровня полезного сигнала на входе усилителя относительный уровень гармоник на выходе можно понизить.

Рассмотрим в заключение влияние отрицательной обратной связи на стабильность режима усиления.

Пусть в линейной цепи, находящейся под действием гармонической ЭДС и охваченной обратной связью, произошло изменение какого-либо параметра: модуля или аргумента коэффициентов усиления $\mathbf{K}_y(i\omega)$ или $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$. Причинами этого изменения могут быть непостоянство напряжений источников питания усилителя, изменение температуры окружающей среды, механические вибрации, приводящие к изменению электрических параметров устройства и т. д. Выясним, как влияет обратная связь на относительное изменение выходного сигнала. Сначала рассмотрим случай, когда нестабильность имеется в цепи прямого усиления. Для упрощения анализа исходим из условия, что до изменения режима работы коэффициенты передачи $\mathbf{K}_y(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ являлись чисто действительными величинами K_y и K_{oc}, так что коэффициент передачи замкнутой цепи определялся выражением

$$K_0 = K_y/(1 - K_y K_{oc}). \tag{5.33}$$

Пусть обусловленное нестабильностью изменение заключается в том, что коэффициент K_y изменился на малую величину ΔK_y. В отсутствие обратной связи это привело бы к относительному изменению амплитуды выходного напряжения, равному $\Delta K_y/K_y$ (амплитуда ЭДС на входе считается неизменной).

Для определения относительного изменения амплитуды

при наличии обратной связи продифференцируем выражение (5.33) по $K_у$:

$$\frac{dK_0}{dK_у}=\frac{1}{(1-K_уK_{ос})^2}=\frac{K_у}{(1-K_уK_{ос})}\frac{1}{(1-K_уK_{ос})}\frac{1}{K_у},$$

откуда

$$\frac{dK_0}{K_0}=\frac{1}{1-K_уK_{ос}}\frac{dK_у}{K_у}. \qquad (5.34)$$

Из этого выражения видно, что относительное изменение выходного напряжения при наличии обратной связи (т. е. величина dK_0/K_0) может очень отличаться от изменения, которое имело бы место в ее отсутствие.

Если обратная связь отрицательна ($K_уK_{ос}<0$), имеет место ослабление нестабильности системы

$$\frac{dK_0}{K_0}=\frac{1}{1+|K_уK_{ос}|}\frac{dK_у}{K_у}.$$

При положительной обратной связи нестабильность увеличивается:

$$\frac{dK_0}{K_0}=\frac{1}{1-|K_уK_{ос}|}\frac{dK_у}{K_у}.$$

Отсюда следует, что для повышения стабильности усиления цепи целесообразно вводить *отрицательную* обратную связь. Это широко используют в современной радиоэлектронике. Абсолютную величину $|K_уK_{ос}|$ в зависимости от требований к стабильности системы доводят до 100 и более. При этом, естественно, в $(1+|K_уK_{ос}|)$ раз уменьшается и усиление цепи K_0. Это уменьшение может быть скомпенсировано увеличением $K_у$ (например, увеличением числа каскадов в кольце, охваченном обратной связью).

Введем в рассмотрение нестабильности в цепи обратной связи. Для этого продифференцируем выражением (5.33) по $K_{ос}$:

$$\frac{dK_0}{dK_{ос}}=-\frac{K_у(-K_у)}{(1-K_уK_{ос})^2}=\frac{K_у}{1-K_уK_{ос}}K_0,$$

откуда

$$\frac{dK_0}{K_0}=\frac{K_уK_{ос}}{1-K_уK_{ос}}\frac{dK_{ос}}{K_{ос}}.$$

В случае отрицательной связи при $|K_уK_{ос}|\gg 1$

$$\frac{dK_0}{K_0}\approx-\frac{dK_{ос}}{K_{ос}}.$$

Из этого соотношения видно, что влияние на K_0 нестабильности в самой цепи $K_{ос}$ не ослабляется обратной связью: нестабильность замкнутой цепи с отрицательной обратной связью при $|K_уK_{ос}|\gg 1$ равна нестабильности величины K_0.

Следовательно, при применении отрицательной обратной связи особое внимание следует обратить на повышение стабильности четырехполюсника K_{oc}. Это требование распространяется как на модуль, так и на аргумент (т. е. на фазовую характеристику) передаточной функции цепи. В практике выполнение этого требования облегчается тем, что основные дестабилизирующие факторы имеются в прямом усилителе K_y, содержащем активные элементы и элементы нагрузки; четырехполюсник же K_{oc}, обычно представляющий собой простую пассивную цепь, может быть сделан достаточно стабильным.

5.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В реальной цепи, охваченной обратной связью, всегда имеются реактивные элементы, накапливающие энергию. Даже в усилителе на резисторах имеются такие элементы (паразитные емкости схемы и усилительных приборов, индуктивности проводов и т. д.). Реактивные элементы создают дополнительные фазовые сдвиги. Если на какой-либо частоте эти сдвиги дают в сумме дополнительный угол в 180°, то обратная связь из отрицательной превращается в положительную и создаются условия, при которых может возникать паразитная генерация.

Это обстоятельство во многих случаях существенно ограничивает эффективность применения обратной связи, так как при больших значениях $|K_y K_{oc}|$ для устранения паразитной генерации требуются специальные фазокомпенсаторы и другие устройства, уменьшающие крутизну ФЧХ кольца обратной связи. Однако часто оказывается, что введение в схему новых элементов приводит лишь к сдвигу частоты паразитной генерации в область очень низких или очень высоких частот.

Итак, применение обратной связи тесно связано с проблемой обеспечения устойчивости цепи.

Для правильного построения цепи и выбора ее параметров большое значение приобретают методы определения устойчивости цепи. В настоящее время известно несколько критериев, различающихся больше по форме, нежели по существу. В основе большинства этих критериев лежит критерий устойчивости решений дифференциального уравнения, описывающего исследуемую цепь.

Пусть линейное однородное уравнение для цепи с сосредоточенными (и постоянными) параметрами задано в форме

$$b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x = 0, \qquad (5.35)$$

где x — ток, напряжение и т. д., а постоянные коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — действительные числа, зависящие от параметров цепи.

Решение уравнения (5.35), как известно, имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t},$$

где A_i — постоянные; p_i — корни характеристического уравнения

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1} p + b_n = 0. \quad (5.36)$$

Условие устойчивости состояния покоя цепи заключается в том, что после прекращения действия внешних возмущений цепь возвращается в исходное состояние. Для этого необходимо, чтобы возникающие в цепи при нарушении состояния покоя свободные (переходные) токи и напряжения были затухающими. А это, в свою очередь, означает, что корни $p_1, p_2, \ldots p_n$ уравнения (5.36) должны быть либо отрицательными действительными величинами, либо комплексными величинами с отрицательными действительными частями. Из этих простых физических представлений вытекает следующий фундаментальный критерий устойчивости любых линейных систем[1]: *система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.*

Заметим, что левая часть характеристического уравнения (5.36) представляет собой не что иное, как знаменатель передаточной функции цепи, записанной в форме

$$\mathbf{K}(p) = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m}, \quad n \leqslant m. \quad (5.37)$$

Таким образом, корни характеристического уравнения цепи являются полюсами передаточной функции $\mathbf{K}(p)$ этой цепи.

Отсюда следует, что сформулированные выше условия отрицательности действительных частей корней равносильны следующему положению: для устойчивости цепи необходимо, чтобы передаточная функция $\mathbf{K}(p)$ не имела полюсов в правой полуплоскости комплексной переменной p.

Это хорошо известное из теории цепей положение можно распространить и на передаточную функцию $\mathbf{K}_0(p)$ цепи с обратной связью.

В тех случаях, когда цепь описывается дифференциальным уравнением высокого порядка, исследование корней характеристического уравнения, необходимое для решения вопроса об устойчивости системы, является сложной задачей.

---

[1] Это фундаментальное положение было обосновано А. М. Ляпуновым, который в 90-х годах прошлого века заложил основы теории устойчивости. Рассматриваемый вопрос об устойчивости состояния покоя системы является частным случаем общей теории устойчивости Ляпунова.

Оказывается, ее можно решить, анализируя соотношения между коэффициентами уравнения без определения самих корней уравнения. Это можно выполнить с помощью теоремы Гурвица [1], которая утверждает, что для того чтобы действительные части всех корней уравнения

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0$$

с действительными коэффициентами и $b_0>0$ были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, составленные из коэффициентов уравнения $b_0, b_1, \ldots, b_n$ по следующей схеме:

$$\Delta_1=b_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 \end{vmatrix},\quad \Delta_5=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & b_9 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & b_8 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_5 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Сформулированный алгебраический критерий устойчивости часто называют критерием Рауса—Гурвица. При составлении определителей по указанной схеме коэффициенты с индексом, превышающим степень характеристического уравнения, заменяются нулями.

Поэтому, например, для уравнения четвертой степени получаются следующие определители:

$$\Delta_1=b_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все последовательные определители являются главными диагональными минорами определителя Δ_m. Так как последний столбец определителя Δ_m содержит лишь один отличный от нуля элемент b_m, расположенный на главной диагонали, то выполняется равенство

$$\Delta_m=b_m\Delta_{m-1}.$$

[1] Доказательство этой теоремы см., например, в книге: **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры.— М.: ГИФМЛ, 1972.

Отсюда следует, что в соответствии с теоремой Гурвица условия устойчивости можно формулировать в виде следующих неравенств:

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0, \ldots, \Delta_{m-1}>0,\ b_m>0.$$

Так, для характеристического уравнения второй степени

$$\Delta_1=b_1>0,\ b_2>0, \qquad (5.38)$$

для уравнения третьей степени

$$\Delta_1=b_1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}=b_1b_2-b_3b_0>0, \quad b_3>0, \qquad (5.39)$$

т. е. $b_1>0$, $b_1b_2>b_3b_0$, $b_3>0$. Так как b_0, b_1 и b_3 положительны, то и $b_2>0$.

Для уравнения четвертой степени:

1. $\Delta_1=b_1>0$, 2. $\Delta_2=b_1b_2-b_3b_0>0$,

3. $\Delta_3=b_3(b_1b_2-b_3b_0)-b_1^2b_4>0$, 4. $b_4>0$.

Из условия 3 на основании условий 4 и 1 вытекает неравенство

$$b_3(b_1b_2-b_0b_3)>b_1^2b_4>0.$$

Поэтому условие 3 можно заменить условием $b_3>0$. Таким образом, для уравнения четвертой степени получаются следующие условия устойчивости:

$$b_1>0,\ b_3>0,\ b_3(b_1b_2-b_0b_3)-b_1^2b_4>0,\ b_4>0. \qquad (5.40)$$

Критерий Рауса—Гурвица особенно удобен для проверки устойчивости цепи с заданными параметрами (т. е. коэффициентами дифференциального уравнения). Однако им неудобно пользоваться при экспериментах, так как обычно бывают известны не коэффициенты уравнения, а передаточная функция разомкнутой цепи $\mathbf{K}_у(p)\cdot\mathbf{K}_{ос}(p)$. Кроме того, критерий Рауса—Гурвица не дает ясных указаний, как неустойчивую цепь сделать устойчивой.

5.7. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Требование, чтобы передаточная функция

$$\mathbf{K}_0(p)=\mathbf{K}_у(p)/[1-\mathbf{K}_у(p)\,\mathbf{K}_{ос}(p)] \qquad (5.41)$$

не имела полюсов в правой полуплоскости $p=\sigma+i\omega$, т. е. в области, ограниченной полуокружностью бесконечно большого радиуса R и осью $i\omega$ (рис. 5.10, *а*), равносильно условию, что

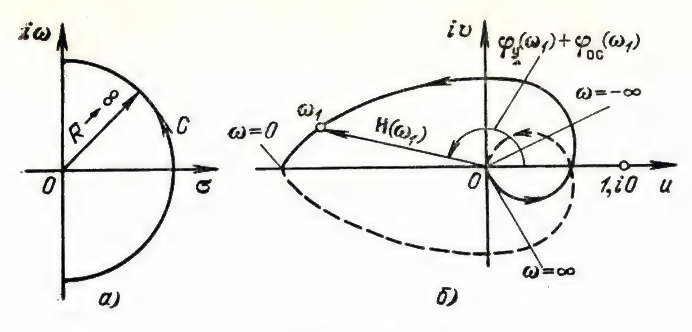


Рис. 5.10

знаменатель выражения (5.41) не должен иметь нулей в указанной области или, что то же самое, функция

$$\mathbf{H}(p)=\mathbf{K}_у(p)\,\mathbf{K}_{oc}(p) \tag{5.42}$$

не должна обращаться в единицу ни в одной из точек правой полуплоскости p. Но $\mathbf{H}(p)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутого кольца обратной связи, т. е. отношение напряжения на зажимах 2—2 к напряжению на зажимах 1—1 при разомкнутом кольце, как это показано на рис. 5.11. Следовательно, об устойчивости системы с обратной связью можно судить по характеристикам разомкнутого тракта.

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти от плоскости $p=\sigma+i\omega$ к плоскости $\mathbf{H}(p)=u+iv$ (рис. 5.10, *б*). Каждой точке p на плоскости σ, $i\omega$ соответствует определенное значение H на плоскости u, iv. Любой замкнутый контур на плоскости p преобразуется с помощью выражения (5.41) в некоторый (также замкнутый) контур на плоскости H.

Если исходный контур на плоскости p задан в виде контура на рис. 5.10, *а*, соответствующий ему контур на плоскости H называется годографом функции $\mathbf{H}$.

Показанный на рис. 5.10, *а* контур C можно разбить на два участка:

1) прямая $i\omega$ от ∞ до $-\infty$, 2) полуокружность бесконечно большого радиуса R.

На первом участке, где $\sigma=0$, $p=i\omega$, функция $\mathbf{H}(p)$ обращается в функцию $\mathbf{H}(i\omega)$. В соответствии с выражением (5.42) этот участок преобразуется на плоскости H в линию, определяемую соотношением

$$\mathbf{H}(i\omega)=\mathbf{K}_у(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega)=K_у(\omega)\,K_{oc}(\omega)\,e^{i(\varphi_у+\varphi_{oc})}=$$
$$=u(\omega)+iv(\omega), \tag{5.43}$$

откуда

$$\begin{aligned} u(\omega)&=K_у(\omega)K_{oc}(\omega)\cos(\varphi_у+\varphi_{oc}),\\ v(\omega)&=K_у(\omega)K_{oc}(\omega)\sin(\varphi_у+\varphi_{oc}). \end{aligned} \tag{5.44}$$

В этих выражениях $\varphi_у$ и $\varphi_{ос}$ — аргументы передаточных функций соответственно четырехполюсников $K_у(i\omega)$ и $K_{ос}(i\omega)$.

На втором участке контура C (см. рис. 5.10, *а*) при $R \to \infty$ функция $H(p) \to 0$. Это вытекает из общего выражения

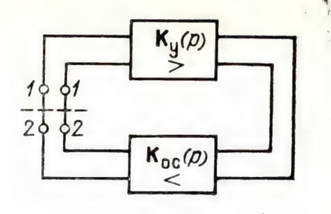


Рис. 5.11

$$K(p) = B\frac{(p-p_{01})(p-p_{02})\ldots(p-p_{0n})}{(p-p_{п1})(p-p_{п2})\ldots(p-p_{пm})}, \quad n \leqslant m, \quad (5.45)$$

которое при $|p| \to \infty$ можно представить в виде Bp^{n-m} [здесь B — постоянный коэффициент, а p_{0i} и $p_{пi}$ — соответственно нули и полюсы функции $K(p)$].

Совершенно аналогично в функцию $H(p)$ при $|p| \to \infty$ можно представить в форме $H(p) = Ap^{n-m}$, где n и m — числа соответственно нулей и полюсов функции $H(p)$.

При $n < m$ и $|p| \to \infty$ модуль функции $H(p)$ на полуокружности $R \to \infty$ равен нулю[1]. Таким образом, полуокружность бесконечно большого радиуса R на плоскости p преобразуется в точку, лежащую в начале координат на плоскости H, и для построения годографа H в виде замкнутого контура достаточно знать поведение $H(p)$ на оси $i\omega$, т. е. знать АЧХ и ФЧХ цепи $K_у(i\omega)K_{ос}(i\omega)$.

Обходу контура C на рис. 5.10, *а* в положительном направлении (против часовой стрелки) соответствует обход годографа H при изменении частоты от ∞ до $-\infty$, т. е. также против часовой стрелки (см. рис. 5.10, *б*).

Очевидно, что вся правая полуплоскость p преобразуется на плоскости H во внутреннюю область годографа. Следовательно, *если годограф передаточной функции разомкнутого тракта не охватывает точку 1, i0, то при замкнутой цепи обратной связи система устойчива, в противном случае система неустойчива.*

Это условие называется **критерием устойчивости Найквиста**.

Показанная на рис. 5.10, *б* диаграмма соответствует устойчивой системе. Это видно из того, что годограф H не охватывает точку 1, $i0$. Сплошной линией показана часть контура, соответствующая положительным частотам $0 < \omega < \infty$, а штриховой — часть контура, соответствующая отрицательным частотам. Так как функция $u(\omega)$ четная, а $v(\omega)$ нечетная относительно ω, то оба участка годографа симметричны относительно действительной оси.

Следует также отметить, что рис. 5.10, *б* построен для слу-

---

[1] Имеются в виду наиболее распространенные в практике четырехполюсники с передаточной функцией, у которой степень числителя n меньше степени знаменателя m.

чая, когда при $\omega=0$ передаточная функция $\mathbf{H}(i\omega)$ отлична от нуля (это возможно, например, для усилителей постоянного тока, в которых отсутствуют разделительные конденсаторы).

При сложной схеме цепи форма годографа иногда бывает настолько усложненной, что по ней трудно судить о том, охватывается или не охватывается годографом точка 1, $i0$. В подобных случаях оказывается полезным критерий, вытекающий из критерия Найквиста, основанный на подсчете числа пересечений оси $u(\omega)$ на участке 1, ∞. Для устойчивости цепи необходимо, чтобы годограф либо вообще не пересекал этот отрезок (как на рис. 5.10, *б*), либо пересекал его в положительном и отрицательном направлениях одинаковое число раз.

Критерий Найквиста получил наибольшее распространение в радиоэлектронике, автоматике и других смежных областях. Основное его преимущество: удобство оперирования с АЧХ и ФЧХ разомкнутой цепи. В некоторых системах, например содержащих линии, этот метод по существу является единственно приемлемым.

Суть частотного критерия можно наглядно пояснить, не прибегая к полярным диаграммам, на основе обычных АЧХ и ФЧХ разомкнутой цепи $\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}$.

Действительно, длина вектора $\mathbf{H}(i\omega)$, как это ясно из выражения (5.43), есть не что иное, как модуль коэффициента передачи разомкнутой цепи $|\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}|$, т. е. АЧХ этой цепи, а аргумент $\varphi_н$ (рис. 5.12), равный

$$\varphi_н = \operatorname{arctg}\frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \varphi_у(\omega) + \varphi_{ос}(\omega), \tag{5.46}$$

есть ФЧХ цепи $\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}$.

Совместив на общем графике АЧХ и ФЧХ, нетрудно ответить на вопрос об устойчивости цепи.

Если при изменении ω от 0 до ∞ фаза $\varphi_н$ не достигает 2π, то замкнутая цепь устойчива при любом значении $|\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}|$.

Однако, если $|\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}|$ при любой частоте меньше единицы, то цепь устойчива при любой ФЧХ. Цепь неустойчива, если имеются частоты, при которых одновременно выполняются два условия:

$$\varphi_у + \varphi_{ос} = n2\pi,\ n \text{ — целое число},\ H = K_у K_{ос} \geqslant 1. \tag{5.46'}$$

По существу эти два условия необходимы для обращения в нуль знаменателя в выражении (5.30), определяющем передаточную функцию замкнутой цепи.

Пример АЧХ и ФЧХ устойчивой цепи с обратной связью показан на рис. 5.12, а неустойчивой — на рис. 5.13. В первом случае на частоте ω_0, соответствующей $\varphi_у + \varphi_{ос} = 2\pi$, модуль $H<1$. Во втором случае $\omega_г$ — частота генерации. На рис. 5.12 и 5.13 отложены абсолютные значения $\varphi_у + \varphi_{ос}$. При учете знака реальных $\varphi_у$ и $\varphi_{ос}$ наклон ФЧХ будет отрицательным.

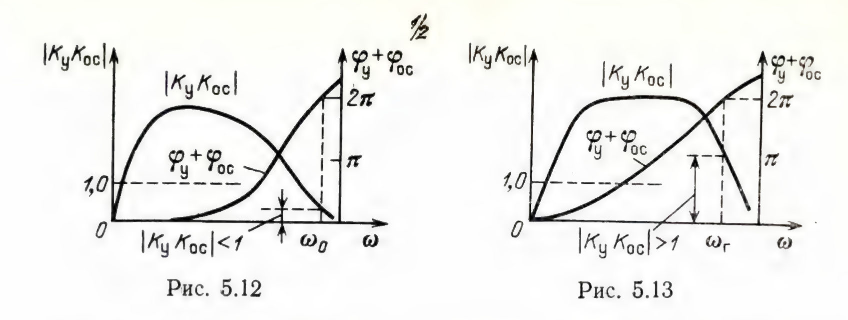


Рис. 5.12 Рис. 5.13

При построении этих характеристик учтено, что при $\omega=0$ и $\omega\to\infty$ величина $|\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}|$ обращается в нуль. При $\omega=0$ это обусловлено влиянием последовательно включенных конденсаторов в канале $K_у$ или $K_{ос}$, а при $\omega\to\infty$ — влиянием шунтирующих (параллельных) емкостей. Полное изменение фазы при изменении ω от 0 до ∞ зависит от числа звеньев в усилителе и в цепи обратной связи.

Для более сложных систем, когда набег фазы в тракте $\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}$ может быть больше 2π, приходится прибегать к критерию Найквиста.

Заметим, что условия (5.46′), соответствующие усилителю с положительной обратной связью, характерны для самовозбуждающейся системы. При обеспечении положительного знака обратной связи на резко выраженной частоте (например, с помощью нагрузки в виде высокодобротного колебательного контура), а также ограничении роста амплитуды с помощью нелинейного элемента получается автогенератор гармонического колебания.

5.8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ И ИНТЕГРИРОВАНИИ СИГНАЛОВ

В радиоэлектронике часто требуется осуществлять преобразование сигнала, имеющее характер дифференцирования или интегрирования.

На вход линейного устройства, осуществляющего дифференцирование, подается сигнал $s(t)$; с выхода должен сниматься сигнал вида $s_{вых}(t)=\tau_0 ds(t)/dt$.

В интегрирующем устройстве связь между выходным $s_{вых}(t)$ и входным $s(t)$ сигналами должна иметь следующий вид:

$$s_{вых}(t)=\frac{1}{\tau_0}\int s(t)\,dt.$$

В этих выражениях τ_0 — постоянная величина, имеющая размерность времени.

Дифференцирование и интегрирование являются линейными математическими операциями. Следовательно, для дифференциального или интегрального преобразования сигнала следует применять линейные цепи и элементы, обладающие требуемыми соотношениями между входными и выходными величинами. Этим требованиям отвечают в принципе такие элементы, как обычные конденсаторы или катушки индуктивности в сочетании с резистором при надлежащем съеме выходного сигнала.

Рассмотрим сначала цепь, изображенную на рис. 5.14.

Подразумевая под входным сигналом $s(t)$ ЭДС, составляем уравнение для тока в цепи $i(t)$

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=s(t). \tag{5.47}$$

Умножив это уравнение на C и обозначив постоянную времени цепи $\tau_0=RC$, получим

$$\tau_0 i(t)+\int i(t)\,dt=Cs(t). \tag{5.48}$$

Характер функциональной связи между током $i(t)$ и входным сигналом $s(t)$ зависит от постоянной времени τ_0. Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого τ_0. При очень малом τ_0 первым слагаемым в левой части уравнения (5.48) можно пренебречь. Продифференцировав оставшееся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по t, получим

$$i(t)\approx C\frac{ds(t)}{dt}.$$

Отсюда видно, что напряжение на резисторе R, совпадающее по форме с $i(t)$, пропорционально производной входного сигнала:

$$u_R=Ri(t)\approx RC\frac{ds(t)}{dt}=\tau_0\frac{ds(t)}{dt}.$$

Таким образом, приходим к схеме дифференцирующего четырехполюсника, показанной на рис. 5.15, в которой выходной сигнал снимается с резистора R.

При очень больших значениях τ_0 второе слагаемое в левой части уравнения (5.48) можно отбросить. При этом ток

$$i(t)\approx\frac{C}{\tau_0}s(t)=\frac{1}{R}s(t)$$

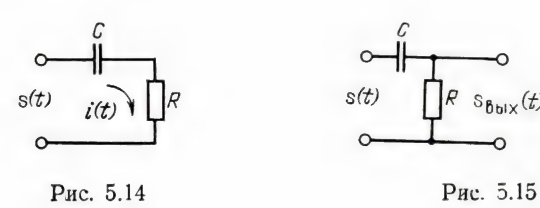


Рис. 5.14 Рис. 5.15

совпадает по форме с входным сигналом, а напряжение на конденсаторе C, равное

$$u_C=\frac{1}{C}\int i(t)\,dt\approx\frac{1}{CR}\int s(t)\,dt,$$

пропорционально интегралу от входного сигнала $s(t)$. Отсюда следует, что для осуществления интегрирования RC-цепь должна быть такой, как показано на рис. 5.16. Аналогичные результаты можно получить с помощью RL-цепи (рис. 5.17 и 5.18).

Постоянная времени $\tau_0=L/R$ дифференцирующей цепи должна быть достаточно мала, а интегрирующей — достаточно велика. Принцип дифференцирования для первой схемы (см. рис. 5.17) можно представить следующим образом. При достаточно большом сопротивлении R ток через RL-цепь почти не зависит от L и совпадает по форме с входным сигналом $s(t)$. Выходной же сигнал $s_{\text{вых}}(t)$, снимаемый с индуктивности L,

$$s_{\text{вых}}(t)=L\frac{di}{dt}\approx L\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{R}s(t)\right]=\tau_0\frac{ds(t)}{dt}.$$

В схеме, показанной на рис. 5.18, наоборот, ток в основном определяется индуктивностью L (так как R весьма мало):

$$i(t)\approx\frac{1}{L}\int s(t)\,dt,$$

выходной же сигнал, снимаемый с резистора R,

$$s_{\text{вых}}(t)=Ri(t)\approx\frac{1}{\tau_0}\int s(t)\,dt.$$

Уточним теперь использованные выше понятия «малое» и «большое» τ_0. Это проще всего сделать на основе спектрального рассмотрения. Если входной сигнал $s(t)$ имеет спектральную плотность $\mathbf{S}(\omega)$, то при точном дифференцировании выходной сигнал $s_{\text{вых}}(t)=\tau_0\dfrac{ds(t)}{dt}$ должен иметь спектральую плотность $i\omega\tau_0\mathbf{S}(\omega)$, а при точном интегрировании — плотность $(1/i\omega\tau_0)\mathbf{S}(\omega)$ [см. (2.52) и (2.54)]. Это означает, что для точного дифференцирования требуется четырехполюсник с коэффициентом передачи

$$\mathbf{K}(i\omega)=\tau_0 i\omega, \tag{5.49}$$

Рис. 5.16

Рис. 5.17

Рис. 5.18

а для точного интегрирования

$$\mathbf{K}(i\omega) = 1/\tau_0 i\omega. \quad (5.50)$$

Передаточные функции показанных на рис. 5.15 и 5.16 четырехполюсников соответственно равны

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{R}{R + 1/i\omega C} = \frac{\tau_0 i\omega}{1 + \tau_0 i\omega}, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{1}{\tau_0 i\omega} \frac{1}{1 + (1/\tau_0 i\omega)}. \quad (5.52)$$

Из сравнения выражений (5.49) и (5.51) видно, что для удовлетворительного дифференцирования требуется, чтобы выполнялось условие

$$\tau_0\omega \ll 1. \quad (5.53)$$

Это неравенство должно удовлетворяться для всех частот спектра входного сигнала, в том числе и для самой высокой.

Сравнивая (5.50) и (5.52), можно сделать вывод, что для удовлетворительного интегрирования требуется выполнение условия

$$\tau_0\omega \gg 1. \quad (5.54)$$

Это неравенство должно удовлетворяться для всех частот спектра входного сигнала, в том числе и для самой низкой.

Из неравенств (5.53) и (5.54) следует, что при заданной цепи дифференцирование тем точнее, чем ниже частоты, на которых концентрируется энергия входного сигнала, а интегрирование тем точнее, чем выше эти частоты.

Проиллюстрируем неравенство (5.53) следующим примером. Пусть сигнал $s(t)$ на входе схемы, показанной на рис. 5.15, является импульсом с длительностью $\tau_и$ и требуется указать значение τ_0, обеспечивающее удовлетворительное дифференцирование. Наивысшую частоту в спектре сигнала можно оценить величиной $f_m \approx 1/\tau_и$ (см. § 2.8). Следовательно, неравенство (5.53) принимает вид $\tau_0 2\pi/\tau_и \ll 1$ или $\tau_0 \ll \tau_и/2\pi$. Итак, постоянная времени дифференцирующей цепи τ_0 должна быть мала по сравнению с длительностью импульса $s(t)$.

Из неравенств (5.53), (5.44) вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) передаточная функция $\mathbf{K}(i\omega)$ цепи, осуществляющей это преобразование сигнала. Сказанное относится к простейшим *RC*- или *RL*-цепям, представленным на рис. 5.15—5.18. В пределе, при идеальном преобразовании $\mathbf{K}(i\omega) \to 0$.

Таким образом, простые *RC*- или *RL*-цепи пригодны лишь для приближенного дифференцирования или интегрирования сигналов. Указанные операции можно осуществить достаточно точно при введении в схемы рис. 5.15 и 5.16 усилителя с отри-

цательной обратной связью при обеспечении условия $|\mathbf{K}_у \mathbf{K}_{ос}| \gg \gg 1$. Этому требованию отвечают операционные усилители (ОУ).

На рис. 5.19 представлена схема дифференцирующего устройства на ОУ. Как известно, входное сопротивление ОУ $R_{вх}$ очень велико, благодаря чему коэффициент обратной связи, определяемый отношением $R_{вх}/(R_{вх}+R)$, близок к единице. Напряжение u_1, являющееся разностью напряжения, поступающего со входа, и напряжения обратной связи, настолько мало по сравнению с $u_{вых}$, а следовательно, и по сравнению с напряжением на R и C, что в первом приближении точки 1—2 в схеме на рис. 5.19 являются эквипотенциальными. Это позволяет считать, что подлежащий дифференцированию сигнал приложен непосредственно к емкости, так что ток

$$i_C \approx C de/dt.$$

Определим ток i_R. Падение напряжения Ri_R на резисторе R совпадает с напряжением $-(u_1+u_1K) = -u_{вых}(1+1/K)$, откуда вытекает равенство

$$i_R = -\frac{u_{вых}}{R}(1+1/K).$$

Учитывая, что ток i_1 близок к нулю (из-за малости u_1 и очень большого входного сопротивления ОУ), приходим к соотношению $i_R \approx i_C$, откуда

$$-\frac{u_{вых}}{R}(1+1/K) = C\frac{de}{dt},$$

или

$$u_{вых} = -\frac{RC}{1+1/K}\frac{de}{dt}. \tag{5.55}$$

В реальных ОУ усиление K измеряется тысячами и более, поэтому точность операции дифференцирования вполне достаточна для радиотехнических применений.

Схема интегрирующего устройства на ОУ представлена на рис. 5.20.

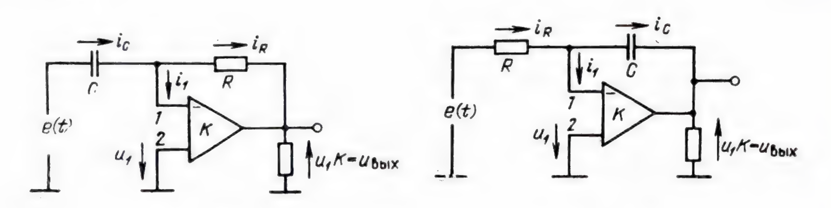


Рис. 5.19 Рис. 5.20

В данной схеме

$$i_R = e/R \quad \text{и} \quad i_C = C\frac{d[-u_{\text{вых}}(1+1/K)]}{dt} = i_R,$$

откуда

$$u_{\text{вых}} = -\frac{1}{RC(1+1/K)}\int e\,dt. \qquad (5.55')$$

Глава 6. ВОЗДЕЙСТВИЕ РАДИОСИГНАЛОВ НА ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

6.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В рассмотренных в предыдущей главе задачах мы имели дело с сигналами, которые по своей форме полностью совпадали с передаваемым сообщением. При передаче подобных сообщений задача сохранения информации тесно связана с задачей сохранения формы сигналов.

Иначе обстоит дело с радиосигналом, в котором информация заключена в одном из нескольких параметров высокочастотного колебания. Не обязательно сохранять полностью структуру этого колебания; достаточно лишь сохранить закон изменения того параметра, в котором заключена информация. Так, в случае амплитудно-модулированного колебания важно точно передать огибающую амплитуд, между тем как некоторое изменение частоты или фазы заполнения, не имеющее существенного значения, при анализе можно не учитывать. При передаче радиосигналов с угловой модуляцией, наоборот, основное внимание следует уделить точному воспроизведению закона изменения частоты и фазы.

Эти особенности радиосигналов открывают путь к упрощению методов анализа их передачи через линейные цепи. Упрощение особенно существенно, когда радиосигнал представляет собой узкополосный процесс, а цепь — узкополосную систему. Это как раз и характерно для реальных радиосигналов и реальных избирательных цепей. В § 3.1 уже отмечалось, что даже для «широкополосных» сигналов ширина спектра радиосигнала мала по сравнению с несущей частотой сигнала. Соответственно и полоса прозрачности цепи обычно мала по сравнению с ее резонансной частотой.

Анализ передачи сигнала в подобной ситуации существенно упрощается при использовании рассмотренного в § 3.10 аналитического сигнала

$$z_a(t) = a(t) + ia_1(t) = \mathbf{A}(t)\,e^{i\omega_0 t}, \qquad (6.1)$$

где комплексная огибающая $\mathbf{A}(t)=A(t)e^{i\theta(t)}$ содержит всю информацию, заложенную в сигнал $a(t)$ в результате модуляции, как амплитудной, так и угловой.

После прохождения через заданную цепь получается новый аналитический сигнал

$$z_{a\,\text{вых}}(t)=a_{\text{вых}}(t)+ia_{1\text{вых}}(t)=\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)\,e^{i\omega_0 t}=$$
$$=A_{\text{вых}}(t)e^{i\theta_{\text{вых}}(t)}e^{i\omega_0 t}, \qquad (6.2)$$

действительная часть которого

$$a_{\text{вых}}(t)=\operatorname{Re} z_{\text{вых}}(t)=$$
$$=A_{\text{вых}}(t)\cos[\omega_0 t+\theta_{\text{вых}}(t)] \qquad (6.3)$$

и есть выходной сигнал.

Таким образом, задача сводится к определению влияния цепи на комплексную огибающую входного сигнала.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ УЗКОПОЛОСНОЙ ЦЕПИ

Эта задача может быть решена двумя способами: в частотной или во временно́й области. Рассмотрим сначала первый, спектральный подход, основанный на заданной передаточной функции цепи $\mathbf{K}(i\omega)$.

На рис. 6.1 представлены спектр $\mathbf{S}_a(\omega)$ исходного высокочастотного модулированного колебания $a(t)$ и спектр $\mathbf{Z}_a(\omega)$ соответствующего ему аналитического сигнала $z_a(t)$. Штриховой линией показана АЧХ фильтра, причем для общности принято, что резонансная частота фильтра $\omega_р$ может не совпадать с центральной частотой сигнала ω_0, т. е. может иметь место расстройка. При этом предполагается, что расстройка

$\Delta\Omega=\omega_0-\omega_р$

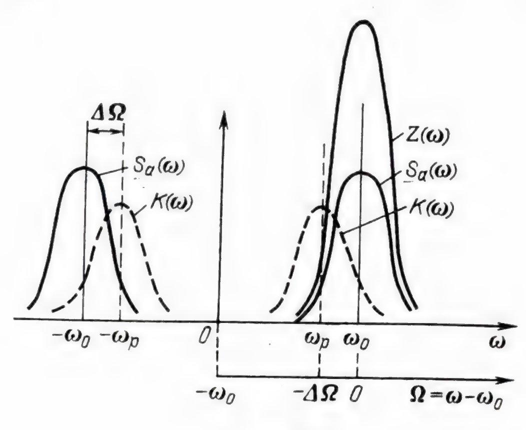


Рис. 6.1

близка по значению к полосе прозрачности цепи. Очевидно.

$$z_{a\,\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{Z}_a(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\mathbf{S}_a(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega. \qquad (6.4)$$

В § 3.10 было показано, что спектральная плотность $\mathbf{Z}_a(\omega)$ аналитического сигнала связана со спектральной плотностью комплексной огибающей соотношением

$$\mathbf{Z}_a(\omega)=\mathbf{Z}_a(\omega_0+\Omega)=\mathbf{S}_A(\Omega).$$

Перейдя, как и в (3.83), к новой переменной $\Omega=\omega-\omega_0$, запишем (6.4) в форме

$$z_{a\,\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{S}_A(\Omega)\,\mathbf{K}[i(\omega_0+\Omega)]\,e^{i(\omega_0+\Omega)t}d\Omega=$$

$$=\left\{\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{S}_A(\Omega)\,\mathbf{K}[i(\omega_0+\Omega)]\,e^{i\Omega t}d\Omega\right\}e^{i\omega_0 t}. \qquad (6.5)$$

Сопоставив это выражение с (6.2), видим, что выражение, стоящее в фигурных скобках, соответствует комплексной огибающей выходного колебания

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)=A_{\text{вых}}(t)\,e^{i\theta_{\text{вых}}(t)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^\infty \mathbf{S}_A(\Omega)\,\mathbf{K}[i(\omega_0+\Omega)]\,e^{i\Omega t}d\Omega. \qquad (6.6)$$

Дальнейшее упрощение анализа вытекает из свойств передаточной функции резонансных цепей, обладающих сильно выраженной частотной избирательностью. Модуль передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ быстро убывает при удалении ω от резонансной частоты $\omega_р$. Поэтому передаточную функцию целесообразно выражать в виде функции разности $\omega-\omega_р$.

Введем новое обозначение передаточной функции

$$\mathbf{K}(i\omega)=\mathbf{K}_1[i(\omega-\omega_р)].$$

Подставив теперь $\omega=\omega_0+\Omega$, получим

$$\mathbf{K}_1[i(\omega_0-\omega_р+\Omega)]=\mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega+\Omega)], \qquad (6.7)$$

где $\Delta\Omega=\omega_0-\omega_р$.

Так как при $\Omega=-\omega_0$ коэффициент передачи $\mathbf{K}_1[i(\Omega+\Delta\Omega)]$ практически равен нулю, нижний предел интеграла в выраже-

нии (6.6) можно заменить на $-\infty$. При этом (6.6) принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_A(\Omega)\mathbf{K}_1[i(\Omega+\Delta\Omega)]e^{i\Omega t}d\Omega. \quad (6.8)$$

Это выражение ничем не отличается от обычного интеграла Фурье, определяющего оригинал по заданной спектральной плотности огибающей $\mathbf{S}_A(\Omega)$ и передаточной функции $\mathbf{K}_1[i(\Omega+\Delta\Omega)]$.

Заменив $i\Omega$ на p, получим выражение в форме обратного преобразования Лапласа

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{S}_A(p)\mathbf{K}_1[p+i\Delta\Omega]e^{ipt}dp. \quad (6.9)$$

Вычисления, связанные с определением $\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)$ по формуле (6.9), значительно проще, чем при непосредственном определении $a_{\text{вых}}(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, так как переход от $\mathbf{S}_a(\omega)$ к $\mathbf{S}_A(p)$ и от $\mathbf{K}(p)$ к $\mathbf{K}_1(p+i\Delta\Omega)$ уменьшает вдвое число особых точек подынтегральной функции. После определения $\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)$ можно составить выражение (6.3) для $a_{\text{вых}}(t)$.

Составим теперь выражение для $a_{\text{вых}}(t)$ на основе заданной импульсной характеристики узкополосной цепи $g(t)$, которую представим в форме

$$g(t)=G(t)\cos[\omega_p t+\gamma(t)], \quad (6.10)$$

где ω_p — резонансная (собственная) частота фильтра.

Обращаясь к интегральной свертке, перепишем выражение (2.59) в виде

$$a_{\text{вых}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(x)\cos[\omega_0 x+\theta(x)]G(t-x)\times$$
$$\times\cos[\omega_p(t-x)+\gamma(t-x)]dx. \quad (6.11)$$

Произведение двух косинусов образует сумму двух колебаний с частотами $\omega_0-\omega_p$ и $\omega_0+\omega_p$. Интегралом от колебания, содержащего быстропеременный множитель, можно пренебречь по сравнению с первым интегралом в (6.11). Переходя к комплексной форме, получаем

$$a_{\text{вых}}(t)\approx$$
$$\approx\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}A(x)e^{i\theta(x)}G(t-x)e^{i\gamma(t-x)}e^{-i\Delta\Omega(t-x)}dx\right]e^{i\omega_0 t}\right\},$$

где $\Delta\Omega=\omega_0-\omega_p$.

Учитывая, что $A(x)e^{i\theta(x)}=\mathbf{A}(x)$ и $G(t-x)e^{i\gamma(t-x)}=\mathbf{G}(t-x)$ являются комплексными огибающими соответственно входного сигнала и импульсной характеристики фильтра, приходим к следующему выражению:

$$a_{\text{вых}}(t)\approx \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{G}(t-x)\,e^{-i\Delta\Omega(t-x)}dx\right]e^{i\omega_0 t}\right\}. \qquad (6.12)$$

Из этого выражения вытекает, что комплексная огибающая выходного сигнала

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)\approx\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{G}(t-x)\,e^{-i\Delta\Omega(t-x)}dx. \qquad (6.13)$$

Множитель $e^{-i\Delta\Omega(t-x)}$ учитывает расстройку центральной частоты спектра сигнала относительно резонансной частоты фильтра. При точной настройке ($\omega_0=\omega_р$)

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)\approx\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{G}(t-x)\,dx. \qquad (6.13')$$

Можно отметить, что при совпадении частот ω_0 и $\omega_р$ «несущая частота» ω_0, не содержащая в себе информации, как бы исключается из анализа. Задача сводится к анализу передачи комплексной огибающей радиосигнала через эквивалентную «низкочастотную» систему с передаточной функцией

$$\mathbf{K}_1(i\Omega)=\mathbf{K}[i(\omega_0+\Omega)].$$

Применение описанных выше методов иллюстрируется в следующем параграфе.

6.3. ПРОХОЖДЕНИЕ РАДИОИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Рассмотрим воздействие радиоимпульса с прямоугольной огибающей и немодулированным высокочастотным заполнением на резонансный усилитель, схема которого представлена на рис. 6.2. Передаточная функция усилителя

$$\mathbf{K}(i\omega)=-\frac{S}{G_i+G_н+i\omega C+1/i\omega L}=-K_{\max}\frac{1}{1+i(\omega-\omega_р)\tau_к}, \qquad (6.14)$$

где $K_{\max}=S/(G_i+G_н)$ — максимальное значение АЧХ усилителя (при $\omega=\omega_р$); $\omega_р=1/\sqrt{LC}$, $\tau_к=2Q_к/\omega_р$ — постоянная времени колебательного контура (с учетом $G_н=1/R_н$), $Q_к$ — добротность контура.

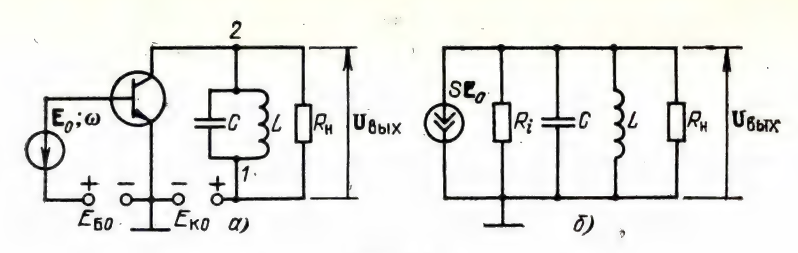


Рис. 6.2

Подставив в (6.14) $\omega=\omega_0+\Omega$, приведем это выражение к виду (6.7):

$$\mathbf{K}(i\omega)=\mathbf{K}_1[i(\Omega+\Delta\Omega)]=$$
$$=-K_{max}/[1+i(\Omega+\Delta\Omega)\tau_к] \qquad (6.15)$$

или

$$\mathbf{K}(p)=\mathbf{K}_1(p+i\Delta\Omega)=K_{max}/[1+(p+i\Delta\Omega)\tau_к]. \qquad (6.15')$$

При определении сигнала на выходе усилителя, как и в примере с передачей прямоугольного видеоимпульса через резистивный усилитель (см. § 5.4), рассмотрим сначала явления на фронте импульса, т. е. при включении в момент $t=0$ гармонической ЭДС $e(t)=E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$. В качестве выходной величины примем напряжение на колебательном контуре усилителя.

В данном случае огибающая $A(t)$ имеет вид скачка E_0 (в момент $t=0$), а с учетом начальной фазы θ_0 комплексная огибающая будет $\mathbf{A}(t)=E_0 e^{i\theta_0}$, $t\geqslant 0$.

Преобразование Лапласа этой функции

$$\mathbf{S}_A(p)=E_0 e^{i\theta_0}/p. \qquad (6.16)$$

Комплексную огибающую колебания на выходе усилителя определим непосредственно по формуле (6.9) с учетом (6.15′) и (6.16):

$$\mathbf{A}_{вых}(t)=-K_{max}E_0 e^{-i\theta_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p[1+(p+i\Delta\Omega)\tau_к]}. \qquad (6.17)$$

Подынтегральная функция имеет два полюса:

$p_1=0$, $p_2=-(1+i\Delta\Omega\tau_к)/\tau_к$.

Вычеты в этих полюсах легко вычисляются по формуле (5.21):

$$\mathrm{res}_1=\frac{1}{1+i\Delta\Omega x_к}=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_к)^2}},\quad \varphi=\mathrm{arctg}(\Delta\Omega\tau_х),$$

$$\mathrm{res}_2=\frac{e^{-(1/\tau_к+i\Delta\Omega)t}}{1+i\Delta\Omega\tau_к}=-\frac{e^{-t/\tau_к}e^{-i(\Delta\Omega t+\varphi)}}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_к)^2}}.$$

Тогда выражение (6.17) принимает вид (знак минус опущен)

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) = \frac{K_{\max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}}\left[e^{i(\theta_0-\varphi)} - e^{-t/\tau_{\text{к}}}e^{i(\theta_0-\varphi-\Delta\Omega t)}\right], \qquad (6.18)$$

а искомое физическое колебание

$$a_{\text{вых}}(t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)\, e^{i\omega_0 t}\right] = \frac{K_{\max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}} \operatorname{Re}\left[e^{i(\omega_0 t+\theta_0-\varphi)} - \right.$$

$$\left. - e^{-t/\tau_{\text{к}}}e^{i(\omega_{\text{р}} t+\theta_0-\varphi)}\right] = \frac{K_{\max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}}\left[\cos(\omega_0 t+\theta_0-\varphi) - \right.$$

$$\left. - e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos(\omega_{\text{р}} t+\theta_0-\varphi)\right]. \qquad (6.19)$$

Физический смысл полученного решения очевиден. Первое слагаемое в квадратных скобках определяет стационарную часть напряжения на выходе усилителя, а второе — свободное (затухающее) колебание.

Рассмотрим важные для практики следствия, вытекающие из выражения (6.19). Остановимся сначала на точной настройке контура на частоту возбуждающей ЭДС. Приравнивая $\omega_{\text{р}}$ к частоте ω_0, получаем $\Delta\Omega=0$. Тогда выражение (6.19) упрощается:

$$a_{\text{вых}}(t) = K_{\max}E_0(1-e^{-t/\tau_{\text{к}}})\cos(\omega_0 t+\theta_0) = A_{\text{вых}}(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0).$$

Из этого выражения видно, что при совпадении частот ω_0 и $\omega_{\text{р}}$ огибающая амплитуд выходного колебания нарастает по закону $1-e^{-t/\tau_{\text{к}}}$ независимо от фазы ЭДС в момент включения. Соответствующая этому случаю кривая, вычисленная по формуле $A_{\text{вых}}(t)/K_{\max}E_0 = 1-e^{-t/\tau_{\text{к}}}$, приведена на рис. 6.3.

При наличии расстройки огибающая $A_{\text{вых}}(t)$ изменяется по более сложному закону. Для выявления этого закона вычислим модуль разности в квадратных скобках выражения (6.18)

$$\left|1-e^{-t/\tau_{\text{к}}}e^{-i\Delta\Omega t}\right| = \sqrt{1-2e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos\Delta\Omega t + e^{-2t/\tau_{\text{к}}}}.$$

Таким образом,

$$\frac{A_{\text{вых}}(i)}{K_{\max}E_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})_2}}\sqrt{1-2e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos\Delta\Omega t + e^{-2t/\tau_{\text{к}}}}. \qquad (6.20)$$

Графики этой функции для двух значений параметра расстройки $\Delta\Omega\tau_{\text{к}}$, равных 1 и 2, приведены на том же рис. 6.3.

Видно, что при значительных расстройках процесс установления огибающей принимает колебательный характер. Это объясняется биением двух колебаний: частот ω_0 и $\omega_{\text{св}}$. Последняя при сделанном выше допущении о высокой добротности контура очень мало отличается от резонансной частоты $\omega_{\text{р}}$.

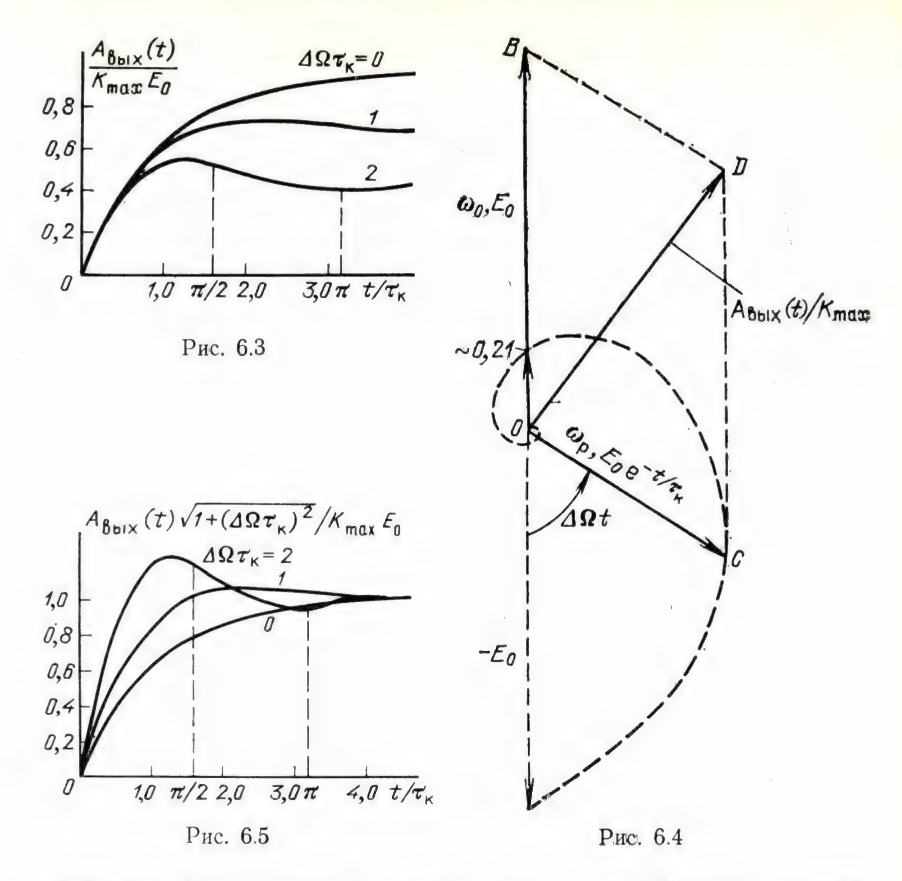


Рис. 6.3

Рис. 6.5

Рис. 6.4

Эффект суммирования вынужденного и свободного колебаний поясняется векторной диаграммой, показанной на рис. 6.4. При вращении оси времени с угловой частотой ω_0 вектор OB, соответствующий стационарному колебанию, неподвижен, а вектор OC, соответствующий свободному колебанию [см. (6.19)], вращается с угловой частотой $\Delta\Omega=\omega_0-\omega_р$. Записав длину этого вектора в форме $E_0e^{-\Delta\Omega t/\Delta\Omega\tau_к}$ и задав значение параметра $\Delta\Omega\tau_к$, можно проиллюстрировать характер изменения огибающей $A_{вых}(t)$.

Векторная диаграмма на рис. 6.4 построена для параметра $\Delta\Omega\tau_к=2$, когда $e^{-\Delta\Omega t/\Delta\Omega\tau_к}=e^{-\Delta\Omega t/2}$.

В момент времени t, соответствующий $\Delta\Omega t=\pi$, вектор свободного колебания совпадает по направлению с вектором вынужденного колебания, так что результирующий вектор будет $E_0(1+e^{-\pi/2})\approx 1{,}21E_0$. Очевидно, что при $\Delta\Omega t=2\pi$ результирующий вектор будет $E_0(1-e^{-\pi})\approx 0{,}96E_0$ и т. д.

Из рис. 6.5, где приведены графики нормированной огибающей, т. е. функции $A_{вых}(t)\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_к^2}/K_{max}E_0$, видно, что с увеличением расстройки крутизна фронта огибающей растет и

общая продолжительность процесса установления несколько уменьшается.

Используем полученные результаты для определения формы и параметров радиоимпульса на выходе одноконтурного усилителя при прямоугольной форме огибающей импульса на входе.

Колебание на входе (рис. 6.6,a) определяется выражением

$$a(t)=\begin{cases}E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0) & \text{при } 0<t<T,\\ 0 & \text{при } t<0 \text{ и } t>T.\end{cases}$$

Как и в § 5.4, задачу можно решить, рассматривая независимо явления на фронте и срезе импульса с последующей суперпозицией полученных решений.

Если длительность импульса T больше фактического времени установления режима в контуре при включении гармонической ЭДС, то к моменту окончания входного импульса на выходе усилителя амплитуда колебания будет равна стационарному значению

$$A_{\text{вых ст}}=K_{\max}E_0/\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_{\text{к}}^2}=\text{const}.$$

Начиная с момента $t=T$, после прекращения действия внешней ЭДС на выходе остается лишь свободное колебание, которое можно представить в форме

$$a_{\text{вых}}(t)=A_{\text{вых ст}}e^{-t/\tau_{\text{к}}}\cos(\omega_{\text{р}}t+\varphi_0)=\frac{K_{\max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_{\text{к}}^2}}e^{-t/\tau_{\text{к}}}\times$$

$$\times\cos(\omega_{\text{р}}t+\varphi_0) \text{ при } t>T, \tag{6.21}$$

где φ_0 — фаза напряжения на контуре в момент $t=T$.

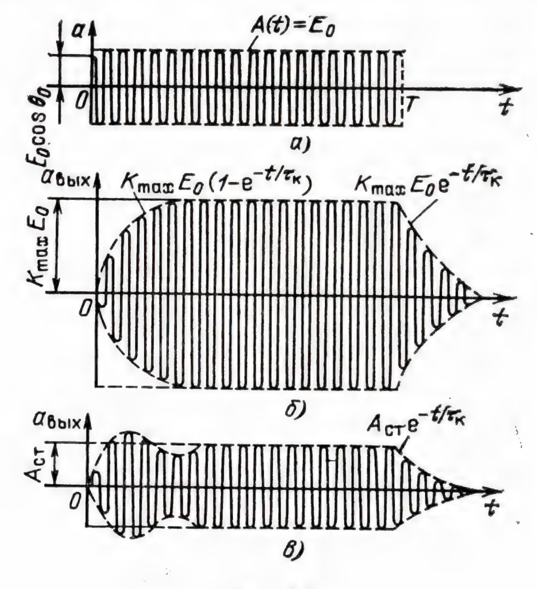


Рис. 6.6

Таким образом, в отличие от фронта на срезе импульса огибающая амплитуд имеет вид экспоненты независимо от соотношения частот ω_0 и $\omega_р$. Сигнал на выходе усилителя при $\Delta\Omega\tau_к=0$ и $\Delta\Omega\tau_к=2$ (рис. 6.6,*б* и *в*) изображен для случая, когда длительность импульса значительно больше времени установления стационарного режима.

В заключение проиллюстрируем применение *временнóго варианта* метода огибающей на примере рассмотренного выше сигнала $a(t)=E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ и резонансного усилителя. Импульсная характеристика усилителя

$$g(t)=(S/C)\,e^{-t/\tau_к}\cos\omega_р t,\quad t\geqslant 0 \tag{6.22}$$

[знак минус, как и в (6.18), отброшен].

Переходя к комплексной форме, записываем

$$a(t)=E_0\mathrm{Re}[e^{i\theta_0}e^{i\omega_0 t}]=\mathrm{Re}[\mathbf{E}(t)\,e^{i\omega_0 t}],\ t\geqslant 0,$$

где $\mathbf{E}(t)=E_0e^{i\theta_0}$, (6.23)

$$g(t)=(S/C)\,e^{-t/\tau_к}\mathrm{Re}(e^{i\omega_р t})=(S/C)\,e^{-t/\tau_к}\mathrm{Re}[e^{-i\Delta\Omega t}e^{i\omega_0 t}]=$$

$$=\mathrm{Re}[\mathbf{G}(t)\,e^{i\omega_0 t}],\ t\geqslant 0,$$

$$\mathbf{G}(t)=(S/C)\,e^{-t/\tau_к}e^{-i\Delta\Omega t} \tag{6.24}$$

— комплексная огибающая импульсной характеристики, отнесенная к частоте ω_0.

Подставив (6.23) и (6.24) в (6.13), получим

$$\mathbf{A}_{вых}(t)=\frac{1}{2}\int_0^t E_0e^{i\theta_0}\frac{S}{C}\,e^{-(t-x)/\tau_к}e^{-i\Delta\Omega(t-x)}dx.$$

С учетом равенств $\tau_к=2RC$ и $(S/C)\tau_к=2SR=2K_{max}$ [см. (6.15)] последнее выражение легко приводится к виду

$$\mathbf{A}_{вых}(t)=\frac{K_{max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_к)^2}}\left[e^{i(\theta_0-\varphi)}-e^{-t/\tau_к}e^{i(\theta_0-\varphi-\Delta\Omega t)}\right]. \tag{6.25}$$

Это выражение совпадает с (6.18).

6.4. ЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАНСНОМ УСИЛИТЕЛЕ

На вход одноконтурного усилителя, изображенного на рис. 6.2, воздействует колебание

$$a(t)=E_0[1+M\cos(\Omega t+\gamma_0)]\cos(\omega_0 t+\theta_0). \tag{6.26}$$

Требуется выявить структуру колебания на выходе усилителя.

Колебательный контур, входящий в состав усилителя, является инерционной цепью, что не может не оказать влияния на параметры выходного колебания.

В данном случае простейшей гармонической модуляции амплитуды, когда спектр колебания содержит всего три составляющие, структуру колебания на выходе усилителя проще всего отыскать, рассматривая прохождение через усилитель каждой из составляющих отдельно.

Записав выражение (6.26) в форме

$$a(t)=E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)+(ME_0/2)\cos[(\omega_0+\Omega)t+\theta_0+\gamma_0]+$$
$$+(ME_0/2)\cos[(\omega_0-\Omega)t+\theta_0-\gamma_0], \qquad (6.27)$$

найдем передаточные функции усилителя для частот ω_0, $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$.

Основываясь на выражении (6.15′) и положив $\Delta\Omega=0$ (точная настройка колебательного контура на несущую частоту ω_0), получаем:

для несущей частоты ω_0

$$\mathbf{K}(i\omega_0)=K_1(0)=-K_{\max};$$

для боковой частоты $\omega_0+\Omega$

$$\mathbf{K}[i(\omega_0+\Omega)]=\mathbf{K}_1(i\Omega)=-\frac{K_{\max}}{1+i\Omega\tau_к}=-\frac{K_{\max}}{\sqrt{1+(\Omega\tau_к)^2}}e^{-i\xi_0};$$

для боковой частоты $\omega_0-\Omega$

$$\mathbf{K}[i(\omega_0-\Omega)]=\mathbf{K}_1(-i\Omega)=-\frac{K_{\max}}{1-i\Omega\tau_к}=-\frac{K_{\max}}{\sqrt{1+(\Omega\tau_к)^2}}e^{i\xi_0},$$

где $\xi_0=\operatorname{arctg}\Omega\tau_к$ — фазовый сдвиг в колебательном контуре на боковых частотах (запаздывание на верхней и опережение на нижней боковых частотах).

С учетом амплитудных и фазовых изменений, претерпеваемых спектральными составляющими в усилителе, можно представить выходное колебание в форме, аналогичной (6.27):

$$a_{вых}(t)=-K_{\max}E_0\left\{\cos(\omega_0 t+\theta_0)+\frac{M}{2}\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega\tau_к)^2}}\cos[(\omega_0+\Omega)t+\right.$$
$$\left.+\theta_0+\gamma_0-\xi_0]+\frac{M}{2}\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega\tau_к)^2}}\cos[(\omega_0-\Omega)t+\theta_0-\gamma_0+\xi_0]\right\}.$$

Свернув это выражение, получим

$$a_{вых}(t)=-K_{\max}E_0\left[1+\frac{M}{\sqrt{1+(\Omega\tau_к)^2}}\cos(\Omega t+\gamma_0-\xi_0)\right]\cos(\omega_0 t+$$
$$+\theta_0). \qquad (6.28)$$

Сопоставим полученное выражение с (6.27). Как и следовало ожидать, частота и фаза АМ колебания при прохождении через резонансный усилитель ($\omega_0=\omega_р$) не изменяются.

Инерционность колебательной цепи влияет на огибающую колебания:

1) глубина модуляции на выходе

$$M_{\text{вых}} = M/\sqrt{1+\Omega^2\tau_{\text{к}}^2} = M/\sqrt{1+a_{\text{эк}}^2}$$

меньше, чем на входе; относительное уменьшение глубины модуляции, иногда называемое коэффициентом демодуляции,

$$D = \frac{M_{\text{вых}}}{M} = \frac{1}{\sqrt{1+a_{\text{эк}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\Omega Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{р}})^2}}$$

(график зависимости D от частоты модуляции Ω, представленный на рис. 6.7, соответствует правой ветви резонансной кривой колебательного контура);

2) огибающая амплитуд на выходе отстает по фазе от огибающей входного колебания на угол

$$\xi_0 = \operatorname{arctg} a_{\text{эк}} = \operatorname{arctg}(2\Omega Q_{\text{эк}}/\omega_{\text{р}}).$$

Оба этих фактора обусловлены тем, что инерционность колебательной цепи снижает скорость изменения во времени огибающей колебания. При этом, однако, форма огибающей остается неизменной (гармонической).

Смысл этого результата поясняется рис. 6.8, *а*, на котором показано положение спектра входного колебания относительно резонансной характеристики колебательного контура. Чем выше частота модуляции Ω, тем больше относительное ослабление амплитуды колебаний боковых частот и, следовательно, меньше глубина модуляции колебания.

Полученные из анализа тональной модуляции результаты позволяют представить общую картину явлений при передаче через контур колебаний, модулированных по амплитуде сложным сообщением. Входящим в такое сообщение различным частотам Ω соответствует неодинаковое ослабление: чем выше частота, тем сильнее выражена демодуляция. Так как при приеме колебаний напряжение на выходе детектора приемника пропорционально коэффициенту модуляции, получается относительное ослабление высших частот сообщения. Таким образом, зависимость $D(\Omega)$ определяет степень линейных частотных искажений передаваемого сообщения. Подобные искажения называются линейными потому, что они не сопровождаются возникновением новых частот.

Имеет место также задержка сообщения. Это объясняется тем, что фазовый сдвиг огибающей (при тональной модуляции) зависит от частоты. Колебательный контур влияет на сообщение, содержащееся в огибающей, так же, как фильтр нижних частот при

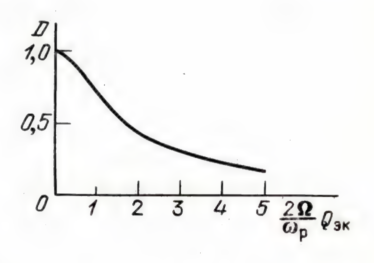


Рис. 6.7

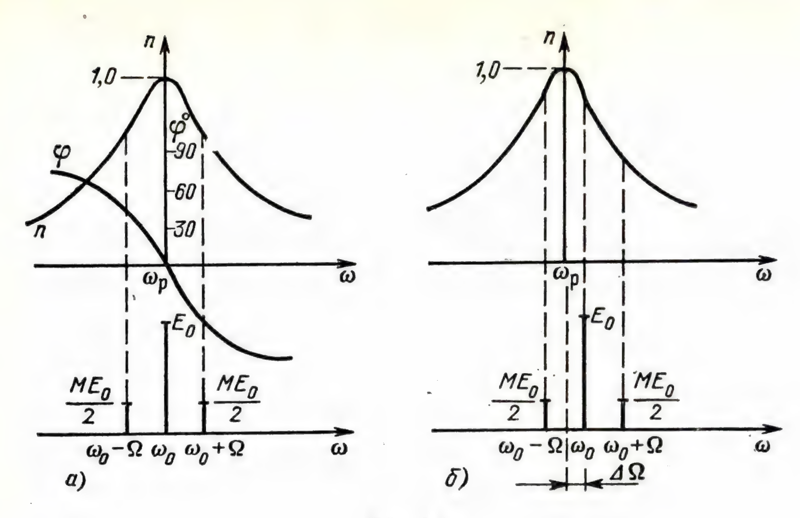


Рис. 6.8

пропускании непосредственно через него сообщения. Задержка определяется наклоном ФЧХ

$$t_0=\left|\frac{d\varphi}{d\Omega}\right|=\left|\frac{d\left(\operatorname{arctg}\frac{2\Omega}{\omega_р}Q_{эк}\right)}{d\Omega}\right|=\frac{1}{1+\left(\frac{2\Omega}{\omega_р}Q_{эк}\right)^2}\,\frac{2Q_{эк}}{\omega_р}.$$

Обычно задержку определяют по наклону ФЧХ в точке $\Omega=$ $=0$. Тогда

$$t_0=2Q_{эк}/\omega_р=\tau_к.$$

Итак, задержка сообщения в одиночном контуре, полоса прозрачности которого достаточна для удовлетворительного пропускания спектра сообщения, равна постоянной времени контура.

Рассмотрим теперь случай неточной настройки контура на несущую частоту модулированного колебания (рис. 6.8, *б*). Несовпадение частот ω_0 и $\omega_р$ приводит к асимметрии боковых частот на выходе усилителя. Возникновение асимметрии поясняется векторной диаграммой выходных напряжений, представленной на рис. 6.9. На этой диаграмме вектор OD изображает несущее колебание, фаза которого запаздывает относительно фазы входной ЭДС (принятой равной нулю) на угол θ_0 (так как рис. 6.8, *б* соответствует положительной расстройке $\Delta\Omega=\omega_0-$ $-\omega_р>0$). Амплитуда колебания верхней боковой частоты (вектор DC_1) в данном случае значительно меньше амплитуды колебания нижней боковой частоты (вектор DC_2). Длина равнодействующего вектора OF, изображающего результирующее ко-

лебание, изменяется по сложному закону, не совпадающему с гармоническим законом изменения огибающей входной ЭДС.

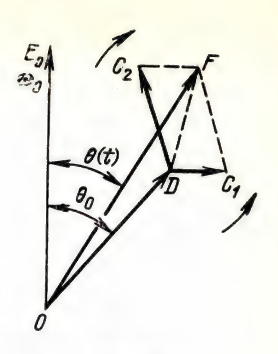


Рис. 6.9

Следует иметь в виду, что для восстановления передаваемого сообщения на выходе радиолинии, работающей с амплитудной модуляцией, применяется амплитудный детектор, представляющий собой нелинейное устройство. Напряжение на выходе детектора пропорционально огибающей модулированного колебания. Из этого следует, что нарушение симметрии амплитуд и фаз колебаний боковых частот при неточной настройке контура на несущую частоту ω_0 приводит к нелинейным искажениям передаваемых сообщений. Эти искажения проявляются в возникновении новых частот, кратных частоте Ω полезной модуляции.

Кроме искажения формы огибающей амплитуд возникает также паразитная фазовая модуляция колебания, так как при вращении векторов DC_1 и DC_2 (см. рис. 6.9) непрерывно изменяется фаза $\theta(t)$ вектора OF относительно фазы несущего колебания (принятой в качестве исходной). В некоторых случаях это может привести к дополнительным искажениям сигнала.

Полученные выше результаты нетрудно распространить на любую колебательную цепь, например на связанные контуры. Если резонансная кривая такой цепи симметрична относительно несущей частоты ω_0, то правую ветвь этой кривой можно рассматривать как характеристику коэффициента D (см. рис. 6.7).

6.5. ПРОХОЖДЕНИЕ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНУЮ ЦЕПЬ

Наряду с непрерывной фазовой модуляцией в радиотехнике находит применение ф а з о в а я м а н и п у л я ц и я, заключающаяся в скачкообразном изменении фазы высокочастотного колебания на 180° в определенные моменты времени (рис. 6.10, *а*). Амплитуда и частота колебания поддерживаются при этом неизменными. На рис. 6.10, *б* фазы 0 и π чередуются периодиче-

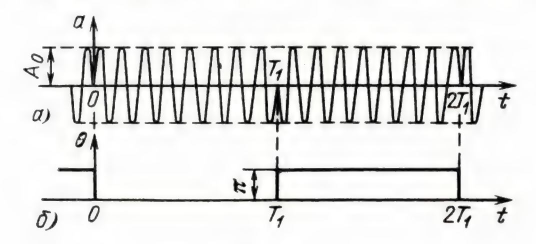


Рис. 6.10

ски; при передаче реальных сигналов закон чередования может быть более сложным.

Рассмотрим явления в резонансных цепях, возникающие в моменты скачкообразного изменения фазы входного сигнала. При этом будем считать, что тактовые интервалы T_1 между двумя соседними скачками фазы намного больше длительности возникающих в цепи переходных процессов, так что рассмотрение каждого из скачков изолированно от предыдущих вполне допустимо.

Для выявления принципиальной стороны вопроса ограничимся простейшим случаем — передачей фазоманипулированного сигнала через одиночный колебательный контур, настроенный на частоту сигнала ω_0, т. е. $\omega_0=\omega_р$.

Совместим начало отсчета времени с моментом скачка, как это показано на рис. 6.10. Тогда для $t>0$ выходной сигнал на основании принципа суперпозиции можно представить в виде суммы свободного колебания, существующего после выключения ранее действовавшего сигнала, и нарастающего колебания с фазой заполнения, на 180° отличающейся от фазы предыдущего сигнала.

Пренебрегая различием между собственной частотой контура $\omega_{св}$ и резонансной частотой $\omega_р$, можно для двух упомянутых колебаний написать следующие выражения:

$$a_1(t)=A_0 e^{-\alpha_к t}\cos\omega_р t,\ a_2(t)=-A_0(1-e^{-\alpha_к t})\cos\omega_р t.$$

Знак минус в правой части второго выражения учитывает скачок фазы.

Результирующий сигнал на выходе цепи (рис. 6.11)

$$a_{вых}=a_1(t)+a_2(t)=(-A_0+A_0 e^{-\alpha_к t}+A_0 e^{-\alpha_к t})\cos\omega_р t=$$
$$=-A_0(1-2e^{-\alpha_к t})\cos\omega_р t.$$

Из-за инерционности контура скачок фазы входного сигнала приводит к изменению амплитуды выходного сигнала. В момент времени $t_0=0{,}69/\alpha_к$, когда $e^{-\alpha_к t_0}=1/2$, огибающая обращается в нуль. Чем меньше $\alpha_к$ (или чем больше добротность контура), тем больше t_0, т. е. тем протяженнее процесс установления колебания с новой фазой.

В более сложных колебательных цепях, а также при наличии расстройки между частотами ω_0 и $\omega_р$ картина несколько усложняется: помимо возникновения паразитного изменения

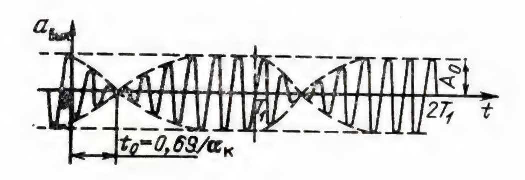


Рис. 6.11

огибающей нарушается и характер изменения фазы. Вместо скачкообразного изменения получается плавный переход фазы от первоначального значения к новому. При этом способ определения структуры выходного сигнала остается прежним, только $a_1(t)$ и $a_2(t)$ в выражении для $\alpha_{\text{вых}}(t)$ будут представлять собой колебания с несовпадающими частотами. Вычислив модуль и аргумент суммарного колебания, нетрудно найти огибающую и фазу выходного сигнала.

6.6. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТНО-МАНИПУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНУЮ ЦЕПЬ

Пусть сигнал на входе избирательной цепи имеет вид колебания, изображенного на рис. 6.12, *а*. В некоторые моменты времени частота скачком изменяется от ω_1 до ω_2 или от ω_2 до ω_1 при постоянной амплитуде и непрерывной фазе в моменты скачков частоты. Последнее допущение продиктовано желанием выяснить влияние на параметры выходного сигнала одной лишь манипуляции частоты, без наложения манипуляции фазы (рассмотренной в предыдущем параграфе).

Совместим начало отсчета времени с моментом изменения частоты от ω_1 до ω_2 (рис. 6.12, *б*) и положим, как и в § 6.5, что к моменту $t=0$ все процессы, связанные с предыдущим скачком частоты, уже закончены. Таким образом, при $t<0$ выходной сигнал представляет собой гармоническое колебание с частотой ω_1 и постоянной амплитудой A_0.

На первый взгляд может показаться, что изменение скачком одной лишь частоты входного сигнала при постоянстве амплитуды и отсутствии скачка фазы не должно сопровождаться переходными процессами. В действительности это не так, поскольку в цепях, запасающих энергию, переход от одной частоты к другой неизбежно связан с изменением запаса энергии.

Основная идея, на которой базируется дальнейшее рассмотрение, заключается в том, что мгновенное изменение частоты внешней ЭДС эквивалентно выключению старой ЭДС с частотой ω_1 и включению в тот же момент новой ЭДС с частотой ω_2. Аналогичный прием был использован в § 6.5 для скачка фазы входного сигнала, однако в данном случае дело несколько осложняется несовпадением частот различных слагаемых.

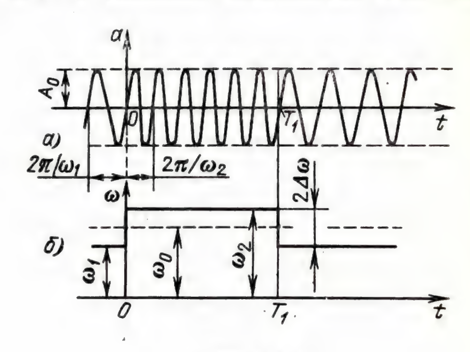


Рис. 6.12

Итак, результирующее колебание на выходе линейной цепи при $t>0$

$$a_{\text{вых}}(t)=a_1(t)+a_2(t), \qquad (6.29)$$

где $a_1(t)$ — свободное колебание, связанное с выключением в момент $t=0$ старой ЭДС (частоты ω_1); $a_2(t)$ — нарастающее колебание, обусловленное включением новой ЭДС (частоты ω_2).

Рассмотрим одиночный колебательный контур при съеме выходного напряжения с емкости (рис. 6.13). Резонансную частоту контура ω_p приравняем частоте ω_0, а скачок частоты $2\Delta\omega$ (см. рис. 6.12, *б*) будем считать симметричным относительно ω_0:

$$\omega_1=\omega_0-\Delta\omega=\omega_p-\Delta\omega,\ \omega_2=\omega_0+\Delta\omega=\omega_p+\Delta\omega.$$

Тогда свободное колебание $a_1(t)$ в соответствии с (6.25) можно записать в форме

$$a_1(t)=\frac{QA_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}}\,e^{-t/\tau_к}\sin(\omega_p t-\varphi_1),\ t\geqslant 0,$$

где множитель Q соответствует K_{max}, косинус заменен синусом ввиду съема напряжения с емкости, входящей в последовательный контур, а $\varphi_1=\operatorname{arctg}(\omega_1-\omega_p)\tau_к$. Поскольку $\omega_1<\omega_p$, то $\varphi_1=$ $=-\operatorname{arctg}\Delta\omega\tau_к$ и

$$a_1(t)=\frac{QA_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}}\,e^{-t/\tau_к}\sin(\omega_p t+\varphi),\ t\geqslant 0$$

(здесь использовано обозначение $\varphi=\operatorname{arctg}\Delta\omega\tau_к$).

В результате аналогичных рассуждений колебание $a_2(t)$ по аналогии с (6.19) можно представить в виде

$$a_2(t)=\frac{QA_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau^2_к}}\left[\sin(\omega_2 t-\varphi)-e^{-t/\tau_к}\sin(\omega_p t-\varphi)\right],$$

$$t\geqslant 0. \qquad (6.30)$$

В данном случае φ входит со знаком минус, так как на частоте $\omega_2>\omega_p$ ток в контуре отстает по фазе относительно ЭДС.

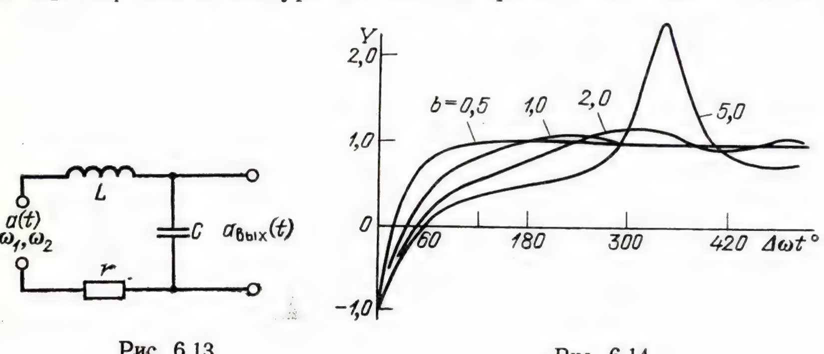


Рис. 6.13

Рис. 6.14

После подстановки в (6.30) $\omega_2=\omega_р+\Delta\omega$ выражение (6.29) приводится к виду

$$a_{вых}(t)=\frac{QA_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}}\{\cos(\Delta\omega t-\varphi)\sin\omega_р t+$$

$$+[\sin(\Delta\omega t-\varphi)+2\sin\varphi e^{-t/\tau_к}]\cos\omega_р t\}=$$

$$=A_{вых}(t)\sin[\omega_р t+\xi(t)].$$

Огибающая $A_{вых}(t)$ и переменная часть фазы $\xi(t)$ выходного сигнала определяются выражениями

$$A_{вых}(t)=\frac{QA_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}}\sqrt{1+4e^{-t/\tau_к}\sin\varphi\sin(\Delta\omega t-\varphi)+\ldots}$$

$$\overline{\ldots+4e^{-2t/\tau_к}\sin^2\varphi},$$

$$\xi(t)=\mathrm{arctg}\frac{\sin(\Delta\omega t-\varphi)+2e^{-t/\tau_к}\sin\varphi}{\cos(\Delta\omega t-\varphi)}.$$

Основной интерес в данном случае представляет закон изменения частоты выходного колебания

$$\omega(t)=\omega_р+\frac{d\xi(t)}{dt}=\omega_р+\Delta\omega(t).$$

Выполнив дифференцирование, после некоторых несложных выкладок[1] можно прийти к следующему результату:

$$Y=\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta\omega}=\frac{1-2e^{-\Delta\omega t/b}\cos\Delta\omega t}{1+4e^{-\Delta\omega t/b}\sin\varphi[\sin(\Delta\omega t-\varphi)+e^{-\Delta\omega t/b}\sin\varphi]},$$

где $b=\Delta\omega/\alpha_к$.

Графики $Y(\Delta\omega t)$ для нескольких значений параметра b построены на рис. 6.14. Заметим, что полоса пропускания контура, определяемая по ослаблению сигнала до $1/\sqrt{2}$ от максимального значения, равна $2\alpha_к=\omega_р/Q$. Следовательно, параметр b есть не что иное, как отношение полного скачка частоты сигнала $2\Delta\omega$ к полосе пропускания $2\alpha_к$.

Из рис. 6.14 видно, что при $b\leqslant0{,}5$, т. е. когда $\Delta\omega/\alpha_к\leqslant0{,}5$, процесс установления частоты практически не отличается от процесса установления амплитуды при внезапном включении ЭДС. Заметное расхождение наступает при $b>0{,}5$.

---

[1] Подробные выкладки см. в третьем издании настоящей книги. Там же рассматриваются амплитудные изменения выходного колебания при скачкообразном изменении частоты ЭДС на входе контура.

6.7. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

В § 6.4. было показано, что при гармонической АМ передача колебания через контур, точно настроенный на несущую частоту, не сопровождается изменением формы огибающей, имеет место лишь ослабление глубины модуляции.

При ЧМ неравномерность амплитудно-частотной и кривизна фазочастотной характеристик контура оказывают более сложное влияние на параметры выходного колебания. Даже при гармонической модуляции частоты спектр колебания обычно содержит очень большое число пар боковых частот. Нарушение нормальных амплитудных и фазовых соотношений между отдельными парами боковых частот приводит к искажению закона модуляции даже при полной симметрии характеристик цепи относительно несущей частоты колебания.

При ЧМ влияние цепи может выразиться:

в искажении закона изменения мгновенной частоты и мгновенной фазы колебания;

в изменении амплитуды полезного частотного отклонения в зависимости от частоты модуляции Ω;

в возникновении паразитной АМ.

При детектировании колебаний с помощью частотного детектора напряжение на выходе приемника пропорционально изменению мгновенной частоты колебания. Поэтому искажение закона изменения мгновенной частоты в колебательных контурах передатчика и приемника приводит к нелинейным искажениям сигнала, проявляющимся на выходе детектора в виде добавочных напряжений с частотами, кратными частоте модуляции Ω.

Второе из отмеченных выше изменений параметров частотно-модулированного колебания приводит к неравномерности АЧХ радиолинии с ЧМ и, следовательно, к частотным (линейным) искажениям сигнала.

Рассмотрим воздействие ЭДС, частота которой изменяется по закону

$$\omega(t)=\omega_0+\omega_д\cos\Omega t, \tag{6.31}$$

на резонансную колебательную цепь. Амплитуду ЭДС считаем строго постоянной, так что ЭДС можно представить выражением [см. (3.23)]

$$e(t)=E_0\cos(\omega_0 t+m\sin\Omega t).$$

Комплексный коэффициент передачи цепи обозначим через

$$\mathbf{K}(i\omega)=K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$

Примерный вид модуля $K(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ для обычной резонансной цепи изображен на рис. 6.15,*а*. Так как перед $\varphi(\omega)$ выбран знак плюс, то фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ имеет отрицательный наклон в полосе прозрачности цепи. Частотный спектр и график изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ входной ЭДС показаны на рис. 6.15, *б* и *в*. Колебательные цепи обычно настраиваются на среднюю частоту модулированного колебания, поэтому рис. 6.15 и дальнейшее рассмотрение относятся к случаю $\omega_р=\omega_0$.

Для нахождения колебания на выходе цепи в принципе можно воспользоваться тем же методом, что и в случае АМ (см. § 6.4). При этом необходимо учесть изменение амплитуд и фаз для каждой из пар боковых частот ЭДС в соответствии с кривыми $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Однако подобный вполне точный метод пригоден лишь при очень малых индексах модуляции, т. е. если состав спектра ЧМ колебания мало отличается от состава спектра АМ колебания.

В практике чаще всего приходится встречаться с модуляцией, характеризующейся столь большим числом спектральных составляющих в используемой полосе частот, что применение спектрального метода сопряжено с большими, иногда непреодолимыми трудностями вычисления. В таких случаях приходится прибегать к приближенным методам, позволяющим, хотя и не вполне точно, находить колебание на выходе цепи по заданному закону изменения мгновенной частоты ЭДС на входе и по заданным ФЧХ и АЧХ цепи без разложения ЭДС в спектр.

Эти методы, называемые *методами мгновенной частоты*, основаны на допущении медленности изменения частоты. Частота модуляции считается настолько малой, что амплитуду и фазу колебания на выходе цепи в каждый момент времени можно без большой погрешности определить по частотной и фазовой характеристикам цепи так же, как в стационарном режиме. Таким образом, принимается, что стационарные колебания на выходе устанавливаются почти одновременно с изменением частоты на входе цепи.

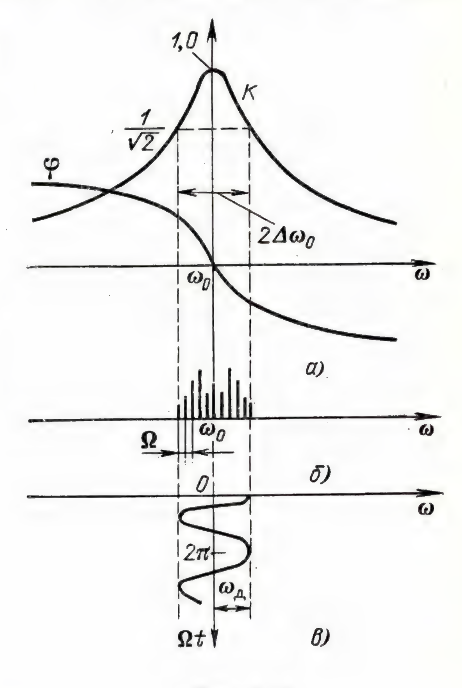


Рис. 6.15

Эти предпосылки тем ближе к истине, чем больше период модуляции $2\pi/\Omega$ и чем меньше постоянная времени цепи $\tau_к$. Так как последняя обратно пропорциональна полосе пропускания цепи $2\Delta\omega_0$, то одним из условий применимости метода мгновенной частоты является неравенство $\Omega/\Delta\omega_0 \ll 1$.

При одной и той же частоте Ω скорость изменения мгновенной частоты входной ЭДС зависит от амплитуды частотного отклонения $\omega_д$, поэтому соблюдения только этого неравенства еще недостаточно. Должны быть наложены ограничения и на отношение $\omega_д/\Delta\omega_0$.

Более подробное рассмотрение показывает, что если $\omega_д/\Delta\omega_0$ меньше единицы или близко к ней, то метод мгновенной частоты обеспечивает вполне достаточную для практики точность.

При выполнении указанных условий напряжение на выходе цепи можно определить с помощью выражения

$$u_{вых}(t) = E_0 \mathrm{Re}[e^{i\psi(t)}\mathbf{K}(i\omega)] = E_0 K(\omega)\mathrm{Re}\{e^{i[\psi(t)+\varphi(\omega)]}\},$$

где $\psi(t) = \omega_0 t + m\sin\Omega t$ — полная фаза ЭДС на входе цепи (см. § 3.4); $\varphi(\omega)$ — аргумент коэффициента передачи цепи; при $\omega = \omega(t)$ φ является функцией времени.

Из этого выражения видно, что амплитуда выходного напряжения изменяется по закону

$$U_{вых}(t) = E_0 K(\omega) = E_0 K(\omega_0 + \omega_д \cos\Omega t),$$

а мгновенная частота — по закону

$$\omega_{вых}(t) = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как первый член в правой части этого выражения представляет собой мгновенную частоту входной ЭДС $\omega(t)$, то $\xi(t) = d\varphi/dt$ характеризует влияние рассматриваемой цепи на частоту выходного колебания. При выполнении оговоренного выше условия медленности модуляции ξ, как правило, мало по сравнению с $\omega_д$. Итак,

$$\omega_{вых}(t) = \omega(t) + \xi(t). \qquad (6.32)$$

Если известно уравнение ФЧХ $\varphi(\omega)$, то, подставляя вместо аргумента ω мгновенную частоту $\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos\Omega t$ и дифференцируя по t, получаем общее выражение для $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{d}{dt}[\varphi(\omega_0 + \omega_д \cos\Omega t)]. \qquad (6.33)$$

При периодической модуляции частоты $\xi(t)$ также является периодической функцией времени и может быть разложена в ряд Фурье. Так как при настройке цепи на среднюю частоту ω_0 ФЧХ обычно нечетна относительно

ω_0, то ряд Фурье содержит одни лишь нечетные гармоники: Ω, 3Ω, $5\Omega, \ldots$ Учитывая, наконец, что при изменении частоты по закону (6.31) производная φ, т. е. $\xi(t)$, является нечетной функцией времени, приходим к выводу, что ряд Фурье содержит одни лишь синусоидальные члены:

$$\xi(t) = \mathscr{E}_1 \sin\Omega t + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots,$$

где $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_3, \ldots$ — амплитуды гармоник функции $\xi(t)$.

Подставляя $\xi(t)$ в (6.32), получаем

$$\omega_{вых}(t) \approx \omega_0 + \omega_д \cos\Omega t + \mathscr{E}_1 \sin\Omega t + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \approx$$

$$\approx \omega_0 + \sqrt{\omega_д^2 + \mathscr{E}_1^2} \cos(\Omega t - \gamma) + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \approx$$

$$\approx \omega_0 + \omega_д \cos(\Omega t - \gamma) + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \quad (6.34)$$

Слагаемое $\mathscr{E}_1^2$ под знаком корня можно отбросить как величину высшего порядка малости по сравнению с $\omega_д^2$.

Сопоставление выражений (6.31) и (6.34) позволяет сделать вывод, что влияние цепи на выходное колебание заключается в запаздывании фазы сообщения на угол γ, определяемый выражением

$$\gamma = \operatorname{arctg}(\mathscr{E}_1 / \omega_д), \quad (6.35)$$

и в возникновении нечетных гармоник в законе изменения мгновенной частоты. Как отмечалось выше, наибольшее значение обычно имеет последнее обстоятельство.

Поясним применение метода мгновенной частоты на примере одиночного колебательного контура.

Подразумевая под $\mathbf{K}(i\omega)$ отношение комплексной амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде ЭДС, включенной последовательно в контур, получаем

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{1/i\omega C}{r[1 + i(\omega - \omega_0)\tau_к]}.$$

Учитывая, что $\omega - \omega_0 = \omega_д \cos\Omega t$ и пренебрегая изменением ω в числителе, так как $\omega_д$ обычно мала по сравнению с ω_0, можно записать

$$\mathbf{K}(i\omega) \approx \frac{Q}{i(1 + i\omega_д \tau_к \cos\Omega t)} = \frac{Q}{\sqrt{1 + (\omega_д \tau_к \cos\Omega t)^2}} e^{i\varphi},$$

где $\varphi = -\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(\omega_д \tau_к \cos\Omega t)\right]$.

На основании соотношения (6.33) находим

$$\xi(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega \omega_д \tau_к \sin\Omega t}{1 + \omega_д^2 \tau_к^2 \cos^2\Omega t}.$$

Глава 7. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Пусть на входе линейного четырехполюсника (рис. 7.1) с передаточной функцией $\mathbf{K}(i\omega)$ и импульсной характеристикой $g(t)$ действует случайный процесс $s(t)$ с заданными статистическими характеристиками; требуется найти статистические характеристики процесса $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе четырехполюсника.

В гл. 4 были рассмотрены основные характеристики случайного процесса: распределение вероятностей; корреляционная функция; спектральная плотность мощности.

Определение последних двух характеристик является наиболее простой задачей. Иначе обстоит дело с определением закона распределения случайного процесса на выходе линейной цепи. В общем случае при произвольном распределении процесса на входе отыскание распределения на выходе инерционной цепи представляет собой весьма сложную задачу.

Лишь при нормальном распределении входного процесса задача упрощается, так как при любых линейных операциях с гауссовским процессом (усилении, фильтрации, дифференцировании, интегрировании и т. д.) распределение остается нормальным, изменяются лишь функции $R(\tau)$ и $W(\omega)$. Поэтому если задана плотность вероятности входного процесса (с нулевым средним)

$$p(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

то плотность вероятности на выходе линейной цепи

$$p(s_{\text{вых}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{s\text{вых}}}\exp\left(-\frac{s_{\text{вых}}^2}{2\sigma_{s\text{вых}}^2}\right). \tag{7.1}$$

Дисперсия $D_{s\text{вых}}=\sigma_s{}^2{}_{\text{вых}}$ легко определяется по спектру или по корреляционной функции. Таким образом, анализ передачи гауссовских процессов через линейные цепи по существу сводится к спектральному (или корреляционному) анализу.

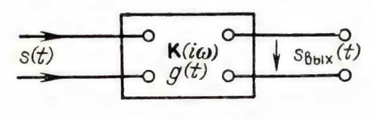


Рис. 7.1

Следующие четыре параграфа посвящены преобразованию

только спектра и корреляционной функции случайного процесса. Это рассмотрение справедливо при любом законе распределения вероятностей. Вопрос же о преобразовании закона распределения при негауссовских входных процессах рассматривается в § 7.6, 7.7.

7.2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЦЕПИ

Содержание данного параграфа ограничено рассмотрением стационарных случайных процессов.

Спектральную плотность входного процесса обозначим $W_s(\omega)$. Задача нахождения $W_{s\,\text{вых}}(\omega)$ легко решается с помощью рассуждений, аналогичных использованным при выводе выражения (4.31). Умножив спектральную плотность $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ «усеченной» реализации процесса $x_k(t)$ на передаточную функцию фильтра $\mathbf{K}(i\omega)$, получим спектральную плотность этой же реализации на выходе

$$\mathbf{X}_{kT_{\text{вых}}}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega).$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно определить с помощью равенства Парсеваля

$$Э_{kT\text{вых}} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} x^2_{kT\text{вых}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2\,|\mathbf{K}(i\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда по аналогии с выражением (4.34) получаем

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_{T\text{вых}}(\omega)|^2}{T} = W_s(\omega)\,K^2(\omega). \tag{7.2}$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе фильтра определяется с помощью выражения (4.39′):

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{s\,\text{вых}}(\omega)\,e^{i\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\,K^2(\omega)\,e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{7.3}$$

Соотношения между характеристиками случайных процессов на входе и выходе цепи можно вывести также на основе заданной импульсной характеристики цепи.

Действительно, поскольку спектральной функции $W_s(\omega)$ соответствует корреляционная функция

$$R_s(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{7.4}$$

а спектральной функции $K^2(\omega)$ —

$$R_g(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{7.5}$$

т. е. корреляционная функция импульсной характеристики $g(t)$ [см., например, (2.122), в которой $S^2(\omega)$ нужно заменить на $K^2(\omega)$], то произведению спектральных функций $W_s(\omega)$ и $K^2(\omega)$ соответствует свертка функций $R_s(\tau)$ и $R_g(\tau)$ [см. (2.59)]

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} R_s(x)\,R_g(\tau-x)\,dx. \tag{7.6}$$

Таким образом, по заданным корреляционным функциям $R_s(\tau)$ и $R_g(\tau)$ определяется корреляционная функция на выходе $R_{s\,\text{вых}}(\tau)$, после чего находится энергетический спектр

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{s\,\text{вых}}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{7.7}$$

Особый интерес представляет случай, когда процесс на входе является белым шумом. При этом $W_{s\,\text{вых}}(\omega)=W_0=\text{const}$ и в соответствии с (7.3) и (7.5)

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=W_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega=W_0R_g(\tau). \tag{7.7'}$$

Выражение (7.7′) можно применять и в тех случаях, когда энергетический спектр $W_s(\omega)$ равномерен лишь в полосе прозрачности цепи.

Итак, ни спектральный, ни корреляционный анализ прохождения стационарного случайного процесса через линейную цепь с постоянными параметрами не связан с какими-либо трудностями.

7.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЯХ

При анализе передачи сигналов по радиоэлектронным цепям наряду с неизбежными искажениями формы сигналов необходимо учитывать также собственные шумы цепи. Эти шумы, накладываясь на сигнал, ограничивают информационную емкость

последнего. Проблема шумов особенно актуальна при усилении слабых сигналов.

В радиоэлектронных устройствах имеются два основных источника шумов: дискретная структура тока в усилительных элементах (транзисторах, электронных лампах и т. д.) и тепловое движение свободных электронов в проводниках электрической цепи.

Рассмотрим первый источник на примере дробового эффекта, присущего электронному току в усилительных приборах. Этот ток представляет собой совокупность импульсов, каждый из которых обусловлен переносом заряда одного электрона. Полный ток, являющийся суммой очень большого числа перекрывающихся, расположенных случайным образом на оси времени импульсов, представляет собой стационарный эргодический случайный процесс, для которого справедлива центральная предельная теорема[1]. Поэтому распределение электронного тока можно считать нормальным с плотностью вероятности

$$p(i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left[-\frac{(i-I_0)^2}{2\sigma_i^2}\right]. \tag{7.8}$$

Постоянную составляющую тока I_0 и среднюю мощность флуктуационной составляющей σ_i^2 можно установить с помощью следующих рассуждений.

Пусть среднее за 1 с число импульсов тока равно k_1. Так как каждый импульс переносит заряд одного электрона e, то полное количество электричества, переносимое в среднем за 1 с, равно $k_1 e$. Это и есть постоянная составляющая тока. Таким образом,

$$I_0=k_1 e.$$

Введем в рассмотрение спектральную плотность $\mathbf{G}_1(\omega)$ одиночного импульса тока $i_e(t-t_k)$, обусловленного переносом заряда e одного электрона (t_k — момент вылета электрона). Независимо от формы этого импульса значение $\mathbf{G}_1(\omega)$ при $\omega=0$ равно площади импульса [см. (2.46)]:

$$\mathbf{G}_1(0)=\int_{-\infty}^{\infty} i_e(t-t_k)\,dt=e. \tag{7.9}$$

Длительность τ_e импульса $i_e(t)$ зависит от геометрии электронного прибора, от напряженности электрического поля в междуэлектродных промежутках и т. д. Ширину спектра импульса в грубом приближении можно приравнять $2/\tau_e$. Таким образом, модуль спектральной плотности импульса $i_e(t-t_k)$ можно представить в виде графика, показанного на рис. 7.2. Максимальная ордината $\sim e$.

---

[1] См. п. 4.2.3.

Энергия одного импульса по формуле Парсеваля

$$Э_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^2(\omega)\, d\omega,$$

а суммарная энергия k_1 импульсов за 1 с, т. е. средняя мощность процесса (при сопротивлении 1 Ом),

$$\overline{i^2(t)} = k_1 Э_1 + I_0^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_1 G_1^2(\omega)\, d\omega + I_0^2 = \sigma_i^2 + I_0^2. \qquad (7.10)$$

Первое слагаемое в правой части (7.10) определяет мощность флуктуационной составляющей тока, второе слагаемое — мощность постоянной составляющей I_0.

Из выражения (7.10) вытекает, что энергетический спектр флуктуационной составляющей электронного тока совпадает по форме со спектральной плотностью энергии $G_1^2(\omega)$ отдельных импульсов, образующих случайный процесс:

$$W_i(\omega) = k_1 G_1^2(\omega). \qquad (7.11)$$

Примерный вид $W_i(\omega)$ представлен на рис. 7.2.

Учитывая, что $k_1 = I_0/e$, а также то, что в пределах полосы частот $\sim 2/\tau_e$ имеет место равенство (7.9), получаем[1]

$$W_i(\omega) \approx eI_0, \quad 0 < |\omega| < 1/\tau_e. \qquad (7.12)$$

Таким образом, приходим к выводу, что в указанных пределах дробовой шум можно считать белым.

Выражения (7.8) и (7.12) определяют основные статистические характеристики дробового тока.

Теперь нетрудно выявить статистические характеристики напряжения шума на выходе цепи, содержащей «шумящий» элемент. На рис. 7.3, *а* и *б* изображены схемы транзисторного и лампового усилителей, а на рис. 7.3, *в* — единая схема замещения для флуктуационного тока $i(t)$. Входные зажимы база — эмиттер (соответственно сетка — катод) соединены накоротко, чтобы подчеркнуть отсутствие внешнего воздействия на усилитель. В качестве источника шума в схеме замещения показан генератор тока $i(t)$, статистические характеристики которого $p(i)$ и $W_i(\omega)$ были определены выше.

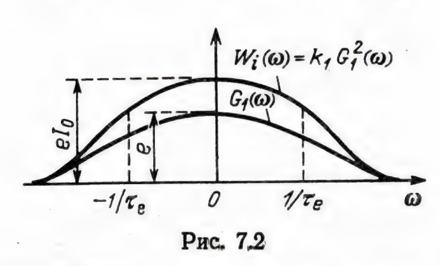


Рис. 7.2

Напряжение шума $u(t)$, создаваемое на линейном нагрузочном элементе $Z_н(\omega)$, распределено, как и ток $i(t)$, по нормальному закону

[1] В технической литературе также распространена формула $W_i(\omega) = 2eI_0$, при выводе которой среднюю мощность σ^2_i относят только к положительным частотам.

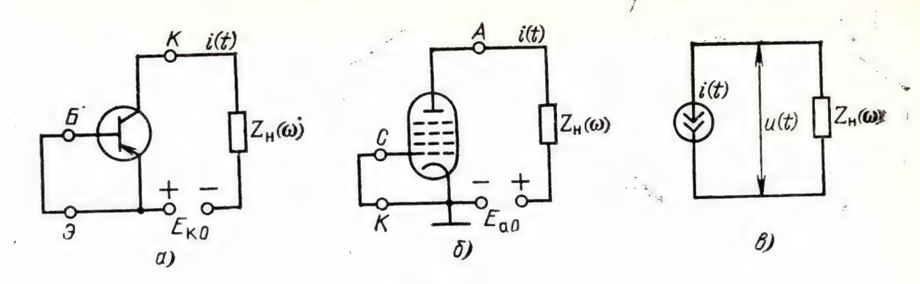


Рис. 7.3

$$p(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right). \qquad (7.13)$$

Спектральная плотность случайного процесса $u(t)$ определяется соотношением

$$W_u=W_i(\omega)\,Z_н^2(\omega) \qquad (7.14)$$

[ср. с (7.2); в данном случае вместо безразмерной передаточной функции $K(\omega)$ фигурирует сопротивление $Z_н(\omega)$].

Применяя к (7.14) преобразование (4.39′), можно определить корреляционную функцию напряжения шума на выходе усилителя, а также величину σ_u, т. е. среднеквадратическое напряжение шума.

Рассмотрим механизм формирования собственного шума в резистивном и резонансном усилителях.

В резистивном усилителе сопротивление $\mathbf{Z}_н(i\omega)$ определим (для схемы на рис. 5.6) по формулам

$$\mathbf{Z}_н(i\omega)=\frac{R\,(1/i\omega C_0)}{R+1/i\omega C_0},\quad Z_н^2(\omega)=\frac{R^2}{1+(\omega C_0R)^2}. \qquad (7.15)$$

Постоянная времени цепи RC_0 во много раз больше длительности импульса τ_e; соответственно полоса пропускания цепи RC_0, примыкающая к нулевой частоте, во много раз у́же, чем ширина спектра $W_i(\omega)$, показанного на рис. 7.2. Поэтому при определении воздействия на цепь дробового шума его можно рассматривать как белый шум со спектром $W_i(\omega)=eI_0$. Тогда по формуле (7.14)

$$W_u(\omega)=eI_0R^2/[1+(\omega C_0R)^2] \qquad (7.16)$$

и по формуле (4.39′)

$$R_u(\tau)=eI_0R^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{1+(\omega C_0R)^2}\,d\omega=\frac{eI_0R^2}{(RC_0)^2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{(1/RC_0)^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Входящий в правую часть интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega\tau}{(1/RC_0)^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}RC_0\exp\left(-\frac{|\tau|}{RC_0}\right).$$

Таким образом,

$$R_u(\tau)=\frac{eI_0R}{2C_0}\exp\left(-\frac{|\tau|}{RC_0}\right). \tag{7.17}$$

При $\tau=0$ это выражение определяет дисперсию напряжения шума σ_u^2 и среднеквадратическое напряжение шума σ_u:

$$\sigma_u^2=R_u(0)=\frac{eI_0R}{2C_0},\quad \sigma_u=\sqrt{\frac{eI_0R}{2C_0}}. \tag{7.18}$$

Нормированная корреляционная функция шума

$$r_u(\tau)=\exp(-|\tau|/RC_0). \tag{7.19}$$

Графики спектра $W_u(\omega)$ и функции $r_u(\tau)$ изображены на рис. 7.4 и 7.5.

Интервал корреляции напряжения шума в данном примере определяется величиной $|\tau|/RC_0\approx 1$. Нетрудно пояснить смысл полученного результата. Напряжение шума на нагрузке образуется совокупностью беспорядочно следующих импульсов тока, создаваемых отдельными электронами. Каждый из этих импульсов создает импульс напряжения, длительность которого определяется постоянной времени нагрузки. При наложении большого числа импульсов относительная скорость изменения суммарного напряжения шума $u(t)$ должна быть того же порядка, что и скорость изменения отдельных импульсов. Поэтому для независимости напряжений, отсчитываемых в моменты t и $t+\tau$, величина τ должна быть не менее длительности импульсов, образующих шум.

Для количественной оценки напряжения шума, создаваемого дробовым эффектом, приведем следующий пример, характерный для апериодического усилителя: постоянный ток $I_0=10$ мА, сопротивление нагрузки $R=5$ кОм, емкость $C_0=50$ пФ.

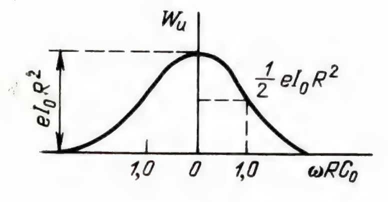


Рис. 7.4

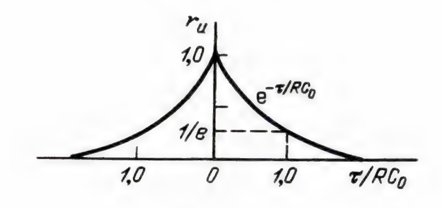


Рис. 7.5

По формуле (7.18) находим среднеквадратическое напряжение шума на выходе усилителя

$$\sigma_u \approx \sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{3}}{2\cdot 50\cdot 10^{-12}}} = 2{,}8\cdot 10^{-4}\text{В} = 0{,}28\ \text{мВ}.$$

Определенное таким образом напряжение можно условно рассматривать как результат приложения некоторого напряжения шума ко входу усилителя. При коэффициенте усиления $K_у$ эквивалентное напряжение шума на входе следует приравнять величине $u_{ск} = \sigma_u / K_у$. При коэффициенте усиления $K_у \approx 100$ получаем $u_{ск} \approx 3$ мкВ. Это значение и определяет нижний порог сигнала, который еще имеет смысл усиливать данным усилителем.

Аналогичным образом можно рассмотреть формирование шума в колебательной цепи резонансного усилителя.

По аналогии с (7.14) определим спектр

$$W_u(\omega) = W_i(\omega) Z^2_{эк}(\omega) = eI_0 Z^2_{эк}(\omega), \qquad (7.20)$$

где

$$\mathbf{Z}_{эк}(i\omega) = \frac{Z_{эк\,р}}{1 + i a_{эк}} \approx \frac{R_ш}{1 + i\,\dfrac{2(\omega - \omega_р)}{\omega_р} Q_{эк}},$$

а $Z_{эк\,р} = R_ш$ — сопротивление контура (шунтированного резистором $R_ш$) при резонансе. Отсюда квадрат модуля сопротивления нагрузки

$$Z^2_{эк}(\omega) = R^2_ш / [1 + (\omega - \omega_р)^2 \tau^2_к], \qquad (7.21)$$

где $\tau_к = 2Q_{эк}/\omega_р$ — постоянная времени контура.

Таким образом,

$$W_u(\omega) = eI_0 R^2_ш / [1 + (\omega - \omega_р)^2 \tau^2_к]. \qquad (7.22)$$

График спектра $W_u(\omega)$ изображен на рис. 7.6.

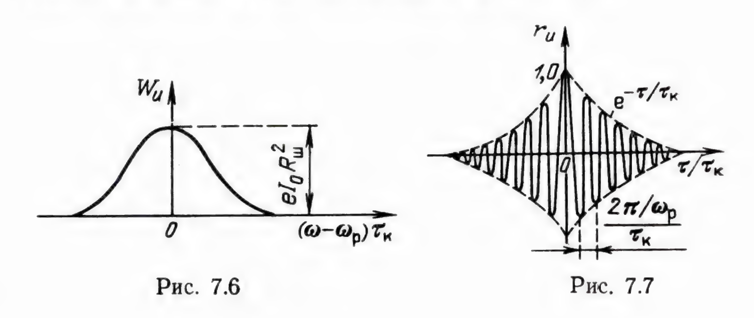


Рис. 7.6 Рис. 7.7

Выражение (4.39′) для корреляционной функции в данном случае принимает следующий вид:

$$R_u(\tau)=eI_0R_{ш}^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к}\,d\omega=$$

$$=eI_0R_{ш}^2\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к}\,d\omega.$$

Переходя к новой переменной $\omega_1=\omega-\omega_р$, получаем

$$R_u(\tau)=\frac{eI_0R_{ш}^2}{\pi}\int\limits_{-\omega_р}^{\infty}\frac{\cos(\omega_1+\omega_р)\tau}{1+\omega^2{}_1\tau^2_к}\,d\omega_1=$$

$$=\frac{eI_0R_{ш}^2}{\pi}\left[\cos\omega_р\tau\int\limits_{-\omega_р}^{\infty}\frac{\cos\omega_1\tau}{1+\omega^2{}_1\tau^2_к}d\omega_1-\sin\omega_р\tau\int\limits_{-\omega_р}^{\infty}\frac{\sin\omega_1\tau}{1+\omega^2{}_1\tau^2_к}\,d\omega_1\right].$$

Заметим, что при достаточно большой добротности контура выполняется условие

$$\omega_р\tau_к=\omega_р(2Q_{эк}/\omega_р)=2Q_{эк}\gg 1.$$

Поэтому нижний предел интегралов $-\omega_р$ можно заменить на $-\infty$. При этом второй интеграл обращается в нуль вследствие нечетности подынтегральной функции относительно переменной интегрирования ω_1. Первый же интеграл вследствие четности подынтегральной функции приводится к виду

$$\int\limits_{-\omega_р}^{\infty}\frac{\cos\omega_1\tau}{1+\omega^2{}_1\tau^2_к}\,d\omega_1\approx\frac{2}{\tau^2_к}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega_1\tau}{1/\tau^2_к+\omega^2{}_1}\,d\omega_1.$$

Аналогичный интеграл был вычислен при выводе формулы (7.17). Используя этот результат, получаем

$$R_u(\tau)=\frac{eI_0R_{ш}^2}{\pi}\,\frac{2}{\tau^2_к}\,\frac{\pi\tau_к}{2}\,e^{-|\tau|/\tau_к}\cos\omega_р\tau=$$

$$=\frac{eI_0R_{ш}^2}{\tau_к}\,e^{-|\tau|/\tau_к}\cos\omega_р\tau=eI_0R_{ш}^2\alpha_к e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.23)$$

Здесь через $\alpha_к=1/\tau_к$ обозначено затухание контура. Учитывая, что при шунтировании контура сопротивлением $R_ш$ коэффициент затухания $\alpha_к=1/2R_шC$, записываем формулу (7.23) в следующей форме:

$$R_u(\tau)=\frac{eI_0R_ш}{2C}\,e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.23')$$

Из формул (7.23), (7.23′) вытекает, во-первых, что средний квадрат напряжения шума на контуре

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = eI_0R_ш^2\alpha_к = eI_0R_ш/2C \qquad (7.24)$$

и среднеквадратическое напряжение шума $\sigma_u = \sqrt{eI_0R_ш/2C}$; во-вторых, нормированная корреляционная функция определяется выражением

$$r_u(\tau) = e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau = e^{-|\tau|/\tau_к}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.25)$$

График функции $r_u(\tau)$ показан на рис. 7.7. Интервал корреляции в рассматриваемом случае определяется ходом огибающей функции $r_u(\tau)$, т. е. множителем $e^{-|\tau|/\tau_к}$ в выражении (7.25).

Пересчет напряжения шумов ко входу усилителя, как и для апериодического усилителя, можно сделать по формуле $u_{ск} = \sigma_u/K_у$, в которой под $K_у$ следует подразумевать коэффициент усиления на резонансной частоте.

Напряжение шума, выделяемое на высокодобротном колебательном контуре, показано на рис. 4.17. Приведенные в § 4.6 характеристики узкополосного случайного процесса могут быть полностью отнесены к дробовому шуму в резонансном усилителе.

Нужно иметь в виду, что изложенный в данном параграфе материал дает представление лишь о методе анализа характеристик собственных шумов, формируемых избирательной цепью усилителя. Механизм образования шумов зависит от ряда физических и конструктивных особенностей усилительных (активных) элементов, которые здесь не рассматриваются.

В заключение укажем, что приведенные выше соотношения можно использовать также при анализе теплового шума в избирательных цепях. Необходимо лишь спектр такого шума определять по формуле, известной из физики:

$$W_u(\omega) = 2kTR, \qquad (7.26)$$

где R — сопротивление резистора, генерирующего шум; $k = 1{,}38\times10^{-23}$ Вт·с/град — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

Тепловой шум можно считать белым шумом.

Как и в выражении (7.12), $W_u(\omega)$ здесь определено для положительных и отрицательных частот. При отнесении мощности шума только к положительным частотам коэффициент 2 следует заменить на 4.

7.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Задан стационарный эргодический случайный процесс $s(t)$ со спектром $W_s(\omega)$ и корреляционной функцией $R_s(\tau)$; требуется найти аналогичные характеристики для производной $s(t)$.

Не останавливаясь здесь на рассмотрении всех условий дифференцируемости случайной функции, ограничимся основным требованием: энергетический спектр $W_s(\omega)$ при $\omega \to \infty$ должен убывать быстрее, чем $1/\omega^2$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_s(\omega)\, d\omega < \infty. \tag{7.27}$$

Это условие выполняется для большинства практических задач, так как спектр $W_s(\omega)$ формируется физической цепью, передаточная функция которой при $\omega \to \infty$ убывает быстрее, чем $1/\omega$ (а квадрат модуля уменьшается быстрее, чем $1/\omega^2$). Условию (7.27) не отвечает белый шум с бесконечно широким спектром, однако обычно рассматривается шум с ограниченным спектром.

Считая условие (7.27) выполненным, рассмотрим прохождение случайного сигнала $s(t)$ через идеальную дифференцирующую цепь, передаточная функция которой $\mathbf{K}(i\omega) = i\omega\tau_0$ [см. (5.49)].

Применяя выражения (7.2), (7.3), можем написать

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega)\, W_s(\omega) = \tau_0^2 \omega^2 W_s(\omega), \tag{7.28}$$

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \tau_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_s(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{7.29}$$

Дисперсия процесса на выходе устройства

$$D_{s\,\text{вых}} = \sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\tau_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_s(\omega)\, d\omega. \tag{7.30}$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть спектр процесса на входе дифференцирующего устройства равномерен в полосе частот $-f_1 \leqslant f \leqslant f_1$:

$$W_s(\omega) = \begin{cases} W_0 & \text{при } |\omega| \leqslant 2\pi f_1 = \Delta\omega_1, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2\pi f_1 = \Delta\omega_1. \end{cases} \tag{7.31}$$

Корреляционная функция подобного процесса [см. (4.41)]

$$R_s(\tau) = W_0 2f_1 (\sin \Delta\omega_1\tau)/\Delta\omega_1\tau,$$

а дисперсия

$$D_s = \sigma_s^2 = R_s(0) = W_0 2f_1. \tag{7.32}$$

После дифференцирования получим $W_{s\,\text{вых}}(\omega) = \tau_0^2 \omega^2 W_0$ и

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \tau_0^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega_1}^{\Delta\omega_1} \omega^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{7.33}$$

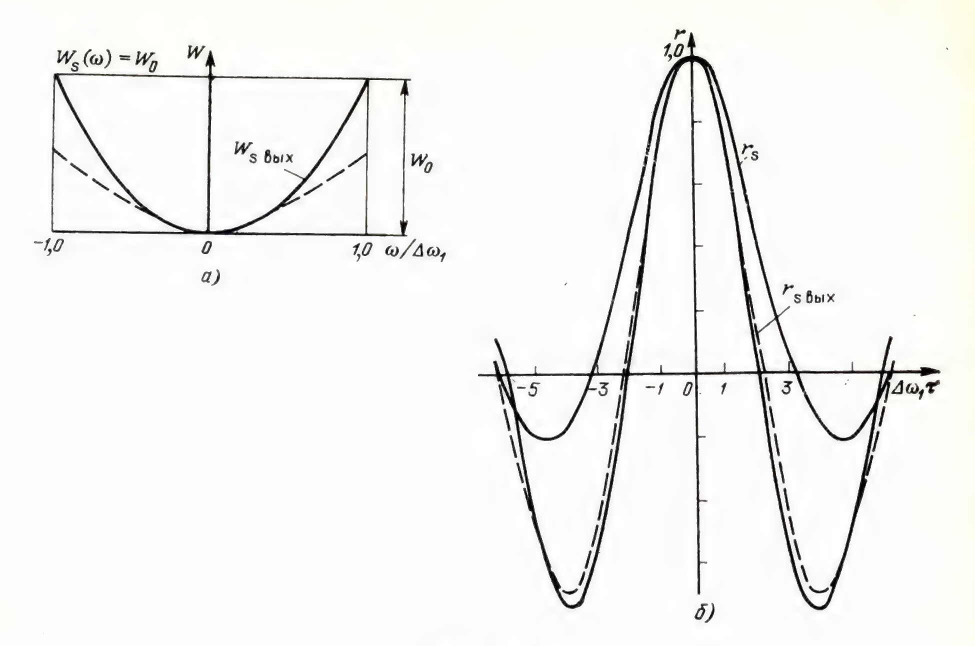


Рис. 7.8

Дисперсия

$$\sigma^2_{вых} = R_{s\,вых}(0) = \tau_0^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\Delta\omega_1}^{\Delta\omega_1} \omega^2 d\omega =$$

$$= \tau_0^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \Delta\omega_1{}^3 = \frac{(\Delta\omega_1\tau_0)^2}{3} W_0 2 f_1.$$

Учитывая, что $W_0 2 f_1 = \sigma_s^2$ — дисперсия шума на входе дифференцирующего устройства, приходим к следующему результату

$$\sigma^2_{вых} = (\Delta\omega_1\tau_0)^2 \sigma_s{}^2/3. \qquad (7.34)$$

Графики функций $W_s(\omega)$ и $W_{s\,вых}(\omega)$, а также нормированных корреляционных функций $r_s(\tau)$ и $r_{s\,вых}(\tau)$ изображены на **рис. 7.8, *а* и *б*; параметр $\Delta\omega_1\tau_0 = 1$. Из рисунка видно, что дифференцирование приводит к ослаблению нижних частот исходного процесса. Относительное возрастание высших частот приводит к более четко выраженной осцилляции корреляционной функции (см. рис. 7.8, *б*).**

Рассмотрим прохождение того же случайного сигнала через реальное дифференцирующее устройство в виде *RC*-цепи (см. рис. 5.15). Квадрат передаточной функции дифференцирующей цепи

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{R}{R + 1/i\omega C}, \quad K^2(\omega) = \omega^2\tau_0^2/(1 + \omega^2\tau^0_2), \quad \tau_0 = RC.$$

Таким образом, энергетический спектр на выходе цепи

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega)=\frac{\omega^2\tau^2_0}{1+\omega^2\tau^2_0}W_0=\frac{(\Delta\omega_1\tau_0)^2(\omega/\Delta\omega_1)^2}{1+(\Delta\omega_1\tau_0)^2(\omega/\Delta\omega_1)^2}W_0. \quad (7.35)$$

График $W_{s\,\text{вых}}(\omega)$ для $\Delta\omega_1\tau_0=1$ представлен на рис. 7.8, *а* штриховой линией.

Корреляционная функция

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=\tau^2_0W_0\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\Delta\omega_1}\frac{\omega^2\cos\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2_0}d\omega,$$

$$\sigma^2_{\text{вых}}=R_{s\,\text{вых}}(0)=\tau^2_0W_0\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\Delta\omega_1}\frac{\omega^2}{1+\omega^2\tau^2_0}d\omega=$$

$$=\frac{W_0}{\tau_0}\frac{1}{\pi}[\Delta\omega_1\tau_0-\operatorname{arctg}(\Delta\omega_1\tau_0)]. \quad (7.36)$$

Результат вычисления нормированной корреляционной функции $r_{s\,\text{вых}}(\tau)=R_{s\,\text{вых}}(\tau)/\sigma^2_{\text{вых}}$ представлен на рис. 7.8, *б* штриховой линией (для $\Delta\omega_1\tau_0=1$).

Можно считать, что при $\Delta\omega_1\tau_0\ll1$ физическая *RC*-цепь осуществляет дифференцирование рассматриваемого случайного процесса, близкое к точному дифференцированию.

7.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Для выявления некоторых особенностей интегрирования случайной функции рассмотрим сначала прохождение стационарного случайного процесса через физическую интегрирующую *RC*-цепь (см. рис. 5.16).

Пусть на входе этой цепи начиная с момента $t=-\infty$ действует случайная функция $s(t)$ со спектром $W_s(\omega)$ и корреляционной функцией $R_s(\omega)$. Считая процесс на выходе установившимся, можно определить $W_{s\,\text{вых}}(\omega)$ и $R_{s\,\text{вых}}(\tau)$ с помощью выражений (7.2) и (7.3), подставив в них

$$\mathbf{K}(i\omega)=\frac{1/i\omega C}{R+1/i\omega C},\quad K^2(\omega)=1/[1+(\omega\tau_0)^2].$$

Таким образом,

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega)=K^2(\omega)W_s(\omega)=W_s(\omega)/(1+\omega^2\tau^2_0), \quad (7.37)$$

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{W_s(\omega)\cos\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2_0}d\omega. \quad (7.38)$$

Рассмотрим два частных случая: $\overline{s(t)}=0$ и $\overline{s(t)}\neq0$. В первом случае спектр $W_s(\omega)$ не содержит слагаемого с δ-функцией

[см. (4.35)—(4.37)]; полагая $W_s(\omega)=W_0=\text{const}$ (белый шум), получаем корреляционную функцию

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=\frac{W_0}{\tau^2_0}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega\tau}{1/\tau^2_0+\omega^2}\,d\omega=\frac{W_0}{2\tau_0}\,e^{-|\tau|/\tau_0} \tag{7.39}$$

и дисперсию

$$\sigma^2_{\text{вых}}=W_0/2\tau_0=W_0/2RC. \tag{7.40}$$

Во втором случае (при $\overline{s(t)}\neq 0$), когда в соответствии с (4.35) спектр

$$W_s(\omega)=[\overline{s(t)}]^2 2\pi\delta(\omega)+W_\sim(\omega),$$

причем $W_\sim(\omega)=W_0=\text{const}$ (как и в предыдущем случае), корреляционная функция и дисперсия будут

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau)=|\,\overline{s(t)}\,|^2 2\pi\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\frac{\cos\omega\tau}{1+\tau^2_0\omega^2}\,d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{W_\sim(\omega)\cos\omega\tau}{1+\tau^2_0\omega^2}\,d\omega=|\,\overline{s(t)}\,|^2+\frac{W_0}{2\tau_0}\,e^{-|\tau|/\tau_0}, \tag{7.41}$$

$$\sigma^2_{\text{вых}}=W_0/2\tau_0=W_0/2RC. \tag{7.42}$$

Из приведенных соотношений видно, что в установившемся режиме процесс на выходе физической интегрирующей цепи является стационарным, как и на входе.

Иначе обстоит дело при точном математическом интегрировании, которому соответствует нереализуемая передаточная функция

$$\mathbf{K}(i\omega)=1/i\omega\tau_0.$$

Условие интегрируемости случайного процесса при этом принимает следующий вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{W_s(\omega)}{\omega^2}\,d\omega<\infty. \tag{7.43}$$

Если условие дифференцируемости случайной функции (7.27) накладывало требование достаточно быстрого убывания $W_s(\omega)$ при $\omega\to\infty$, то при интегрировании аналогичное требование относится к поведению $W_s(\omega)$ при $\omega\to 0$.

Интегрирование стационарного процесса $s(t)$ с $W_s(0)\neq 0$ приводит к нестационарному процессу с неограниченно возрастающей дисперсией.

Если $\overline{s(t)}\neq 0$, то математическое ожидание процесса на выходе также неограниченно возрастает.

Следует иметь в виду, что идеальное интегрирующее устройство можно рассматривать как фильтр с беконечно малой полосой пропускания. Процесс установления в таком фильтре длится бесконечно долго. Поэтому статистические характеристики интеграла случайного процесса существенно зависят от длительности интегрирования.

7.6. ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Как отмечалось в § 7.1, при негауссовском случайном процессе на входе отыскание закона распределения на выходе инерционной цепи является сложной задачей, не имеющей прямого решения. Существуют лишь приближенные методы решения, связанные с большими вычислительными трудностями.

Один из таких методов основан на использовании *характеристических функций* случайного процесса и известных соотношений между характеристической функцией и моментами распределения процесса.

В теории вероятностей под характеристической функцией $\theta_x(\eta)$ случайной величины x или характеристической функцией данного распределения $p(x)$ подразумевается среднее значение функции $e^{i\eta x}$.т. е.

$$\theta_x(\eta)=M(e^{i\eta x}) \tag{7.44}$$

(здесь η — вещественная переменная).

При заданной плотности вероятности $p(x)$ среднее значение величины $e^{i\eta x}$ можно определить с помощью выражения

$$\theta_x(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x}p(x)\,dx. \tag{7.45}$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как преобразование Фурье функции $p(x)$. Следовательно, если известна характеристическая функция $\theta_x(\eta)$ какой-либо случайной величины x, то плотность вероятности $p(x)$ можно найти с помощью обратного по отношению к (7.45) преобразования Фурье

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_x(\eta)\,e^{-i\eta x}d\eta. \tag{7.46}$$

В частности, для нормального закона распределения

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

характеристическая функция в соответствии с (7.45)

$$\theta_x(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)\exp(i\eta x)\,dx.$$

С помощью преобразований, аналогичных (2.61), получаем[1]

$$\theta_x(\eta)=\exp(-\sigma_x^2\eta^2/2). \tag{7.47}$$

Таким образом, при нормальном распределении график характеристической функции относительно η имеет такую же форму, как и график плотности вероятности относительно x. Поэтому о степени приближения распределения какой-либо случайной величины к нормальному можно судить по тому, насколько характеристическая функция рассматриваемой величины приближается к функции, определяемой (7.47).

Характеристическая функция $\theta_x(\eta)$ полностью определяется моментами случайного процесса и может быть представлена рядом

$$\theta_x(\eta)=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_{xk}}{k!}(i\eta)^k, \tag{7.48}$$

где моменты k-го порядка определяются [см. (4.3) для $k=1$] выражением

$$m_{xk}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k p(x)\,dx. \tag{7.49}$$

Знание моментов распределения позволяет найти характеристическую функцию $\theta_x(\eta)$, а по ней и функцию распределения.

Вычисление по формуле (7.48) оказывается неприемлемо сложным для практики. Обычно довольствуются решением более простой задачи о преобразовании лишь нескольких моментных функций в линейной системе, которые дают косвенное представление об одномерной плотности вероятности случайного процесса на выходе. Поясним это на примере простого линейного преобразования — дифференцирования случайного процесса $x(t)$. Найдем первые две моментные функции случай-

---

[1] В общем случае, когда среднее значение случайной величины не равно нулю и

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

характеристическая функция

$$\theta_x(\eta)=\exp(i\overline{x}\eta-\sigma_x^2\eta^2/2)$$

(см., например, [6]).

ного процесса $y(t)=dx(t)/dt$, т. е. процесса на выходе дифференцирующего устройства.

Математическое ожидание процесса $y(t)$

$$M[y(t)]=M[dx/dt]=M\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right].$$

Операции усреднения и перехода к пределу перестановочны, поэтому можно написать

$$M[y(t)]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[x(t+\Delta t)]-M[x(t)]}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_{x1}(t+\Delta t)-m_{x1}(t)}{\Delta t}=\frac{dm_{x1}(t)}{dt}.$$

Следовательно, при дифференцировании случайной функции ее моментная функция первого порядка также подвергается дифференцированию. Очевидно, что для стационарного случайного процесса первая моментная функция производной равна нулю.

Повторяя аналогичные рассуждения для моментной функции второго порядка процесса $y(t)$, можно получить [при условии стационарности процесса $x(t)$]

$$M\left[\frac{dx(t_1)}{dt_1}\frac{dx(t_2)}{dt_2}\right]=-\frac{d^2m_{x2}(\tau)}{d\tau^2}=-\frac{d^2K_x(\tau)}{d\tau^2}, \tag{7.50}$$

где $\tau=|t_2-t_1|$.

При $\tau=0$

$$M[y^2(t)]=-\sigma_x^2r_x''(0). \tag{7.51}$$

К этому результату, совпадающему с (7.34), можно прийти более простым способом на основе спектральной плотности мощности процесса $x(t)$ и передаточной функции цепи $\mathbf{K}(i\omega)=$ $=i\omega$ (для момента второго порядка).

Для более сложных цепей, осуществляющих различные линейные преобразования случайного процесса, широко распространен метод, основанный на стохастических дифференциальных уравнениях, и некоторые другие методы [7].

Приведем пример задачи, когда использование характеристических функций оказывается весьма эффективным способом.

Пусть требуется найти плотность вероятности суммы некоторого числа взаимно независимых слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Характеристическая функция суммы имеет следующий вид:

$$\theta(\eta)=M[e^{i\eta x}]=M[e^{i\eta(x_1+x_2+\ldots+x_N)}]=M[e^{i\eta x_1}]\times$$

$$\times M[e^{i\eta x_2}]\ldots M[e^{i\eta x_N}]=\theta_{x_1}(\eta)\,\theta_{x_2}(\eta)\ldots\theta_{x_N}(\eta), \tag{7.52}$$

т. е. характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Для частного случая, когда все слагаемые имеют одинаковые распределения и, следовательно, одинаковые характеристические функции,

$$\theta_N(\eta) = [\theta_1(\eta)]^N. \tag{7.53}$$

Используем выражения (7.45), (7.46) для определения плотности вероятности суммы нескольких гармонических колебаний со случайными фазами. Амплитуды колебаний одинаковы и равны $A_0 = 1/N$.

Основываясь на плотности вероятности гармонического колебания (4.25), находим характеристическую функцию

$$\theta_1(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{7.54}$$

Подставляя $e^{i\eta x} = \cos\eta x + i\sin\eta x$ и учитывая, что $\sin\eta x/\sqrt{1-x^2}$ является нечетной функцией x, получаем (см. 3.753.2 в [5])

$$\theta_1(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{\cos\eta x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = J_0(\eta), \tag{7.55}$$

где J_0 — бесселева функция первого рода нулевого порядка.

Для отсчета, взятого из суммы N гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами $1/N$, но со случайными взаимно независимыми фазами, характеристическая функция в соответствии с (7.53) будет

$$\theta_N(\eta) = [J_0(\eta/\sqrt{N})]^N. \tag{7.56}$$

Амплитуда каждой из синусоид приравнена $1/\sqrt{N}$ для того, чтобы дисперсия суммы, равная $0{,}5\,N(1/\sqrt{N})^2$, оставалась при увеличении числа синусоид неизменной.

На рис. 7.9 изображены характеристические функции для

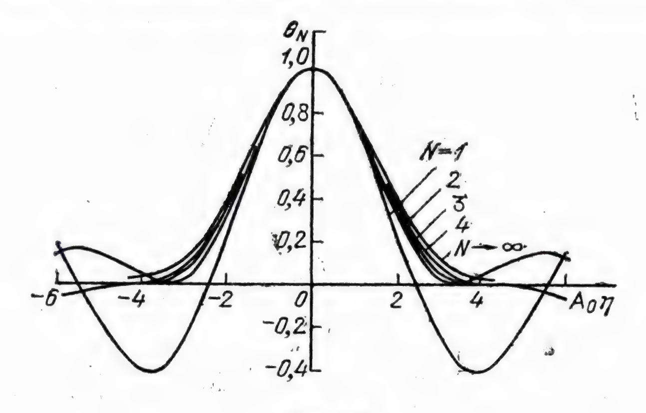


Рис. 7.9

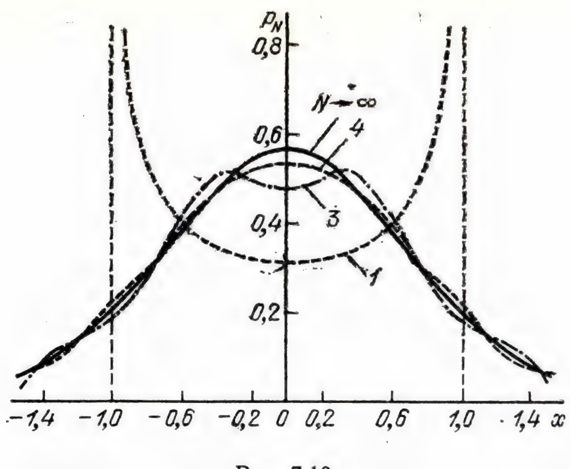


Рис. 7.10

различных значений N. При $N\geqslant 4$ функция $\theta_N(\eta)$ быстро приближается к предельной кривой $N\to\infty$, соответствующей нормальному распределению суммы.

Для отыскания плотности вероятности суммы N гармонических колебаний необходимо в соответствии с выражением (7.46) вычислить интеграл

$$p_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta_N(\eta)\,e^{-i\eta x}d\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[J_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{N}}\right)\right]^N\cos\eta x\,d\eta. \quad (7.57)$$

При $N=1$ получается исходное выражение $p(x)$ для одной синусоиды [формула (4.25)], а при $N=3$, 4 функции $p_N(x)$ имеют вид, показанный на рис. 7.10. Сплошной линией изображена функция $p_N(x)$ при нормальном распределении $(N\to\infty)$.

Полученные результаты показывают, что при суммировании хотя бы пяти-шести гармонических колебаний со случайными и взаимно независимыми фазами получается стационарный случайный процесс, близкий к гауссовскому.

Это справедливо для значений $|x|<\sqrt{N}$ (при $A_0=1$). При бо́льших значениях $|x|$ $p_N(x)=0$, в то время как при нормальном распределении $p(x)$ отлично от нуля. Таким образом, при конечном числе слагаемых N на «хвостах» кривой распределения неизбежно расхождение между $p_N(x)$ и $p_\infty(x)$.

7.7. НОРМАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В УЗКОПОЛОСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Пусть на входе линейной цепи (с постоянными параметрами) действует стационарный случайный процесс с распределением, отличным от нормального. Если интервал корреляции это-

го процесса меньше постоянной времени цепи (т. е. ширина энергетического спектра больше полосы пропускания цепи), то распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному. Эффект нормализации проявляется тем сильнее, чем у́же полоса пропускания цепи. Поясним это положение на двух примерах.

Сначала рассмотрим воздействие на высокодобротный колебательный контур последовательности коротких, неперекрывающихся, случайным образом расположенных на оси времени импульсов (рис. 7.11), причем постоянная времени контура $\tau_к$ велика по сравнению со средней величиной интервалов между импульсами. Напряжение на контуре в какой-либо момент времени t_1 является суммой свободных колебаний, вызванных предыдущими импульсами и не успевших полностью затухнуть к рассматриваемому моменту. Чем у́же полоса пропускания цепи, тем длительнее свободные колебания и, следовательно, тем большее число соизмеримых по величине и некоррелированных слагаемых принимает участие в образовании результирующего напряжения в момент t_1. В соответствии с центральной предельной теоремой эти предпосылки достаточны для приближения распределения к нормальному.

При спектральном подходе эффект нормализации можно объяснить следующим образом. Спектр колебания в контуре складывается из спектров отдельных импульсов входной последовательности. Внутри каждого из этих парциальных спектров фазы спектральных составляющих полностью коррелированы, а между фазами составляющих из различных спектров никакой корреляции нет (из-за случайной расстановки импульсов на оси времени). Чем у́же полоса прозрачности контура, тем меньшую роль играет корреляция фаз в парциальных спектрах.

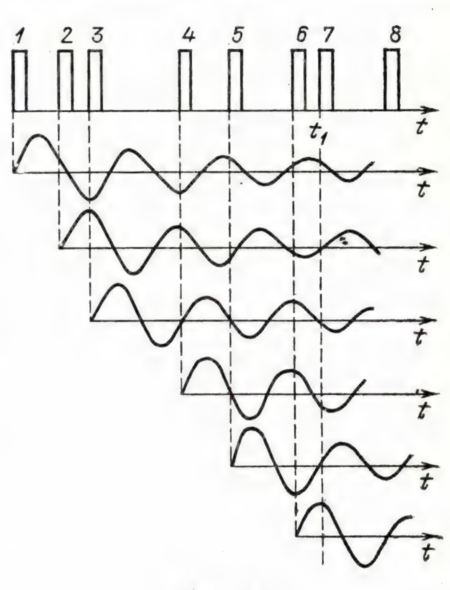


Рис. 7.11

Приведем другой пример, поясняющий явление нормализации в узкополосной цепи. Пусть на контур воздействует непрерывное колебание с постоянной амплитудой и с частотой, модулированной по пилообразному закону со случайным периодом (рис. 7.12). При каждом пробеге частоты через полосу прозрачности контура $2\Delta\omega_0$ в последнем возникает свободное

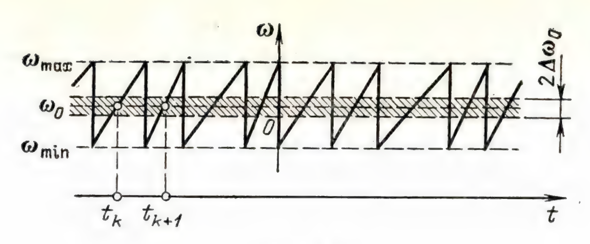


Рис. 7.12

колебание, амплитуда которого обратно пропорциональна наклону «пилы». Так как моменты пересечения полосы прозрачности расположены на оси времени случайным образом, то и свободные колебания образуют импульсную последовательность со случайными интервалами $(t_k,\ t_{k+1})$.

При медленном качании частоты, когда интервалы велики по сравнению с постоянной времени контура $\tau_к$, свободные колебания не перекрываются. Предположим, что $\tau_к$ велико по сравнению со средним значением интервалов $T_{ср}$. Тогда в любой момент времени будет суммироваться много колебаний со случайными и взаимно независимыми фазами и амплитудами. При этом входное колебание, закон распределения которого определяется формулой (4.25) (изменение мгновенной частоты не отражается на одномерном законе распределения высокочастотного колебания с постоянной амплитудой), преобразуется в случайную функцию с распределением, близким к нормальному. Нормализация будет тем полнее, чем больше $\tau_к$ по сравнению с $T_{ср}$.

Учитывая, что для одиночного контура имеет место соотношение $\Delta\omega_0\tau_к=1$, а средняя частота «пилы» $F_{ср}=1/T_{ср}$, условие нормализации можно записать в форме неравенства $F_{ср}\gg\Delta\omega_0$.

В широкополосных линейных цепях при некоторых условиях может иметь место эффект, обратный описанному выше эффекту нормализации: распределение процесса на выходе цепи может отличаться от нормального распределения больше, чем это отличие существует для процесса на входе. Можно привести простой пример подобного эффекта.

Пусть на вход дифференцирующего устройства подается совокупность относительно длинных импульсов, имеющая распределение, близкое к нормальному. В результате дифференцирования каждый из импульсов превращается на выходе в пару очень коротких импульсов, соответствующих фронтам входного импульса. Число взаимно перекрывающихся импульсов на выходе уменьшается, вследствие чего приближение к нормальному закону на выходе оказывается худшим, чем на входе. Подобный эффект иногда называют «денормализацией» процесса.

Следует подчеркнуть, что отмеченный эффект не противоречит тому, что в любой линейной цепи гауссовский процесс сохраняет нормальный закон распределения. Если в приведенном

выше примере среднее число импульсов в единицу времени довести до бесконечности (что необходимо для получения строго нормального распределения), то при дифференцировании, которое можно осуществить в физически реализуемой цепи, процесс будет гауссовским и на выходе цепи.

Глава 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ РЕЗИСТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

8.1. АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для радиотехнических устройств наиболее характерными и распространенными нелинейными резистивными элементами являются полупроводниковые и любые другие приборы, используемые для усиления или преобразования сигналов и имеющие нелинейную вольт-амперную характеристику.

Для осуществления анализа и расчета нелинейных систем реальные вольт-амперные характеристики, имеющие весьма сложную форму и отличающиеся большим разнообразием, должны быть аппроксимированы с помощью относительно простых аналитических зависимостей.

Характеристики нелинейных элементов обычно задаются таблично или в виде графиков.

Наиболее широко используется аппроксимация с помощью степенного полинома. Запишем аппроксимирующий степенной полином в форме

$$i(u)=i(U_0)+a_1(u-U_0)+a_2(u-U_0)^2+a_3(u-U_0)^3+\dots \quad (8.1)$$

Если под нелинейным элементом подразумевается транзистор, то i — ток коллектора, u — напряжение, например, между базой и эмиттером, U_0 — постоянное напряжение, задающее положение рабочей точки на характеристике.

Важной задачей является определение коэффициентов аппроксимации a_1, a_2, $a_3, \dots$ При заданной форме вольт-амперной характеристики эти коэффициенты существенно зависят от U_0, а также от ширины используемого участка характеристики, определяемой величиной подводимого к элементу сигнала.

Рассмотрим некоторые типичные и важные для практики случаи.

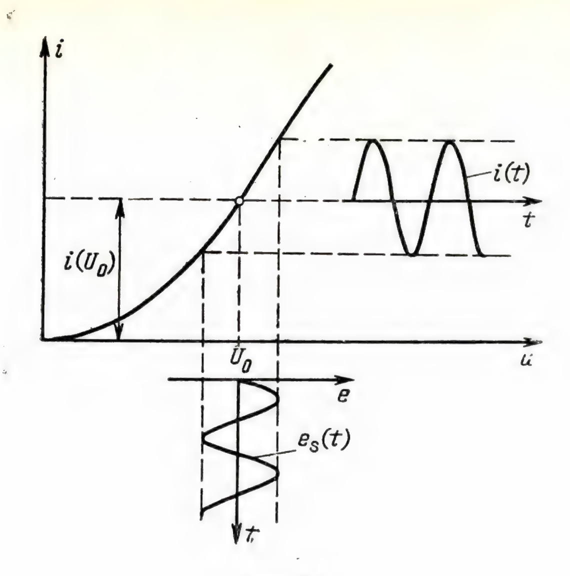


Рис. 8.1

1. Рабочая точка расположена на относительно узком линейном участке характеристики нелинейного элемента, и сигнал не выходит за пределы этого участка (рис. 8.1). В этом случае

$$i\,(U_0+e_s)=i\,(U_0)+a_1e_s, \qquad (8.2)$$

где $i\,(U_0)=I_0$ — ток покоя;

$$a_1=S=(di/du)|_{u=U_0} \qquad (8.3$$

— дифференциальная крутизна характеристики.

Отметим, что аппроксимацией (8.2), включающей в себя определение дифференциальной крутизны (8.3), можно пользоваться только при слабом сигнале. Этот линейный режим работы был использован в гл. 5.

2. Рабочая точка расположена на начальном участке характеристики, имеющем вид квадратичной параболы, в пределах которого ($U_0\pm E_m$) изменяется подводимый к прибору сигнал (рис. 8.2).

Выражение (8.1) в данном случае можно записать в виде полинома второй степени

$$i\,(U_0+e_s)=i\,(U_0)+a_1e_s+a_2e_s^2. \qquad (8.4)$$

Как и в выражении (8.2), слагаемое $i\,(U_0)=I_0$ — ток покоя, а $a_1=S$ — крутизна характеристики [см. (8.3)]. Для определения значений a_1 и a_2 составим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} i\,(U_0+E_m)=I_0+a_1E_m+a_2E_m^2=i_2 \\ i\,(U_0-E_m)=I_0-a_1E_m+a_2E_m^2=i_1 \end{array}\right\},$$

откуда $a_1=(i_2-i_1)/2E_m$, $a_2=(i_1+i_2-2I_0)/2E_m^2$.

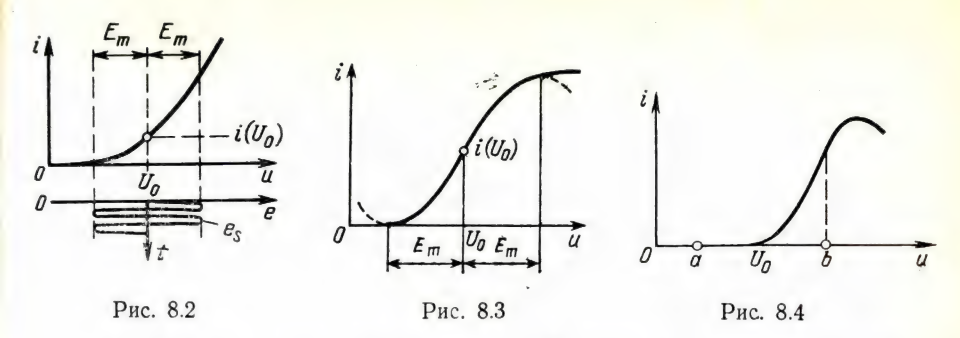


Рис. 8.2 Рис. 8.3 Рис. 8.4

3. Рабочая точка является точкой перегиба характеристики, показанной на рис. 8.3. В точке перегиба кривой $i=f(u)$ все производные четного порядка равны нулю. Поэтому коэффициенты при четных степенях в выражении (8.1) обращаются в нуль.

Для упрощения анализа ограничимся полиномом лишь третьей степени без квадратичного члена (неполным полиномом третьей степени)

$$i(U_0+e_s)=i(U_0)+a_1e_s+a_3e_s^3. \tag{8.5}$$

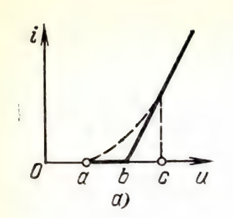
Соответствующая этой аппроксимации характеристика показана на рис. 8.3 штриховой линией. Рабочий диапазон характеристики определяется интервалом (U_0-E_m, U_0+E_m). На границах этого интервала производные аппроксимирующей функции обращаются в нуль. Коэффициенты аппроксимации a_1 и a_3 находим из решения системы уравнений

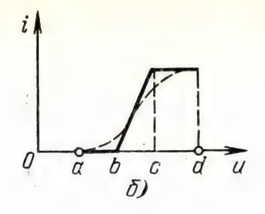
$$i(U_0-E_m)=I_0-a_1E_m-a_3E_m^3=0,$$
$$(di/de_s)|_{e_s=E_m}=a_1+3a_3E_m^2=0.$$

Имеем $a_1=3I_0/2E_m$, $a_3=-I_0/2E_m^3<0$.

4. Рабочая точка находится на нижнем сгибе характеристики, изображенной на рис. 8.4. Если изменение напряжения настолько велико, что используется участок, обозначенный на оси абсцисс буквами a, b, то для удовлетворительной аппроксимации требуется полином пятой и более высокой степени. При этом анализ усложняется, и применение степенного полинома для практических расчетов оказывается неэффективным.

При очень больших амплитудах сигнала часто удобнее заменять реальную характеристику идеализированной, составленной из отрезков прямых линий. Такое представление характеристики называется *кусочно-линейной аппроксимацией*. Некоторые примеры кусочно-линейной аппроксимации изображены на рис. 8.5. Рис. 8.5,*а* соответствует случаю, когда используется нижний сгиб и линейная часть характеристики (участок $a-c$); рис. 8.5,*б* — когда сигнал захватывает нижний и верхний сгибы (участок $a-d$), а рис. 8.5,*в* — когда сигнал достигает также падающего участка характеристики (участок





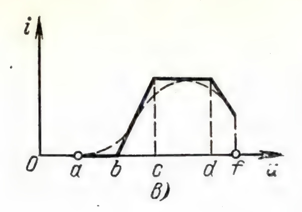


Рис. 8.5

$a—f$). Следует особо подчеркнуть, что замена реальной нелинейной характеристики линейными отрезками не означает линеаризации системы. Например, несмотря на то, что на участке $b—c$ (рис. 8.5,a) характеристика линейна, по отношению к сигналу, захватывающему область изменения $a—c$, система в целом является существенно нелинейной.

Кусочно-линейная аппроксимация особенно проста и удобна для исследований и расчетов, когда основное значение имеет нижний сгиб характеристики, т. е. когда можно ограничиваться двумя прямыми (рис. 8.5,a). При более сложной форме используемого участка характеристики число аппроксимирующих отрезков растет и кусочно-линейная аппроксимация теряет свои преимущества. В подобных случаях иногда для аппроксимации применяются различные трансцендентные функции, например гиперболический тангенс, экспоненциальные функции и некоторые другие.

8.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА НА БЕЗЫНЕРЦИОННЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Под безынерционным нелинейным элементом подразумевается любой электронный прибор с нелинейной вольт-амперной характеристикой при использовании его в диапазоне частот, на которых можно пренебречь влиянием паразитных параметров (внутренних емкостей и индуктивностей).

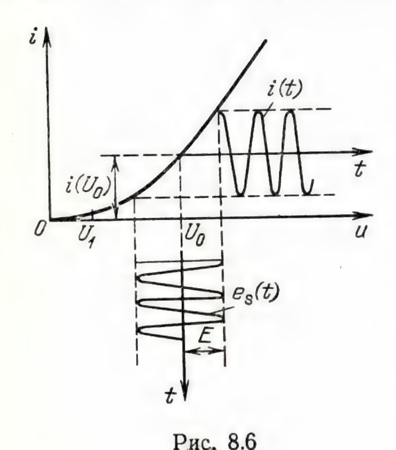


Рис. 8.6

Рассмотрим режим работы, представленный на рис. 8.6, при котором напряжение сигнала $e_s(t)$ не выходит за пределы точки U_1 и вольт-амперная характеристика $i(u)$ удовлетворительно аппроксимируется степенным полиномом (8.1).

Сигнал $e_s(t)$ зададим сначала в форме гармонического колебания $e_s(t)=E\cos(\omega_1 t+\theta_1)=$ $=E\cos\psi_1(t)$. Результаты ана-

лиза затем будут распространены на некоторые узкополосные радиосигналы.

Подставив в (8.1) $u-U_0=e_s(t)$, получим

$$i(t)=i(U_0)+a_1E\cos\psi_1(t)+a_2E^2\cos^2\psi_1(t)+$$
$$+a_3E^3\cos^3\psi_1(t)+\ldots \qquad (8.6)$$

Форма тока $i(t)$ показана на рис. 8.6.

С помощью тригонометрических соотношений

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x,$$

$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x, \quad \cos^5 x=\frac{5}{8}\cos x+$$

$$+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 5x \quad \text{и т. д.}$$

выражение (8.6) приводим к виду

$$i(t)=\left[i(U_0)+\frac{1}{2}a_2E^2+\frac{3}{8}a_4E^4+\ldots\right]+\left(a_1E+\frac{3}{4}a_3E^3+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{8}a_5E^5+\ldots\right)\cos\psi_1(t)+\left(\frac{1}{2}a_2E^2+\frac{1}{2}a_4E^4+\ldots\right)\times$$

$$\times\cos 2\psi_1(t)+\left(\frac{1}{4}a_3E^3+\frac{5}{16}a_5E^5+\ldots\right)\cos 3\psi_1(t)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}a_4E^4+\ldots\right)\cos 4\psi_1(t)+\left(\frac{1}{16}a_5E^5+\ldots\right)\cos 5\psi_1(t)+\ldots$$

$$\ldots=I_0+I_1\cos\psi_1(t)+I_2\cos 2\psi_1(t)+I_3\cos 3\psi_1(t)+\ldots \qquad (8.7)$$

Из этого выражения видны следующие проявления нелинейности вольтамперной характеристики при гармоническом воздействии:

ток покоя $i(U_0)$ получает приращение, обусловленное коэффициентами a_2, a_4, ... при четных степенях полинома (8.1):

$$I_0=i(U_0)+\frac{1}{2}a_2E^2+\frac{3}{8}a_4E^4+\ldots; \qquad (8.8)$$

амплитуда I_1 гармоники основной частоты ω_1 связана с амплитудой возбуждения E нелинейным соотношением, обусловленным нечетными степенями полинома (8.1):

$$I_1=a_1E+\frac{3}{4}a_3E^3+\ldots; \qquad (8.9)$$

ток $i(t)$ содержит высшие гармоники с частотами $n\omega_1$, кратными частоте воздействия ω_1. Гармоника с частотой $2\omega_1$ обусловлена четными степенями ($k=2,4,\ldots$) полинома (8.1), гармоника с частотой $3\omega_1$ — нечетными степенями ($k=3,5,\ldots$) и т. д. Спектр тока при гармоническом воздействии изображен на рис. 8.7,*а*.

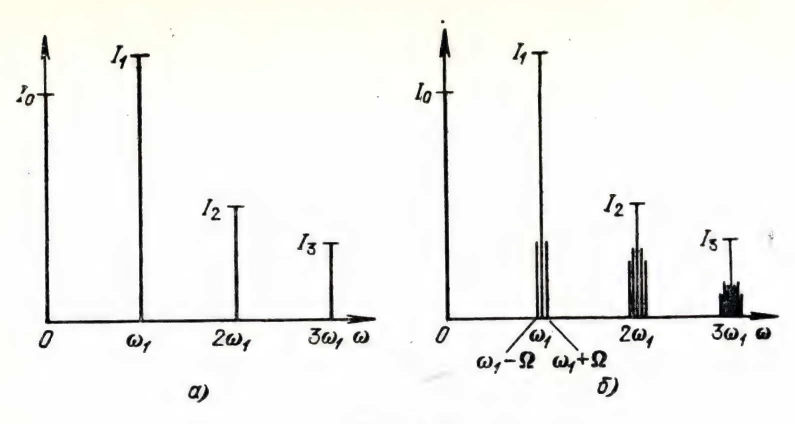


Рис. 8.7

Очевидно также, что наивысший порядок гармоник совпадает с максимальной степенью k аппроксимирующего полинома, а полная фаза n-й гармоники $\psi_n(t)=n\omega_1 t+n\theta_1$.

Выражения (8.6)—(8.9) полностью сохраняют свою структуру при замене постоянной начальной фазы θ_1 модулированной фазой $\theta_1(t)=\theta_{1max}s(t)$. Из этого следует, что сформулированные выше положения можно распространить также на воздействие частотно-модулированного сигнала на безынерционный нелинейный элемент (при постоянной амплитуде). Необходимо лишь каждую из гармоник тока с амплитудой I_n трактовать как несущее колебание, модулированное по углу. Это объясняется тем, что при угловой модуляции амплитуда колебания, несмотря на возникновение спектра боковых частот, остается неизменной.

Для первой (основной) гармоники индекс угловой модуляции совпадает с $\theta_{1max}=m_1$, а для высших гармоник индекс $n\theta_{1max}=nm_1$. Соответственно в n раз увеличивается и девиация частоты.

Сказанное иллюстрируется рис. 8.7,*б*. Частота модуляции $\Omega\ll\omega_1$. С увеличением номера гармоники ширина спектра боковых частот возрастает, но, как отмечалось выше, амплитуда суммарного колебания остается равной I_n.

Для амплитудно-модулированного колебания, когда $E=E(t)$, нелинейность характеристики может сильно изменить форму передаваемого сигнала. Этот вопрос рассматривается в § 8.4, 8.7.

Рассмотрим теперь работу нелинейного элемента в режиме существенно более нелинейном (рис. 8.8,*а*), получаемом при сдвиге рабочей точки U_0 влево и соответствующем увеличении амплитуды возбуждающего напряжения E. В данном случае целесообразно применить кусочно-линейную аппроксимацию вольт-амперной характеристики (см. § 8.1, комментарий к рис. 8.5,*а*).

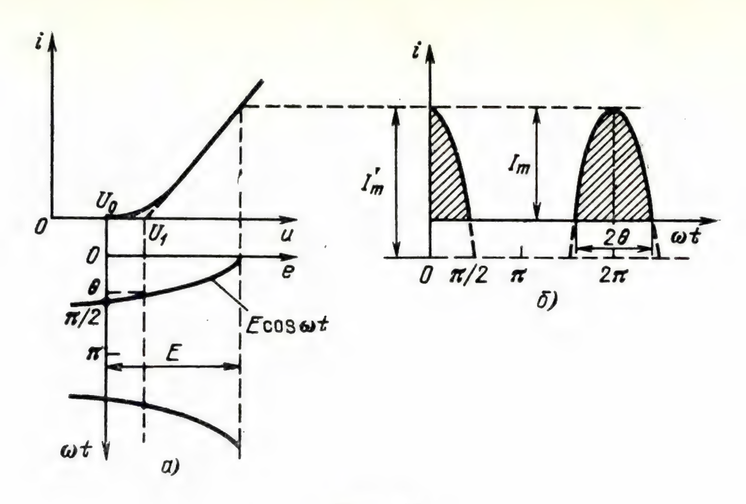


Рис. 8.8

При гармоническом возбуждении ток $i(t)$ приобретает импульсную форму (рис. 8.8,*б*). Угол θ, соответствующий изменению тока от максимального значения I_m до нуля, получил название угла отсечки тока. Длительность импульсов тока равна 2θ (рис. 8.8,*б*). Из рис. 8.8,*а* очевидно следующее выражение:

$$\cos\theta = (U_1 - U_0)/E. \quad (8.10)$$

Амплитуда тока

$$I_m = a_1[E - (U_1 - U_0)] = a_1 E (1 - \cos\theta), \quad (8.11)$$

где a_1 — крутизна линейной части вольт-амперной характеристики [см. (8.3)].

При гармоническом возбуждении нелинейного элемента форма импульса тока в пределах $-\theta < \omega t < \theta$ близка к отсеченной косинусоиде и, если пренебречь кривизной вольт-амперной характеристики на нижнем сгибе (см. рис. 8.8,*а*), мгновенное значение тока можно выразить уравнением

$$i(t) = I'_m (\cos\omega t - \cos\theta), \; -\theta < \omega t < \theta. \quad (8.12)$$

Символом I'_m обозначена амплитуда импульса, которая получилась бы при $\theta = \pi/2$.

Так как амплитуда реального импульса I_m соответствует моменту $\omega t = 0$, имеет место соотношение

$$I_m = i(0) = I'_m (1 - \cos\theta),$$

откуда

$$I'_m = I_m / (1 - \cos\theta).$$

Подставив это выражение в (8.12), получим окончательно

$$i(t) = \frac{I_m}{1 - \cos\theta} (\cos\omega t - \cos\theta), \quad -\theta < \omega t < \theta. \quad (8.13)$$

Основываясь на этом выражении, нетрудно определить амплитуды гармоник ряда Фурье для периодической последовательности импульсов, представленной на рис. 8.9. Вследствие четности функции $i(t)$ ряд содержит одни лишь косинусоидальные члены. Используя (2.27), находим

$$I_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\,d(\omega t)=\frac{I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_{0}^{\theta}(\cos\omega t-\cos\theta)\,d(\omega t)=$$

$$=I_m\frac{\sin\theta-\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \tag{8.14}$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\cos\omega t\,d(\omega t)=\frac{2I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_{0}^{\theta}(\cos\omega t-\cos\theta)\times$$

$$\times\cos\omega t\,d(\omega t)=I_m\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}. \tag{8.15}$$

Аналогично можно получить общее выражение для амплитуды n-й гармоники

$$I_n=I_m\frac{2(\sin n\theta\cos\theta-n\cos n\theta\sin\theta)}{\pi n(n^2-1)(1-\cos\theta)},\quad n\geqslant 2. \tag{8.16}$$

Отношения

$$\alpha_0(\theta)=\frac{I_0}{I_m}=\frac{\sin\theta-\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)},$$

$$\alpha_1(\theta)=\frac{I_1}{I_m}=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \tag{8.17}$$

$$\alpha_2(\theta)=I_2/I_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n(\theta)=I_n/I_m$$

называются коэффициентами соответственно постоянной составляющей, первой гармоники и т. д. (функции Берга).

Графики коэффициентов α_0, α_1, α_2, ..., а также отношения $\gamma_1=\alpha_1/\alpha_0$ при изменении угла отсечки от $\theta=0$ до $\theta=180°$ пока-

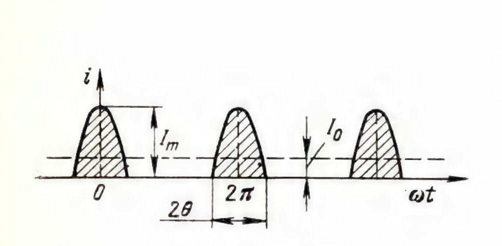


Рис. 8.9

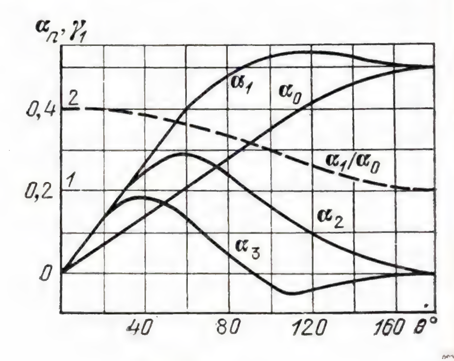


Рис. 8.10

заны на рис. 8.10. При $\theta=0$ ток вообще равен нулю (нелинейный элемент заперт на протяжении всего периода); при $\theta=180°$ отсечка тока отсутствует и режим работы становится линейным.

Из рассмотрения графиков функций $\alpha_n(\theta)$ можно вывести важное заключение: при работе с углом отсечки меньше 180° отношение амплитуды первой гармоники I_1 к постоянной составляющей I_0 больше единицы. Видно, что с уменьшением θ отношение

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_0}=\frac{I_1}{I_0}=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta-\theta\cos\theta} \tag{8.18}$$

растет. Кроме того, с повышением номера гармоники максимумы функций $\alpha_n(\theta)$ перемещаются в область малых значений θ. Все эти обстоятельства существенно влияют на выбор режима работы нелинейного элемента при усилении колебаний, умножении частоты и при некоторых других преобразованиях, которые рассматриваются в последующих параграфах данной главы.

8.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Представим колебание в виде суммы

$$e_s(t)=E_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+E_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)=E_1\cos\psi_1(t)+ +E_2\cos\psi_2(t). \tag{8.19}$$

Подстановка (8.19) в ряд (8.1) приводит к следующим результатам: для линейного члена ряда

$$a_1e_s(t)=a_1E_1\cos\psi_1(t)+a_2E_2\cos\psi_2(t); \tag{8.20}$$

для квадратичного члена ряда

$$a_2e_s^2(t)=a_2[E_1\cos\psi_1(t)+E_2\cos\psi_2(t)]^2=a_2E_1^2\cos^2\psi_1(t)+ +a_2E_2^2\cos^2\psi_2(t)+2a_2E_1E_2\cos\psi_1(t)\cos\psi_2(t)={}^1/_2a_2(E_1^2+ +E_2^2)+{}^1/_2a_2E_1^2\cos2(\omega_1 t+\theta_1)+{}^1/_2a_2E_2^2\cos2(\omega_2 t+\theta_2)+ +a_2E_1E_2\{\cos[(\omega_1+\omega_2)t+(\theta_1+\theta_2)]+\cos[(\omega_1-\omega_2)t+ +(\theta_1-\theta_2)]\}. \tag{8.21}$$

Первое слагаемое, не зависящее от времени, определяет приращение постоянного тока. Слагаемые с частотами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ представляют собой вторые гармоники от соответствующих компонентов входного сигнала. Слагаемые же с частотами $\omega_1+\omega_2$ и $\omega_1-\omega_2$ представляют комбинационные колебания.

Частоты, образуемые квадратичным слагаемым $a_2e_s^2(t)$, можно записать в форме

$$\omega=m\omega_1\pm n\omega_2,$$

где коэффициенты m и n могут принимать следующие значения:

$$m=0,\ n=0 \to \omega=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} m=2,\ n=0 \to \omega=2\omega_1, \\ m=0,\ n=2 \to \omega=2\omega_2, \end{array}\right\} \text{ гармоники второго порядка;}$$

$m=1$, $n=1 \to \omega=\omega_1 \pm \omega_2$ — комбинационные частоты второго порядка.

Проделав преобразование, аналогичное (8.21), над кубическим слагаемым $a_3 e_в^3(t)$, убедимся, что это слагаемое вносит в спектр частоты $\omega = m\omega_1 \pm n\omega_2$ при следующих значениях m и n:

$$\left.\begin{array}{l} m=1,\ n=0 \to \omega=\omega_1, \\ m=0,\ n=1 \to \omega=\omega_2, \end{array}\right\} \text{ гармоники первого порядка;}$$

$$\left.\begin{array}{l} m=3,\ n=0 \to \omega=3\omega_1, \\ m=0,\ n=3 \to \omega=3\omega_2, \end{array}\right\} \text{ гармоники третьего порядка;}$$

$$\left.\begin{array}{l} m=1,\ n=2 \to \omega=\omega_1 \pm 2\omega_2, \\ m=2,\ n=1 \to \omega=2\omega_1 \pm \omega_2. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{комбинационные частоты} \\ \text{третьего порядка.}\end{array}$$

Приведенных выражений достаточно для установления закономерности образования частот гармоник и комбинационных колебаний при бигармоническом воздействии на нелинейный элемент:

слагаемые ряда (8.1) четной степени привносят в спектр тока гармоники четных порядков [как и в случае воздействия одного гармонического колебания (см. § 8.2)], и, кроме того, комбинационные частоты четных порядков;

слагаемые ряда (8.1) нечетной степени привносят гармоники и комбинационные колебания нечетных порядков.

Из предыдущих выражений видно, что число $p=m+n$ определяет порядок колебаний, причем максимально возможный порядок $p_{max}=k$, где k — степень полинома, аппроксимирующего нелинейную характеристику.

Содержание предыдущего и настоящего параграфов показывает, что нелинейная цепь преобразует спектр входного сигнала: возникают гармоники на кратных частотах и различные комбинационные колебания.

Принцип работы ряда радиотехнических устройств основан на использовании тех или иных составляющих спектра тока на выходе безынерционного нелинейного элемента. Обобщенную структурную схему подобных устройств можно представить в виде сочетания нелинейной цепи и линейного фильтра.

На рис. 8.11 изображена схема, соответствующая «развязанным» нелинейному и линейному элементам, когда отсутствует обратная реакция выходного сигнала на ток в нелинейной цепи. На схеме, показанной на рис. 8.12, ток в нелинейной цепи $i_{нл}(t)$ зависит как от входного сигнала $e(t)$, так и от напря-

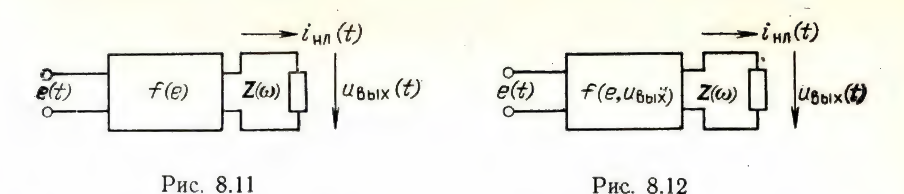


Рис. 8.11 Рис. 8.12

жения $u_{вых}(t)$. Нелинейная функция $f(e)$, описывающая характеристику нелинейного элемента, зависит от его устройства и от режима работы. Через $Z(\omega)$ обозначено сопротивление (комплексное) линейной частотно-избирательной цепи. Структура этой цепи, частотная характеристика и полоса пропускания выбираются в зависимости от назначения устройства.

Сформулированные в § 8.2 и 8.3 результаты используются ниже для выявления основных свойств ряда важных нелинейных преобразований, применяемых в радиотехнических системах передачи, приема и обработки информации.

8.4. НЕЛИНЕЙНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ УСИЛЕНИЕ

В предыдущих главах линейные усилители трактовались как усилители слабых сигналов, при которых амплитуда переменной составляющей тока I_1 в активном элементе (например, в цепи коллектора транзистора) составляет небольшую долю от постоянного тока I_0, отбираемого от источника питания усилителя. При этом коэффициент полезного действия (КПД), определяемый как отношение мощности выходного сигнала к мощности, потребляемой от источника энергии, весьма мал. (В резонансных усилителях, применяемых в радиоприемных устройствах, отношение I_1/I_0 настолько мало, что вопрос о КПД вообще не принимается во внимание.)

При значительной требуемой мощности сигнала вопрос о КПД усилителя приобретает первостепенное значение, особенно в технике радиопередающих устройств. Повысить отношение I_1/I_0 можно переводом усилителя в режим работы с отсечкой тока, т. е. в нелинейный режим. При этом, естественно, должна быть сохранена структура усиливаемого сигнала.

Рассмотрим сначала случай гармонического сигнала на входе усилителя. Схема нелинейного резонансного усилителя не отличается от схемы, рассмотренной в гл. 6 (рис. 6.2). Основное отличие — в режиме работы усилительного прибора. Сдвигом рабочей точки на вольтамперной характеристике влево и увеличением амплитуды входного колебания устанавливается режим работы с отсечкой тока (в транзисторном усилителе — коллекторного). Подобный режим представлен на рис. 8.8, *а*.

В дальнейшем рассматриваются особенности нелинейного режима, характерные для любого типа усилителя Ток $i(t)$ в выходной цепи усилителя при работе с отсечкой имеет импуль-

сную форму (см. рис. 8.9) и содержит наряду с постоянной составляющей и полезной первой гармоникой ряд высших гармоник, которые должны быть подавлены (отфильтрованы). Эту задачу решает параллельный колебательный контур, настроенный на частоту ω_0 входного колебания. При резонансе токов эквивалентное сопротивление параллельного контура $Z_{эк\,р}$ между точками *1—2* (см. рис. 6.2, *а*) очень велико и является сопротивлением нагрузки усилителя. По отношению же к высшим гармоникам тока $i(t)$ контур, обладающий достаточно большой добротностью Q, можно рассматривать как короткое замыкание. В результате, несмотря на искаженную импульсную форму тока $i(t)$, на нагрузочном контуре, как и в линейном усилителе, выделяется напряжение, очень близкое к гармоническому.

Установим соотношения между напряжениями и токами основной частоты ω_0 в нелинейном усилителе.

В первом приближении, если не учитывать обратной реакции выходного напряжения на ток I_1, т. е. исходить из обобщенной схемы на рис. 8.11, можно воспользоваться формулой (8.11), которая с учетом (8.17) приводит к выражению

$$I_m = a_1 E(1-\cos\theta) = I_1/\alpha_1(\theta),$$

откуда

$$I_1 = \alpha_1(\theta) I_m = \alpha_1(\theta)(1-\cos\theta) a_1 E. \qquad (8.22)$$

Напомним, что в соответствии с выражением (8.3) коэффициент $a_1 = S$ имеет смысл крутизны вольт-амперной характеристики на линейном участке.

Таким образом,

$$I_1 = \alpha_1(\theta)(1-\cos\theta) SE. \qquad (8.22')$$

Схема замещения выходной цепи усилителя представлена на рис. 8.13, *а*. Активный элемент замещается генератором импульсного тока, однако напряжение на резонансном контуре создается только первой гармоникой тока и поэтому определяется выражением

$$u_к(t) = -I_1 Z_{эк\,р} \cos\omega_0 t = U_{вых} \cos\omega_0 t \qquad (8.23)$$

(знак минус связан с выбранным на схеме рис. 8.13 направлением тока и отсчетом потенциалов относительно заземленной точки схемы).

Разделив выражение (8.22) на E, получим параметр

$$S_{ср} = I_1/E = a_1(1-\cos\theta)\alpha_1(\theta) = S(1-\cos\theta)\alpha_1(\theta), \qquad (8.24)$$

который можно трактовать как среднюю крутизну характеристики для первой гармоники.

Таким образом.

$$I_1 = S_{ср} E. \qquad (8.25)$$

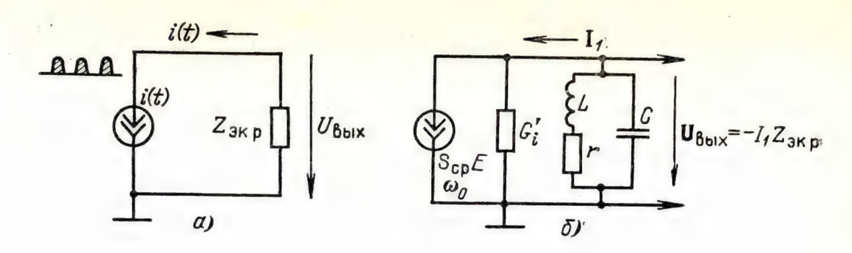


Рис. 8.13

В отличие от дифференциальной крутизны $S=a_1$, которая определяется в точке и поэтому при работе на нелинейном участке характеристики зависит от рассматриваемого момента времени, параметр $S_{\text{ср}}$, выраженный через отношение амплитуд тока и напряжения, является как бы усредненным по всему периоду колебания. Понятие средней крутизны имеет смысл, если обеспечивается синусоидальность напряжения на нагрузке (несмотря на сложную форму тока $i(t)$).

При учете влияния выходного напряжения на ток $i(t)$ выражение (8.25) должно быть заменено более точным

$$I_1=S_{\text{ср}}E-U_{\text{вых}}G_i'=S_{\text{ср}}E-U_{\text{вых}}/R_i'. \qquad (8.25')$$

Здесь

$$G_i'=1/R_i'=G_i\alpha_i(\theta)\,(1-\cos\theta) \qquad (8.26)$$

представляет собой внутреннюю проводимость нелинейного элемента, приведенную к току первой грамоники.

Подставляя в (8.25') $I_1=U_{\text{вых}}/Z_{\text{эк р}}$ и учитывая (8.23), нетрудно получить следующее выражение для коэффициента усиления при работе с отсечкой тока:

$$K_E=\frac{U_{\text{вых}}}{E}=-\frac{S_{\text{ср}}Z_{\text{эк р}}}{1+Z_{\text{э кр}}/R_i'}. \qquad (8.27)$$

При $Z_{\text{эк р}}/R_i'\ll 1$ можно пользоваться приближенной формулой

$$K_E\approx -S_{\text{ср}}Z_{\text{эк р}}. \qquad (8.27')$$

На основании выражения (8.25') схему замещения выходной цепи усилителя можно привести к виду, представленному на рис. 8.13, *б*, где $U_{\text{вых}}=-I_1Z_{\text{эк р}}$ обозначает амплитуду напряжения на выходе.

От аналогичной схемы замещения линейного усилителя (см. рис. 6.2, *б*) эта схема отличается тем, что в ней $S_{\text{ср}}$ и G_i' являются функциями угла отсечки θ и, следовательно, амплитуды входного напряжения E.

При $\theta=0$ усилительный прибор полностью заперт и $S_{\text{ср}}=0$.

При $\theta=90°$, когда ток имеет форму полуволновых импульсов, $S_{ср}={}^1/_2 a_1$, а при $\theta=180°$ (линейный режим) средняя крутизна $S_{ср}$ стремится к $S=a_1$.

То обстоятельство, что при изменении амплитуды колебаний изменяются параметры $S_{ср}$ и G_i' и, следовательно, нарушается пропорциональность между амплитудами на входе и выходе, заставляет трактовать цепь как нелинейную. Но сохранение формы колебания (гармонического) позволяет трактовать цепь как линейную (при фиксированной амплитуде).

Такой подход к анализу нелинейных устройств получил название **квазилинейного метода**.

Оценим КПД нелинейного резонансного усилителя. Мощность, выделяемая переменной составляющей тока в колебательном контуре (и расходуемая в сопротивлении r, учитывающем мощность, передаваемую в нагрузку), $P_{\sim}={}^1/_2 I_1 U_{вых}$, а мощность, потребляемая от источника постоянного тока, $P_0=I_0E_0$. Следовательно,

$$КПД=\frac{P_{\sim}}{P_0}=\frac{1}{2}\frac{I_1}{I_0}\frac{U_{вых}}{E_0}=\frac{1}{2}\gamma_1\frac{U_{вых}}{E_0}.$$

Амплитуда напряжения на контуре $U_{вых}$ может быть доведена до значения, близкого к E_0, а отношение токов $I_1/I_0=\gamma_1$ зависит от угла отсечки θ.

Из графиков на рис. 8.10 следует, что для повышения коэффициента $\gamma_1=I_1/I_0$ выгодно уменьшать угол отсечки θ. При этом, однако, уменьшается I_1 (при заданной амплитуде импульса I_m), что ведет к уменьшению мощности $P_{\sim}$ (мощность P_0 уменьшается быстрее, чем $P_{\sim}$). Поэтому в тех случаях, когда важно максимизировать мощность $P_{\sim}$, угол отсечки θ доводят до $\sim 120°$, при котором коэффициент $\alpha_1(\theta)$ достигает максимума, допуская при этом некоторое снижение КПД.

Такой подход оправдан при постоянной амплитуде входного сигнала. В случае же усиления амплитудно-модулированного колебания выбор угла отсечки должен быть подчинен требованию получения линейной зависимости тока I_1 от амплитуды $E(t)$ входного радиосигнала. Это условие обеспечивается при $\theta=90°$.

Из рис. 8.8 следует, что при $U_0=U_1$ изменение амплитуды входного напряжения E приводит лишь к пропорциональному изменению амплитуды импульса тока при сохранении формы импульса. Таким образом, при работе с отсечкой $\theta=90°$ средняя крутизна не зависит от амплитуды входного сигнала и всегда равна $0{,}5S$. При этом коэффициент первой гармоники $\alpha_1=I_1/I_m=0{,}5$ [см. (8.17)], т. е. амплитуда первой гармоники равна половине амплитуды импульса.

При $\theta=90°$, $\gamma_1=\pi/2$ и $U_{вых}\approx E_0$ $КПД=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\approx 78\%$. (Это максимальный КПД, соответствующий пиковой амплитуде входного колебания; в режиме же несущего колебания КПД

снижается до $1/(1+M)$ максимального значения; M — коэффициент модуляции усиливаемого колебания.)

При угловой модуляции высокочастотного колебания нелинейность режима усиления не оказывает влияния на структуру радиосигнала при любом угле отсечки и любой форме вольт-амперной характеристики (см. § 8.2).

8.5. РЕАЛИЗАЦИЯ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Из предыдущего параграфа очевидно, что изменение амплитуды высокочастотного колебания можно осуществить воздействием напряжения, пропорционального модулирующей функции $s(t)$, на нелинейный резонансный усилитель. Структурная схема устройства для получения АМ колебания представлена на рис. 8.14. На вход усилителя, работающего с отсечкой тока, подается несущее колебание с частотой ω_0 от независимого источника (автогенератора). Модулирующий сигнал (сообщение) $s(t)$, спектр которого расположен в области частот, низких по сравнению с ω_0, изменяет положение рабочей точки на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента и в результате изменяется амплитуда колебаний на выходе.

Режим работы нелинейного усилителя при модуляции поясняется рис. 8.15, построенным для тональной АМ [$s(t) \propto e_\Omega(t)$ — гармоническая функция с частотой Ω].

При правильном выборе амплитуды модулирующего напряжения $e_\Omega(t)$ огибающая импульсов тока I_m изменяется относительно исходного значения I_{m0} по закону

$$I_m = I_{m0} + Se_\Omega(t),$$

где S — крутизна вольт-амперной характеристики нелинейного элемента на линейном участке, а амплитуда первой гармоники коллекторного тока — по закону

$$I_{к1} = \alpha_1(\theta) I_m = \alpha_1(\theta)[I_{m0} + Se_\Omega(t)].$$

Так как в процессе модуляции угол отсечки θ не остается постоянным, при рассматриваемом способе неизбежны искажения передаваемого сообщения. Искажения могут быть достаточно малыми при правильном выборе пределов изменения угла отсечки и работе с не слишком глубокой АМ (40 . . . 50%).

Для получения более глубокой модуляции (близкой к 100%) в технике радиопередающих устройств управление амплитудой осуществляется в оконечном (мощном) каскаде усиления, в котором устанавливается перенапря-

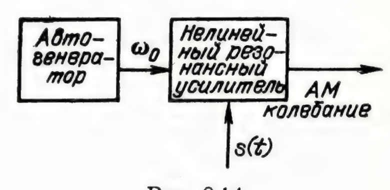


Рис. 8.14

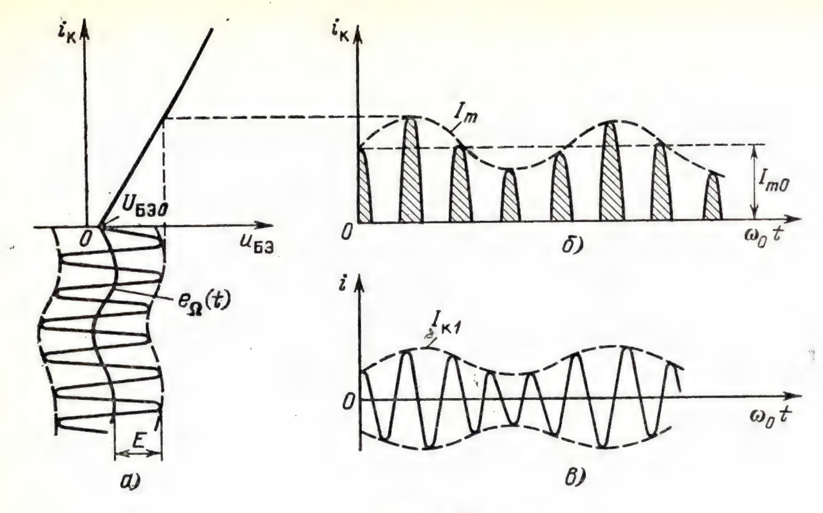


Рис. 8.15

женный режим, приводящий к расщеплению импульса тока. Модулирующее напряжение $e_\Omega(t)$ изменяет ширину провала в импульсе и, таким образом, амплитуду первой гармоники тока.

8.6. УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ

Наличие в составе импульсного тока ряда гармоник с частотами, кратными основной частоте возбуждения, позволяет использовать усилитель, работающий с отсечкой тока, в качестве умножителя частоты. Для этого не требуются какие-либо изменения в схеме резонансного усилителя, достаточно лишь нагрузочный колебательный контур настроить на частоту выделяемой гармоники и установить наиболее выгодный для подчеркивания полезной гармоники режим работы активного элемента. Из графиков, изображенных на рис. 8.10, видно, что для удвоения частоты выгодно работать с углом отсечки, близким к 60°, при котором коэффициент второй гармоники проходит через максимум, для утроения частоты — с углом отсечки 40° и т. д.

Если контур настроен на частоту $n\omega_0$, $n=2, 3, \ldots,$ то гармоники тока порядков $n-1$ и более низких пройдут преимущественно через индуктивную ветвь, а гармоники порядков $n+1$ и более высоких — через емкостную ветвь контура. При достаточно высокой добротности напряжение на контуре от всех гармоник, за исключением n-й, очень мало. Поэтому напряжение на контуре близко к гармоническому с частотой $n\omega_0$.

Следует иметь в виду, что для полного использования мощности электронного прибора уменьшение угла отсечки должно осуществляться при поддержании амплитуды импульса неизменной. Для этого одновременно с изменением смещения $|U_0|$

нужно увеличивать амплитуду переменного напряжения на входе E. На рис. 8.16 углу $\theta=90°$ соответствует смещение U_{01}, углу $\theta=60°$ — смещение U_{02} и т. д.; амплитуды E_1, $E_2, \ldots$ выбраны такими, что I_m остается неизменной. Можно поэтому считать, что для умножителя частоты характерен режим работы с большими амплитудами входного напряжения.

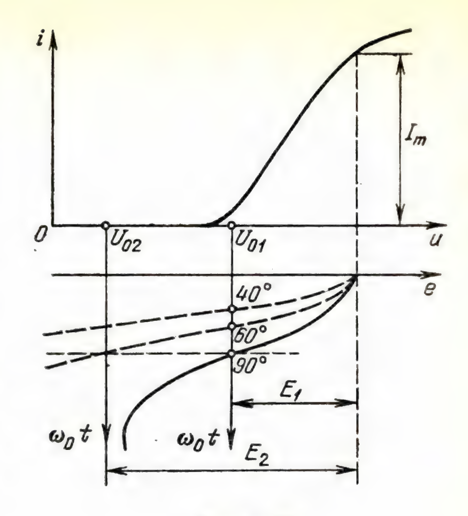


Рис. 8.16

Это обстоятельство наряду с уменьшением полезной мощности при повышении порядка умножения из-за убывания коэффициентов α_n (см. рис. 8.10) существенно ухудшает энергетические соотношения в умножителях.

Схема замещения умножителя частоты внешне не отличается от схемы замещения нелинейного усилителя (см. рис. 8.13, *б*). Следует лишь по аналогии с выражением (8.24) под средней крутизной подразумевать

$$S_{\text{ср}}=I_n/E=S(1-\cos\theta)\alpha_n, \quad (8.28)$$

где коэффициент n-й гармоники α_n определяется формулой (8.17).

Соответственно и внутреннее сопротивление электронного прибора, приведенное к используемой гармонике,

$$R_i'=R_i/\alpha_n(1-\cos\theta). \quad (8.29)$$

8.7. АМПЛИТУДНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

В радиотехнике часто возникает необходимость устранить нежелательные изменения амплитуды высокочастотного колебания, возникающие из-за накладки помех на радиосигнал, при передаче частотно-модулированных колебаний через избирательные цепи и т. д.

Для этого широко используются амплитудные ограничители, представляющие собой сочетание нелинейного элемента и избирательной нагрузки. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента должна иметь четко выраженную горизонтальную часть, а полоса пропускания избирательной цепи должна быть не шире той, которая требуется для передачи информации, содержащейся в частоте (или фазе) ограничиваемого колебания. В качестве амплитудного ограничителя может быть

использован, в частности, обычный нелинейный резонансный усилитель, рассмотренный в § 8.4, в режиме работы, показанном на рис. 8.17.

Пусть к ограничителю подводится колебание вида

$$e(t)=E(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)], \qquad (8.30)$$

причем изменение огибающей $E(t)$ является нежелательным, паразитным фактором. Если это изменение не выходит за пределы горизонтального участка характеристики $i=f(u)$, как это показано на рис. 8.17, то импульсы тока имеют одинаковую амплитуду независимо от $E(t)$. Несколько изменяется лишь ширина вершины импульсов. Поэтому можно в первом приближении считать, что амплитуда первой гармоники, а следовательно, и амплитуда напряжения на колебательном контуре являются в некотором интервале изменения амплитуды $E(t)$ постоянными величинами.

Характеристику ограничителя с избирательной нагрузкой, обеспечивающей отфильтровывание высших гармоник, можно представить в виде, изображенном на рис. 8.18. Через $E_{пор}$ обозначено пороговое значение амплитуды входного напряжения, начиная с которого достигается полное ограничение на уровне U_0.

При $E(t)>E_{пор}$ амплитуда на выходе почти не изменяется. Фаза же первой гармоники тока и соответственно выходного напряжения совпадает с фазой напряжения на входе ограничителя.

Поэтому для выходного напряжения можно записать

$$u_{вых}(t)\approx U_0\cos[\omega_0 t+\theta(t)]. \qquad (8.31)$$

Амплитуда выходного напряжения U_0 определяется параметрами нелинейного элемента и избирательной нагрузки. Для схемы, изображенной на рис. 8.13, *б*, $U_0=I_1 Z_{эк\,р}$, где I_1 — ампли-

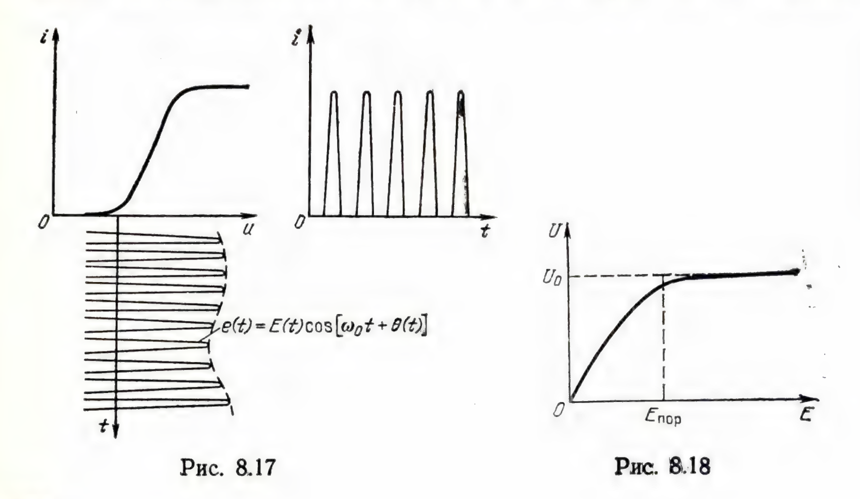


Рис. 8.17

Рис. 8.18

туда первой гармоники, определяемая с учетом уплощения вершины импульса, а $Z_{эк\ р}$ — эквивалентное резонансное сопротивление контура.

Для ряда практических задач особый интерес представляет воздействие на амплитудный ограничитель двух сигналов с близкими частотами.

Пусть, например, определяемое выражением (8.30) напряжение $e(t)$ является суммой двух гармонических колебаний:

$$e(t)=E_1\cos\omega_1 t+E_2\cos\omega_2 t,\ E_2<E_1. \qquad (8.32)$$

Каждое из этих напряжений, действуя отдельно, создает на выходе ограничителя простое гармоническое колебание с частотой ω_1 (или ω_2). Иная картина получается при одновременном воздействии на ограничитель двух гармонических напряжений. Для определения напряжения на выходе ограничителя входное колебание необходимо привести к виду выражения (8.30).

Для этого обозначим $\Omega=\omega_2-\omega_1$ и сделаем в (8.32) следующую подстановку:

$$\cos\omega_2 t=\cos(\omega_1+\Omega)t=\cos\Omega t\cos\omega_1 t-\sin\Omega t\sin\omega_1 t.$$

Тогда

$$e(t)=E_1\cos\omega_1 t+E_2(\cos\Omega t\cos\omega_1 t-\sin\Omega t\sin\omega_1 t)=(E_1+$$
$$+E_2\cos\Omega t)\cos\omega_1 t-E_2\sin\Omega t\sin\omega_1 t.$$

Рассматривая множители при $\cos\omega_1 t$ и $\sin\omega_1 t$ как медленно меняющиеся функции времени (поскольку $\Omega\ll\omega_1$), представим последнее выражение в несколько иной форме

$$e(t)=\sqrt{(E_1+E_2\cos\Omega t)^2+E_2^2\sin^2\Omega t}\cos[\omega_1 t+\theta(t)]=$$
$$=E(t)\cos[\omega_1 t+\theta(t)], \qquad (8.33)$$

где огибающая результирующего напряжения $E(t)$ определяется выражением

$$E(t)=E_1\sqrt{1+(2E_2/E_1)\cos\Omega t+(E_2/E_1)^2}, \qquad (8.34)$$

а фаза

$$\theta(t)=\operatorname{arctg}\frac{(E_2/E_1)\sin\Omega t}{1+(E_2/E_1)\cos\Omega t}. \qquad (8.35)$$

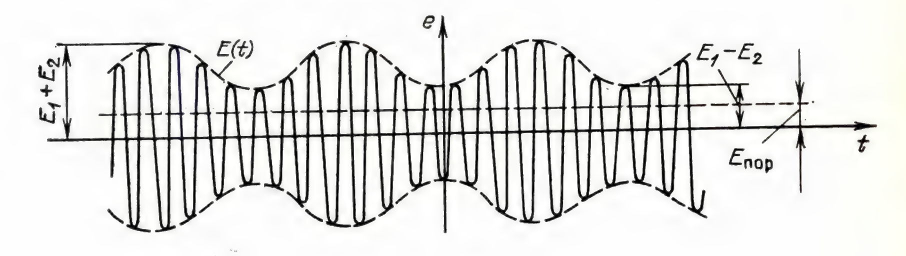


Рис. 8.19

Суммарное напряжение на входе ограничителя показано на рис. 8.19, а векторная диаграмма напряжений — на рис. 8.20.

Огибающая $E(t)$ имеет максимальное значение, равное E_1+E_2 (при $\cos\Omega t=1$), и минимальное, равное E_1-E_2 (при $\cos\Omega t=-1$).

Допустим, что $E_1-E_2>E_{пор}$, так что условие ограничения выполняется для всех значений, которые может принимать амплитуда входного напряжения $E(t)$ (см. рис. 8.19). Тогда напряжение на выходе по аналогии с (8.31) можно записать в виде

$$u_{вых}(t)=U_0\cos[\omega_1 t+\theta(t)]. \tag{8.36}$$

Получается фазомодулированное колебание, которое в отличие от входного напряжения $e(t)$ может иметь широкий спектр.

При $E_2/E_1=m\ll 1$ последнее выражение преобразуется к виду

$$u_{вых}(t)\approx U_0\cos(\omega_1 t+m\sin\Omega t). \tag{8.37}$$

Таким образом, ограничение амплитуды приводит к гармонической угловой модуляции с индексом $m=E_2/E_1$.

Выражение (8.37) полностью совпадает с (3.25′), из чего следует, что спектр выходного напряжения при $E_2/E_1\ll 1$ состоит из трех составляющих с частотами ω_1, $\omega_1+\Omega=\omega_2$ и $\omega_1-\Omega=2\omega_1-\omega_2$ (см. рис. 3.10, *б*). Первые две частоты присутствуют на входе ограничителя, а третья $(2\omega_1-\omega_2)$ является продуктом взаимодействия входных колебаний в нелинейном элементе. Соотношение спектров на входе и выходе ограничителя при $E_2/E_1\ll 1$ показано на рис. 8.21 (без учета знака минус перед спектральной составляющей $2\omega_1-\omega_2$). Частота $2\omega_1-\omega_2$ является «зеркальной» по отношению к частоте ω_2.

Колебания с частотами $\omega_1\pm\Omega$ представляют собой помеху на выходе ограничителя, а колебание с частотой ω_1 — полезный сигнал. Суммарная мощность помехи $2\,\frac{m^2}{4}\left(\frac{U^2{}_0}{2}\right)=m^2U^2{}_0/4$, а полезного сигнала $U^2{}_0/2$, следовательно, отношение сигнал-поме-

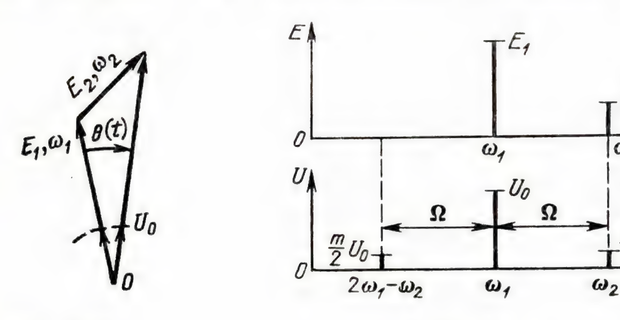


Рис. 8.20 Рис. 8.21

ха равно $2/m^2$. На входе ограничителя аналогичное отношение равно $1/m^2$. Таким образом, слабое колебание подавляется более сильным.

8.8. АМПЛИТУДНОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Детектирование колебаний заключается в выделении сигнала, пропорционального закону изменения того параметра модулированного колебания, в котором заключена передаваемая информация. Детектирование является процессом, обратным процессу модуляции, и, когда это требуется подчеркнуть, наряду с термином «детектирование» (обнаружение) применяют термин «демодуляция». В соответствии с основными видами модуляции различают амплитудное, частотное и фазовое детектирование.

На вход любого детектора подается модулированное колебание, содержащее только высокочастотные составляющие: несущее колебание и колебания боковых частот. На выходе выделяется сигнал с низкочастотным спектром передаваемого сообщения. Следовательно, детектирование сопровождается трансформацией частотного спектра и не может быть осуществлено без применения нелинейных элементов или линейных элементов с переменными параметрами.

Рассмотрим принцип действия амплитудного детектора в режиме сильного немодулированного колебания $e(t) = E_0 \cos \omega_0 t$. Подобное колебание подается на вход устройства, представляющего собой последовательное соединение нелинейного элемента VD (диода) с простейшей избирательной нагрузкой в виде RC-цепи (рис. 8.22). Напряжение на выходе $u_{вых}(t)$ представляет собой пульсирующую около среднего значения U_0 кривую (рис. 8.23, *а*). Это напряжение является отрицательным по отношению к диоду. Поэтому ток через диод имеет форму импульсов (рис. 8.23, *б*), протекающих при превышении входным колебанием напряжения $u_{вых}(t)$. В промежутках между импульсами тока происходит разряд конденса-

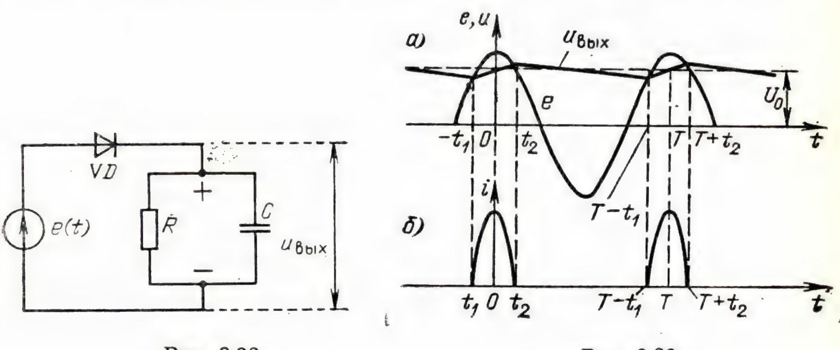


Рис. 8.22 Рис. 8.23

тора C через резистор R и напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ уменьшается. Заряд конденсатора и, следовательно, рост напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ совершается при протекании импульсов тока. Если постоянная времени RC-цепи значительно превышает период $T=2\pi/\omega_0$, то амплитуда пульсаций напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ мала и в первом приближении можно считать $u_{\text{вых}}(t)\approx U_0$. Режим работы диода в схеме детектора (рис. 8.22) показан на рис. 8.24. Вольт-амперная характеристика диода аппроксимирована кусочно-линейной зависимостью (наклонный участок показан штриховой линией), что допустимо только при большом уровне входного колебания. Постоянное напряжение U_0 задает положение рабочей точки в стационарном режиме. В правой части рис. 8.24 изображены импульсы тока, длительность которых равна 2θ.

Особенностью режима работы детектора в отличие от построения на рис. 8.8 является то, что напряжение U_0, создаваемое постоянной составляющей тока I_0 на нагрузочном сопротивлении R, зависит от амплитуды E_0 входного колебания. Из этого, в частности, следует, что угол отсечки θ не может превышать 90°.

Для нахождения напряжения на выходе U_0 при заданных параметрах схемы воспользуемся результатами спектрального анализа тока, проведенного в § 8.2.

Допуская, что угол отсечки тока θ известен, можно записать следующие соотношения:

$$I_0=\alpha_0(\theta)I_m,\ \cos\theta=U_0/E_0. \qquad (8.38),\ (8.39)$$

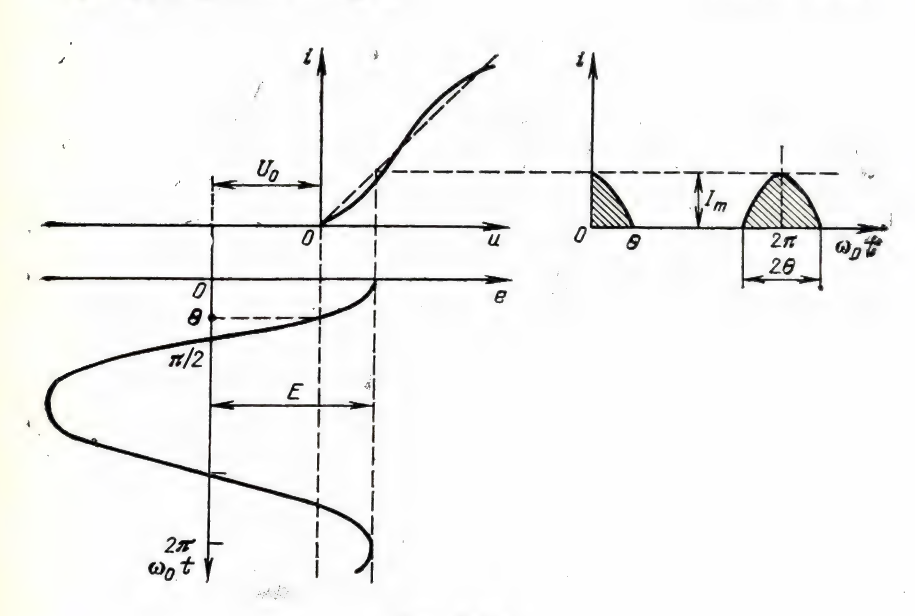


Рис. 8.24

Последнее выражение вытекает непосредственно из рис. 8.24. Далее, при заданной крутизне вольт-амперной характеристики диода S очевидно равенство

$$I_m=(E_0-U_0)S=E_0(1-U_0/E_0)S. \qquad (8.40)$$

Подставив в это выражение (8.38) и (8.39), получим

$$I_0/\alpha_0(\theta)=SE_0(1-\cos\theta)=SU_0(1-\cos\theta)/\cos\theta,$$

откуда

$$I_0/U_0=1/R=S\alpha_0(\theta)(1-\cos\theta)/\cos\theta. \qquad (8.41)$$

Подставляя в (8.41) $\alpha_0(\theta)$ из (8.17) и учитывая соотношение $S=1/R_i$ (R_i — внутреннее сопротивление диода), получаем

$$R_i/R=(\sin\theta-\theta\cos\theta)/\pi\cos\theta=(\operatorname{tg}\theta-\theta)/\pi. \qquad (8.42)$$

Итак, задание внутреннего сопротивления диода R_i и сопротивления нагрузки R однозначно определяет угол отсечки θ. При этом предполагается, что емкость C, шунтирующая по переменному току сопротивление R, выбирается из условия

$$\tau_0=RC\gg 2\pi/\omega_0=T, \qquad (8.43)$$

так как только при его выполнении напряжение на выходе можно считать близким к постоянному.

Нахождение угла отсечки θ из уравнения (8.42) затруднительно, поскольку оно является трансцендентным. Поэтому θ можно определять по графику, представляющему собой зависимость отношения R_i/R от θ (рис. 8.25).

Очевидно, что для получения на выходе детектора напряжения, близкого к амплитуде E_0 входного колебания, угол отсечки должен быть малым, а отношение R/R_i большим. При $\theta\leqslant 20°$ отношение $U_0/E_0=\cos\theta\geqslant 0{,}94$. В этом случае справед-

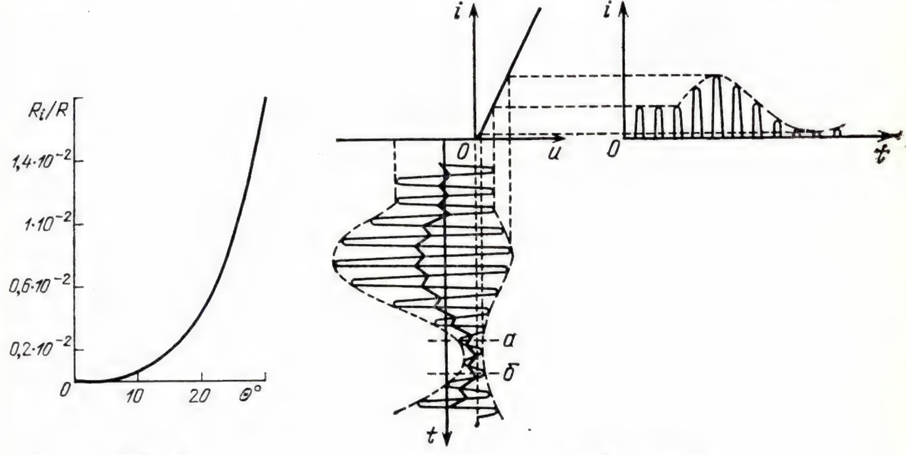


Рис. 8.25

Рис. 8.26

ливо приближение $\operatorname{tg}\theta\approx\theta+\theta^3/3$, используя которое приводим (8.42) к виду

$$\theta=(3\pi R_i/R)^{1/3}. \qquad (8.42')$$

Например, для получения $U_0=0{,}95\,E_0$ требуется $\theta=\arccos 0{,}95\approx\approx 18^\circ$ и $R\approx 300\,R_i$.

После того как выбрано R, требуемую емкость конденсатора C можно определить из условия (8.43).

Режим детектирования АМ сигнала с огибающей $E(t)$ показан на рис. 8.26. Напряжение смещения, создававшееся в режиме немодулированного воздействия постоянной составляющей тока, теперь изменяется пропорционально огибающей $E(t)$ входного сигнала. Но изменяющееся напряжение смещения диода есть не что иное, как выходное напряжение детектора. Это напряжение (зубчатая кривая) совмещено на рис. 8.27, *а* с высокочастотным входным напряжением. При выполнении условия (8.43) зубцы практически отсутствуют и напряжение на выходе воспроизводит форму огибающей входного сигнала, т. е. передаваемое сообщение.

Таким образом, связь между выходным напряжением $u_{\text{вых}}(t)$ и огибающей $E(t)$ входного сигнала получается линейной. В этом смысле детектор, работающий в режиме больших амплитуд и с нагрузкой, обеспечивающей близкое совпадение напряжений $u_{\text{вых}}(t)$ и $E(t)$, называется линейным детектором. При этом не следует, конечно, упускать из виду, что детектор, работающий с отсечкой тока, является сугубо нелинейным устройством.

Режим модулированного воздействия накладывает на выбор элементов нагрузки детектора дополнительные ограничения. Необходимо, чтобы постоянная времени цепи нагрузки была мала по сравнению с периодом модуляции. В противном случае изменение напряжения на нагрузке будет отставать от изменения огибающей входного колебания. Подобный режим представлен на рис. 8.27, *б*. На участке *а—б* из-за чрезмерно большой инерционности RC-цепи напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ отстает в своем росте от огибающей $E(t)$. В точке *б*, где $u_{\text{вых}}(t)$ и $E(t)$ уравниваются, ток через диод и рост $u_{\text{вых}}(t)$ прекращаются. На участке *б—в*, когда диод заперт, в нагрузочной цепи происходит разряд емкости C через резистор R. Таким образом, на участке *б—в* напряжение изменяется по экспоненте. Получаются нелинейные искажения сигнала. Так как эти искажения обусловлены тесным взаимодействием нелинейного элемента (диод) с линейной цепью (RC), степень нелинейных искажений зависит не только от параметров цепи и коэффициента модуляции, но и от частоты модуляции Ω. Эти искажения возрастают с повышением частоты, а также коэффициента модуляции входного сигнала. Для устранения указанных искажений необходимо, чтобы $RC\ll 2\pi/\Omega$. Совмещая это неравенство с усло-

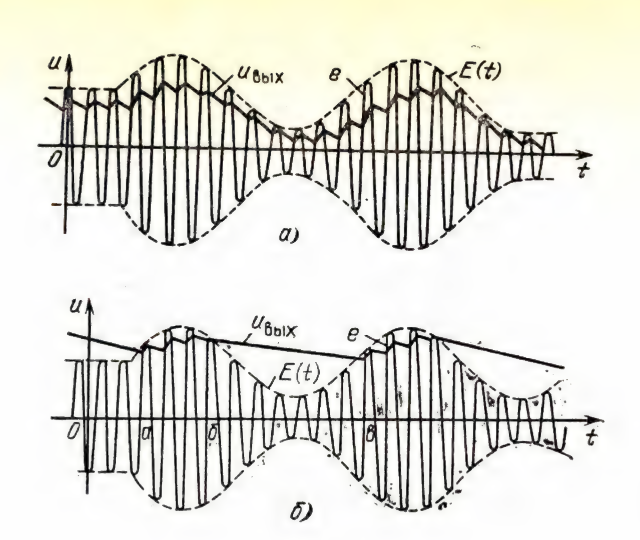


Рис. 8.27

вием (8.43), при выполнении которого обеспечивается сглаживание высокочастотных пульсаций, получаем

$$2\pi/\omega_0 \ll RC \ll 2\pi/\Omega. \tag{8.44}$$

Так как несущая частота ω_0 модулированного колебания значительно превышает частоту модуляции Ω (см. § 3.1), условия (8.44) обычно выполняются.

При детектировании радиоимпульсов в правой части неравенства (8.44) вместо периода модуляции $2\pi/\Omega$ следует подставлять длительность импульса. При этом предполагается, что интервалы между импульсами превышают длительность самого импульса.

Отметим, что условия (8.44) могут быть истолкованы со спектральной точки зрения.

Для низкочастотных составляющих тока диода нагрузка детектора в соответствии с правым неравенством (8.44) практически резистивна и равна R. В то же время в соответствии с левым неравенством (8.44) эта же нагрузка для высокочастотных составляющих тока имеет емкостной характер, а величина ее много меньше R. Таким образом, $u_{вых}(t)$ создается только за счет низкочастотных составляющих спектра огибающей, возникающих при воздействии АМ колебания на нелиейный элемент.

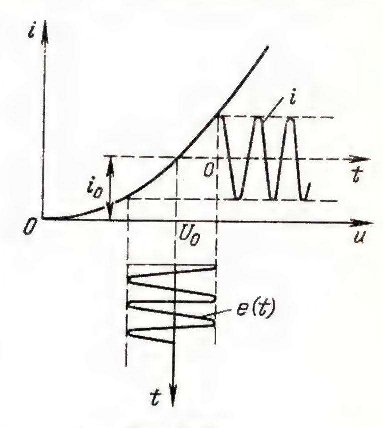


Рис. 8.28

Рассмотрим теперь результаты детектирования при малой

амплитуде входного колебания (режим слабого сигнала). В этом случае изменения тока укладываются на относительно небольшом участке нижнего сгиба вольт-амперной характеристики диода или транзистора (рис. 8.28).

Подставляя входное колебание $e(t)=E(t)\cos\omega_0 t$ в аппроксимирующий полином (8.4), получаем выражение для тока

$$i(t)=i(U_0)+a_1E(t)\cos\omega_0 t+a_2E^2(t)\cos^2\omega_0 t=$$

$$=i_0+a_1E(t)\cos\omega_0 t+\frac{1}{2}a_2E^2(t)\cos 2\omega_0 t+\frac{1}{2}a_2E^2(t). \qquad (8.45)$$

Полезная информация содержится только в последнем, низкочастотном слагаемом

$$i_{\text{нч}}(t)=\frac{1}{2}a_2E^2(t), \qquad (8.46)$$

а выходное напряжение благодаря фильтрующему действию нагрузки детектора определяется именно этим током (постоянную составляющую тока i_0 не учитываем):

$$u_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2}a_2RE^2(t). \qquad (8.47)$$

Так как это напряжение пропорционально квадрату огибающей амплитуд входного сигнала, детектор, работающий в режиме малых амплитуд, называется квадратичным.

Квадратичный характер детектирования не является препятствием для правильного воспроизведения передаваемого сообщения при демодуляции радиоимпульсов с прямоугольной огибающей. Нелинейность характеристики детектирования в этом случае проявляется в том, что амплитуда видеоимпульсов на выходе детектора пропорциональна квадрату амплитуды радиоимпульсов на его входе.

Иначе обстоит дело при квадратичном детектировании колебаний, огибающая которых является непрерывной функцией времени. Для упрощения анализа рассмотрим воздействие колебания с тональной АМ. Подставив в (8.47) $E(t)=E_0(1+M\cos\Omega t)$, нетрудно получить для переменной составляющей (низкочастотной) следующее выражение:

$$u_{\text{вых}}(t)=a_2RME_0^2\cos\Omega t+{}^1/_4a_2RM^2E_0^2\cos 2\Omega t.$$

Таким образом, при детектировании колебания с тональной АМ выходное напряжение содержит следующие два гармонических слагаемых:

а) полезное, с частотой Ω, воспроизводящее огибающую детектируемого колебания;

б) вредное, с частотой 2Ω, приводящее к искажению гармонической огибающей.

Отличие формы $u_{\text{вых}}(t)$ от гармонической оценивается коэф-

фициентом гармоник, равным в данном случае отношению амплитуды второй гармоники к амплитуде первой:

$$k_{г2}={}^1/_4 a_2RM^2E_0^2/a_2RME_0^2=M/4.$$

При 100%-ной модуляции $k_{г2}=0{,}25$ (25%).

При детектировании более сложных колебаний, например АМ колебания с двумя модулирующими частотами Ω_1 и Ω_2, в выходном напряжении наряду с гармониками частот $2\Omega_1$ и $2\Omega_2$ возникают еще колебания комбинационных частот вида $\Omega_1 \pm \Omega_2$, амплитуды которых пропорциональны произведению парциальных коэффициентов модуляции M_1 и M_2. Этот результат нетрудно получить, если в (8.47) подставить

$$E(t)=E_0(1+M_1\cos\Omega_1 t+M_2\cos\Omega_2 t).$$

При детектировании сложных сигналов, содержащих большое число пар боковых частот, гармоники и комбинационные частоты приводят при глубокой модуляции к значительным нелинейным искажениям, влияющим, в частности, на разборчивость и тембр речевого сигнала. Поэтому во всех случаях, когда требуется неискаженное воспроизведение передаваемых сообщений, необходимо увеличивать амплитуду несущего колебания АМ сигнала до уровня, при котором обеспечивается режим линейного детектирования.

8.9. ЧАСТОТНОЕ И ФАЗОВОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Входной радиосигнал представим в виде

$$e(t)=E(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)].$$

Для снятия нежелательной АМ обязательно применение амплитудного ограничения. Тогда на входе собственно частотного детектора (ЧД) напряжение будет

$$e(t)=E_0\cos[\omega_0 t+\theta(t)],\ E_0=\mathrm{const}. \qquad (8.48)$$

Напряжение на выходе ЧД должно воспроизводить закон изменения мгновенной частоты радиосигнала. Поэтому для идеального ЧД получаем следующее функциональное соотношение:

$$u_{вых}(t)=S_{чд}d\theta/dt=S_{чд}\Delta\omega(t), \qquad (8.49)$$

где $S_{чд}=\mathrm{const}$ — крутизна характеристики детектора, выраженная в вольтах на единицу угловой частоты.

Как отмечалось в § 8.8, спектр функции $u_{вых}(t)$ соответствует передаваемому сообщению и расположен в области низких частот. Однако в этом случае в отличие от амплитудного детектора для образования частот сообщения одного лишь нелинейного элемента недостаточно. В § 8.2 было показано, что

при воздействии ЧМ колебания на безынерционный нелинейный элемент в спектре тока не возникают составляющие с частотой модуляции. Иными словами, нелинейный элемент нечувствителен к изменению частоты подаваемого на его вход радиосигнала, а низкочастотные составляющие возникают только при изменении амплитуды этого сигнала.

Поэтому для осуществления частотного детектирования требуются дополнительные преобразования. Известны разнообразные способы детектирования ЧМ колебаний. Большое распространение получили, например, частотные детекторы, представляющие собой сочетание двух функциональных элементов: избирательной линейной цепи, преобразующей частотную модуляцию в амплитудную, и амплитудного детектора.

В качестве линейной цепи можно использовать любую электрическую цепь, обладающую неравномерной частотной характеристикой: цепи *RL*, *RC*, фильтры, колебательные контуры и т. д.

Схема частотного детектора, содержащего одиночный колебательный контур, представлена на рис. 8.29. Если резонансная частота контура $\omega_р$ отличается от несущей частоты модулированного колебания ω_0, то изменение амплитуды напряжения на контуре $U_к$ повторяет в некоторых пределах изменение частоты входного колебания (рис. 8.30).

Изменение амплитуды $U_к$ высокочастотного колебания с помощью диода *VD* создает низкочастотный сигнал, выделяемый на *RC*-цепи. Отметим попутно, что при точной настройке контура на частоту $\omega_р=\omega_0$ сигнал искажается: частота изменения огибающей получается вдвое выше частоты полезной модуляции. В исходном режиме, т. е. при отсутствии модуляции, рабочая точка должна устанавливаться на левом скате резонансной кривой.

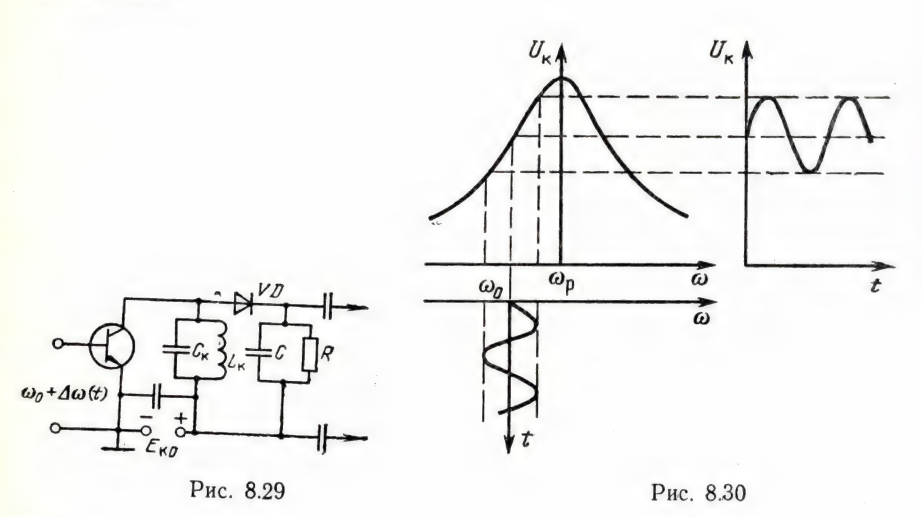


Рис. 8.29

Рис. 8.30

Недостатком рассмотренного способа является необходимость настройки контура на частоту, отличную от частоты несущего колебания. Кроме того, резонансная кривая одиночного колебательного контура имеет весьма ограниченный линейный участок на скате. Несколько лучшими характеристиками обладает детектор наклона, в котором используются два колебательных контура, настроенные симметрично относительно несущей частоты.

Развитие техники интегральных микросхем позволяет осуществить частотное детектирование с помощью миниатюрных устройств, не содержащих катушек индуктивности. Один из возможных способов основан на использовании опорного генератора (гетеродина) в виде мультивибратора, вырабатывающего стабильное меандровое колебание с периодом, равным периоду несущего колебания обрабатываемого сигнала. Принимаемое ЧМ колебание также преобразуется в меандр. Оба колебания поступают на схему совпадения (перемножитель), называемую «детектором произведения», на выходе которой образуются прямоугольные импульсы с длительностью, пропорциональной девиации частоты ЧМ сигнала. Преобразование этих импульсов в выходной сигнал достигается с помощью интегрирующей RC-цепи.

Обратимся к рассмотрению фазового детектирования. Пусть фаза высокочастотного колебания, подлежащего детектированию, изменяется по закону $\theta(t)$. Если такое колебание подать на обычный частотный детектор, реагирующий на изменение мгновенной частоты колебания, то напряжение на выходе детектора

$$u_{\text{вых}}(t) = S_{\text{чд}}\Delta\omega(t) = S_{\text{чд}}d\theta(t)/dt, \tag{8.50}$$

т. е. выходное напряжение будет пропорционально производной фазы входного колебания. Отсюда следует, что для осуществления фазового детектирования можно использовать обычный частотный детектор. Необходимо лишь дополнить его корректирующей цепью, осуществляющей интегрирование выходного напряжения, т. е. цепью с передаточной функцией вида $\mathbf{K}(i\omega) = 1/i\omega\tau_0$. Простейшие интегрирующие устройства описаны в § 5.8.

Подобный прием используется при детектировании колебаний с фазой, изменяющейся по непрерывному закону, т. е. когда производная фазы конечна (например, при передаче речи). В случае же скачков фазы, а также при необходимости сравнения фазы принимаемого колебания с фазой опорного (эталонного) колебания применяются специальные фазовые детекторы, в которых выходное напряжение пропорционально огибающей напряжения, получаемого при суммировании колебаний со сравниваемыми фазами.

8.10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА

В радиотехнике часто требуется осуществить сдвиг спектра радиосигнала по оси частот на определенное постоянное значение при сохранении его структуры. Такой процесс сдвига называется п р е о б р а з о в а н и е м ч а с т о т ы.

Для выяснения сути процесса преобразования частоты вернемся к вопросу о воздействии на нелинейный элемент двух напряжений, рассмотренному в § 8.3. Однако в данном случае только одно из колебаний, а именно то, которое создается вспомогательным генератором (гетеродином), является гармоническим. Вторым колебанием будет любой сложный, но узкополосный процесс, подлежащий преобразованию.

Представим колебания от гетеродина и источника сигнала соответственно в виде

$$e_{\text{г}}=E_{\text{г}}\cos(\omega_{\text{г}}t+\theta_{\text{г}}), \tag{8.51}$$

$$e_s=E_s(t)\cos[\omega_0 t+\theta_s(t)+\theta_0]. \tag{8.52}$$

Задачей преобразования частоты является получение суммарной или разностной частоты $\omega_0 \pm \omega_{\text{г}}$. Как следует из выражения (8.21), эти частоты возникают за счет квадратичного члена аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Для более полного выявления продуктов взаимодействия сигнала и колебания гетеродина аппроксимируем характеристику нелинейного элемента (диода или транзистора) полиномом четвертой степени:

$$\begin{aligned} i &= i(U_0)+a_1(e_s+e_{\text{г}})+a_2(e_s+e_{\text{г}})^2+a_3(e_s+e_{\text{г}})^3+ \\ &+a_4(e_s+e_{\text{г}})^4=i(U_0)+a_1(e_s+e_{\text{г}})+a_2(e_s^2+e_{\text{г}}^2)+ \\ &+\boxed{2ae_s e_{\text{г}}}+a_3(e_s^3+e_{\text{г}}^3)+\boxed{3a_3(e_s^2 e_{\text{г}}+e_s e_{\text{г}}^2)}+ \\ &+a_4(e_s^4+e_{\text{г}}^4)+\boxed{6a_4 e_s^2 e_{\text{г}}^2}+\boxed{4a_4(e_s^3 e_{\text{г}}+e_s e_{\text{г}}^3)}. \end{aligned} \tag{8.53}$$

В этом выражении основное значение с точки зрения преобразования (сдвига) частоты имеют члены, представляющие собой произведения вида $e_s^n e_{\text{г}}^m$ (обведены рамками). Подставляя в эти произведения (8.51) и (8.52) и отбрасывая все составляющие, частоты которых не являются суммой $\omega_0+\omega_{\text{г}}$ или разностью $\omega_0-\omega_{\text{г}}$, после несложных тригонометрических выкладок приходим к следующему окончательному результату:

$$\begin{aligned} i_{\omega_0\pm\omega_{\text{г}}}(t) &= a_2E_s(t)E_{\text{г}}\{\cos[(\omega_0+\omega_{\text{г}})t+\theta_s(t)+\theta_0+\theta_{\text{г}}]+ \\ &+\cos[(\omega_0-\omega_{\text{г}})t+\theta_s(t)+\theta_0-\theta_{\text{г}}]\}+\frac{3}{2}a_4E_s(t)E_{\text{г}}[E_s^2(t)+ \\ &+E_{\text{г}}^2]\{\cos[(\omega_0+\omega_{\text{г}})t+\theta_s(t)+\theta_0+\theta_{\text{г}}]+ \\ &+\cos[(\omega_0-\omega_{\text{г}})t+\theta_s(t)+\theta_0-\theta_{\text{г}}]\}. \end{aligned} \tag{8.54}$$

Из этого результата видно, что интересующие нас частоты $\omega_0 \pm \omega_г$ возникают лишь благодаря четным степеням полинома, аппроксимирующего характеристику нелинейного элемента. Однако один лишь квадратичный член полинома образует составляющие, амплитуды которых пропорциональны только первой степени $E_s(t)$. Более высокие четные степени полинома нарушают эту пропорциональность, так как амплитуды создаваемых ими колебаний содержат степени $E_s(t)$ выше первой.

Поэтому для того чтобы при нахождении тока можно было ограничиться в (8.54) только первыми двумя слагаемыми (с амплитудами, пропорциональными первой степени E_s), требуется выполнение неравенства $E_s^2 + E_г^2 \ll 2a_2/3a_4$.

В радиоприемных и многих других устройствах, в которых преобразование частоты тесно связано с задачей усиления сигнала, обычно $E_s \ll E_г$.

Окончательно выражение для тока записываем в форме

$$i_{\omega_0 \pm \omega_г}(t) \approx a_2 E_s(t) E_г \{\cos[(\omega_0 + \omega_г) t + \theta_s(t) + \theta_0 + \theta_г] + \\ + \cos[(\omega_0 - \omega_г) t + \theta_s(t) + \theta_0 - \theta_г]\}. \qquad (8.54')$$

Первое слагаемое в фигурных скобках с частотой $\omega_0 + \omega_г$ соответствует сдвигу спектра сигнала в область более высоких частот, а второе слагаемое с частотой $\omega_0 - \omega_г$ — в область более низких частот. При этом предполагается, что $|\omega_0 - \omega_г|$ лежит в диапазоне радиочастот. Для выделения колебания с суммарной или разностной частотой следует применить в качестве нагрузки резонансную колебательную цепь (рис. 8.31) с соответствующей настройкой на частоту $\omega_р = |\omega_0 \pm \omega_г|$.

Обычно полоса пропускания колебательной цепи, являющейся нагрузкой преобразователя частоты, рассчитана на ширину спектра модулированного колебания. При этом все составляющие тока с частотами, близкими к $|\omega_0 \pm \omega_г|$, проходят через контур таким образом, что структура сигнала на выходе совпадает со структурой сигнала на входе. Единственное отличие заключается в том, что несущая частота колебания на выходе равна $\omega_0 + \omega_г$ или $|\omega_0 - \omega_г|$, в зависимости от того, какова резонансная частота нагрузочной цепи.

Итак, при преобразовании частоты законы изменения ампли-

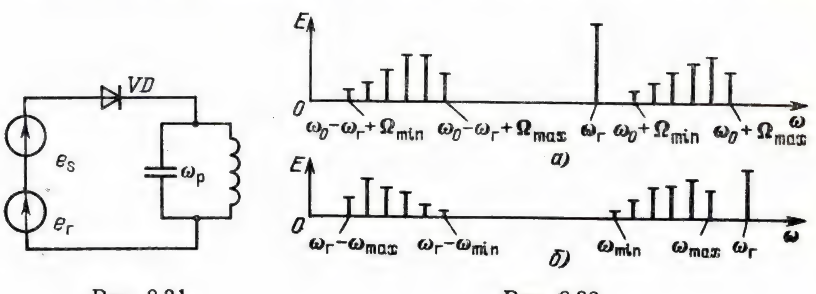


Рис. 8.31 Рис. 8.32

туды $E_s(t)$, фазы $\theta_s(t)$ и частоты $d\theta_s(t)/dt$ входного колебания переносятся на выходное колебание. В этом смысле рассматриваемое преобразование сигнала является линейным, а устройство — линейным преобразователем или «смесителем».

В заключение следует отметить, что при выделении разностной частоты структура сигнала сохраняется лишь в том случае, когда $\omega_0 > \omega_г$. Если же $\omega_0 < \omega_г$, то спектр сигнала «переворачивается». На рис. 8.32, *а* изображена спектральная диаграмма сигнала на входе и выходе преобразователя для случая, когда все частоты, входящие в спектр входного колебания, выше частоты гетеродина $\omega_г$. Преобразованный спектр, сдвинутый влево на $\omega_г$, имеет такую же структуру, что и исходный спектр. В преобразованном спектре при $\omega_0 < \omega_г$ (рис. 8.32, *б*) ω_{max} и ω_{min} меняются местами.

Переворачивание спектра при преобразованиях частоты необходимо принимать во внимание только в тех случаях, когда спектр сигнала несимметричен относительно несущей частоты (при угловой модуляции асимметрия заключается в том, что знаки перед колебаниями нижних боковых частот $\omega_0 - n\Omega$ при нечетных n отрицательны, см. § 3.6). При преобразовании сигнала с несимметричным спектром для сохранения структуры спектра частота гетеродина должна быть ниже частоты сигнала.

8.11. СИНХРОННОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Рассмотрим особый вид преобразования, который получается при частоте гетеродина, равной частоте сигнала. Полагая в выражении (8.54) $\omega_0 = \omega_г$ и рассматривая сначала немодулированное колебание $[e_s = E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)]$, получаем

$$i(t) = a_2 E_0 E_г [\cos(2\omega_0 t + \theta_0 + \theta_г) + \cos(\theta_0 - \theta_г)]. \qquad (8.55)$$

Как видим, в частном случае $\omega_г = \omega_0$ колебание с разностной комбинационной частотой вырождается в постоянный ток

$$i_0 = a_2 E_0 E_г \cos(\theta_0 - \theta_г). \qquad (8.56)$$

При $\theta_0 - \theta_г = 0$ или π ток $|i_0|$ достигает максимума, а при $\theta_0 - \theta_г = \pm\pi/2$ ток $i_0 = 0$.

При включении на выходе преобразователя фильтра нижних частот колебание с частотой $2\omega_0$ подавляется и на выходе фильтра остается одно лишь постоянное напряжение, пропорциональное току i_0.

Если частоты ω_0 и $\omega_г$ близки друг к другу, то возникающее колебание разностной (низкой) частоты также выделяется с помощью *RC*-фильтра нижних частот. Такой режим используется в измерительной технике (метод «нулевых биений»), а также для формирования колебаний низкой частоты.

При наличии АМ, когда $e_s = E_s(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)$, и точных ра-

венствах $\omega_г = \omega_0$ и $\theta_г = \theta_0$ колебание на выходе будет пропорционально току

$$i_\Omega(t) = a_2 E_г E_s(t), \tag{8.57}$$

т. е. будет совпадать по форме с законом модуляции амплитуды высокочастотного сигнала.

Иными словами, на выходе преобразователя выделяется передаваемое сообщение, причем по отношению к входному колебанию при $E_s \ll E_г$ обработка по существу является линейной.

Основным преимуществом такого способа обработки, называемого синхронным детектированием, является повышенная избирательность радиоприема слабых сигналов на фоне шума (устраняется взаимодействие сигнала с помехой в нелинейном устройстве, каковым является обычный амплитудный детектор).

При наличии ФМ, когда $e_s = E_0 \cos[\omega_0 t + \theta_s(t) + \theta_0]$, и равенстве $\theta_0 - \theta_г = -\pi/2$, колебание на выходе будет пропорционально току

$$i_\Omega(t) = a_2 E_г E_0 \sin\theta_s(t). \tag{8.58}$$

Отсюда видно, что синхронный детектор позволяет при малых девиациях фазы $[|\theta_s(t)| \leqslant \pi/4]$ или манипуляции фазы осуществлять фазовое детектирование.

Следует, однако, отметить, что реализация принципа синхронного детектирования связана с рядом трудностей, так как обеспечение синхронизма частоты гетеродина с частотой принимаемого сигнала является сложной задачей, особенно при приеме слабых сигналов на фоне помех.

Глава 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭНЕРГОЕМКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

9.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭНЕРГОЕМКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Под энергоемкими понимаются элементы, обладающие свойством запасать энергию электрического (емкость) или магнитного (индуктивность) полей.

Примером нелинейной емкости может служить любой эле-

мент с нелинейной вольт-кулонной характеристикой $q(u)$. Емкость подобного элемента определяется соотношением $C(u)=q(u)/u$, которое справедливо при любом характере напряжения u (постоянном или переменном).

Ток через емкость $C(u)$ определяется производной заряда $q(u)$ по времени

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dq(u)}{du}\frac{du}{dt}. \qquad (9.1)$$

При $u=\text{const}$ ток $i(t)=0$, как и через линейную емкость $(C=q/u=\text{const})$.

Выражение (9.1) можно записать в иной, но эквивалентной форме:

$$i(t)=\frac{d[C(u)u]}{dt}=u\frac{dC(u)}{dt}+C(u)\frac{du}{dt}=$$

$$=\left[u\frac{dC(u)}{du}+C(u)\right]\frac{du}{dt}. \qquad (9.2)$$

Если на нелинейную емкость $C(u)$ одновременно с постоянным напряжением смещения E_0 подан слабый сигнал $e(t)$, то выражение (9.1) можно представить в виде

$$i(t)=\left.\frac{dq(u)}{du}\right|_{u=E_0}\frac{d(E_0+e)}{dt}\approx C_{\text{диф}}(E_0)\frac{de(t)}{dt}. \qquad (9.3)$$

Введенная в этом выражении **дифференциальная емкость**

$$C_{\text{диф}}(E_0)=\left.\frac{dq(u)}{du}\right|_{u=E_0} \qquad (9.4)$$

отличается от статической емкости $C(u)=q(u)/u$. При линейной вольт-кулонной характеристике оба определения емкости совпадают.

В качестве иллюстрации на рис. 9.1 изображены графики следующих зависимостей (при $b_1=1\cdot10^{-11}$ Кл/В и $b_2=0{,}5\cdot10^{-12}$ Кл/В^2):

$$q(u)=b_1u+b_2u^2,$$

$$C(u)=q/u=b_1+b_2u,$$

$$C_{\text{диф}}(E_0)=b_1+2b_2E_0.$$

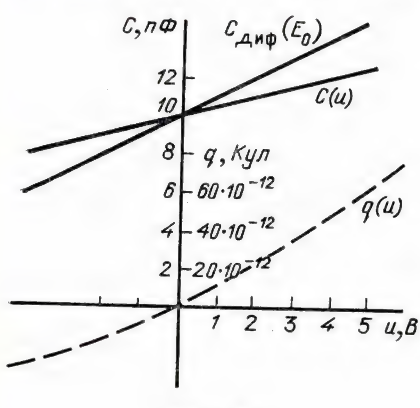


Рис. 9.1

В данном примере аргумент E_0 функции $C_{\text{диф}}$ совпадает с текущим значением u.

Примером нелинейной индуктивности $L(i)$ может служить катушка с ферри-

товым сердечником, ампер-веберная характеристика которой нелинейна.

Соотношения между током i и напряжением u на индуктивности следуют из исходного выражения для потокосцепления

$$\Phi(i) = L(i)\,i. \qquad (9.5)$$

Очевидно,

$$u(t) = \frac{d\Phi(i)}{dt} = \frac{d\Phi(i)}{di}\frac{di}{dt} = \frac{dL(i)}{di}\frac{di}{dt}i + L(i)\frac{di(t)}{dt} =$$

$$= \left[i\frac{dL(i)}{di} + L(i)\right]\frac{di}{dt}. \qquad (9.6)$$

При подаче на нелинейную индуктивность одновременно с постоянным током подмагничивания I_0 слабого сигнала $i(t)$ напряжение на ней определяется в виде

$$u(t) \approx L_{\text{диф}}(I_0)\frac{di(t)}{dt}, \qquad (9.7)$$

где

$$L_{\text{диф}}(I_0) = d\Phi(i)/di\,|_{i=I_0} \qquad (9.8)$$

(в случае линейной индуктивности $u = L di/dt$, где $L = \Phi/i$).

Понятиями «дифференциальные емкость и индуктивность» широко пользуются при рассмотрении воздействия относительно слабых сигналов на нелинейные элементы. При этом нелинейность элемента проявляется лишь в том, что $C_{\text{диф}}$ и $L_{\text{диф}}$ зависят от управляющего напряжения (или тока), определяющего положение рабочей точки на нелинейной характеристике.

9.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ЕМКОСТЬ. УМНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ НА ВАРАКТОРЕ

Некоторые преобразования сигналов, рассмотренные в гл. 8, можно осуществить с помощью реактивных нелинейных элементов, например, основанных на нелинейной емкости p—n-перехода полупроводникового диода. Общее название подобных приборов — в а р и к а п. Варикап, предназначенный для работы в диапазоне СВЧ, называют в а р а к т о р о м. Он выделяет значительную мощность в режиме умножения частоты.

При гармоническом воздействии $e(t)$ в цепи с емкостью $C_{\text{нл}} = C(u)$ возникает ток $i_{\text{нл}}(t)$, содержащий гармоники с частотами $n\omega_1$, что позволяет осуществлять умножение частоты.

Метод анализа спектра тока $i_{\text{нл}}(t)$ аналогичен методу, использованному в § 8.2. В данном случае в основу анализа мож-

но положить нелинейную вольт-кулонную характеристику варактора, аналогичную выражению (8.1):

$$q(e)=q_0+b_1e+b_2e^2+\dots+b_ke^k, \qquad (9.9)$$

где

$$b_1=\left.\frac{dq}{de}\right|_{e=0}=C_{\text{диф}} \text{ — дифференциальная емкость}$$

в рабочей точке [см. (9.4)],

$$b_2=\frac{1}{2!}(d^2q/de^2), \quad b_3=\frac{1}{3!}(d^3q/de^3), \ \dots \qquad (9.10)$$

Применяя выражение (9.1) к ряду (9.9), находим ток через нелинейную емкость

$$i_{\text{нл}}(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{de}\frac{de}{dt}=b_1\frac{de}{dt}+2b_2e\frac{de}{dt}+$$

$$+3b_3e^2\frac{de}{dt}+\dots+kb_ke^{k-1}\frac{de}{dt}. \qquad (9.11)$$

Рассмотрим структуру первых трех слагаемых этого ряда при $e(t)=E\cos(\omega_1t+\theta_1)=E\cos\psi_1(t)$.

Первое слагаемое

$$b_1\frac{de}{dt}=-C_{\text{диф}}\omega_1E\sin\psi_1(t)=-C_{\text{диф}}\omega_1E\sin(\omega_1t+\theta_1) \qquad (9.12)$$

соответствует току частоты ω_1 через обычную линейную емкость $C_{\text{диф}}$.

Второе слагаемое

$$2b_2e\frac{de}{dt}=2b_2E\cos\psi_1(t)[-\omega_1E\sin\psi_1(t)]=$$

$$=-b_2\omega_1E^2\sin(2\omega_1t+2\theta_1) \qquad (9.13)$$

вносит в спектр тока $i_{\text{нл}}(t)$ составляющую с частотой $2\omega_1$ и и амплитудой $I_{\omega_2}=b_2\omega_1E^2$.

Третье слагаемое

$$3b_3e^2\frac{de}{dt}=3b_3E^2\cos^2\psi_1(t)[-\omega_1E\sin\psi_1(t)]$$

приводится к виду

$$-\frac{3b_3\omega_1E^3}{4}[\sin(\omega_1t+\theta_1)+\sin(3\omega_1t+3\theta_1)]. \qquad (9.14)$$

Из соотношений (9.12)—(9.14) видна закономерность образования спектра тока $i_{\text{нл}}(t)$ при гармоническом воздействии. Как и для цепи с безынерционным резистивным элементом, слагаемые ряда (9.9) с четными степенями определяют четные гармоники, а слагаемые с нечетными степенями — нечетные

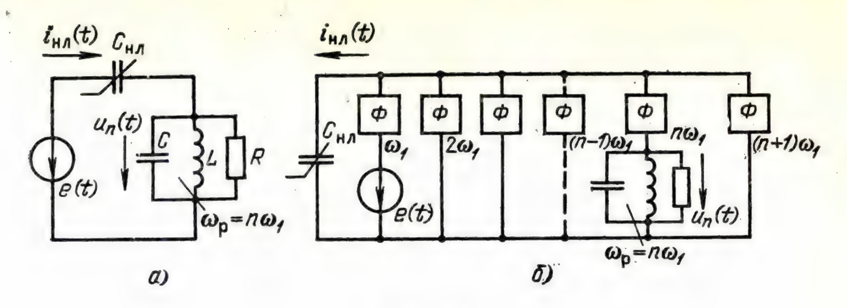


Рис. 9.2

гармоники. Наивысший порядок гармоник равен степени полинома k, аппроксимирующего вольт-кулонную характеристику. Постоянная составляющая в спектре тока отсутствует.

Функциональная схема умножителя частоты на варакторе представлена на рис. 9.2, *а*. Сопротивление полупроводникового материала и активная проводимость, шунтирующая нелинейную емкость варактора, этой схемой не учитываются.

Для частоты n-й гармоники тока $i_{нл}(t)$ сопротивление нагрузки равно R, а для всех остальных частот сопротивление можно считать пренебрежимо малым (при достаточно высокой добротности контура).

Напряжение на контуре в соответствии с (9.13), (9.14)

$$u_n(t)=I_nR\sin(n\omega_1t+n\theta_1)=U_n\sin(n\omega_1t+n\theta_1), \qquad (9.15)$$

где I_n — амплитуда n-й гармоники тока $i_{нл}(t)$.

Введение нагрузочного контура, поглощающего мощность, изменяет структуру спектра тока $i_{нл}(t)$, определяемого в холостом режиме выражением (9.11). Для определения структуры спектра в режиме нагрузки необходимо учесть взаимодействие на нелинейной емкости двух напряжений: $e(t)$ и $u_n(t)$. С этой целью в исходном выражении (9.11) $e(t)$ должно быть дополнено слагаемым $u_n(t)$. Выполнив затем преобразования, аналогичные (9.13), (9.14), найдем все спектральные составляющие тока $i_{нл}(t)$.

Для дальнейшего анализа последовательную схему замещения (рис. 9.2, *а*) целесообразно преобразовать в параллельную (рис. 9.2, *б*). В параллельной схеме замещения для каждой из спектральных составляющих тока $i_{нл}(t)$ предусмотрена отдельная ветвь с фильтром, пропускающим (без ослабления) только одну из гармоник. Напряжение генератора $e(t)$, как и в схеме рис. 9.2, *а*, оказывается приложенным непосредственно к $C_{нл}$, а токи с частотами $2\omega_1$, $3\omega_1, \ldots$, обусловленные нелинейностью $C_{нл}$, замыкаются во внешней цепи, не создавая никакой нагрузки для генератора с частотой ω_1. Исключение составляет лишь ветвь, содержащая нагрузочный контур. Падение напряжения, создаваемое n-й гармоникой тока на контуре, прикладывается к $C_{нл}$ последовательно с $e(t)$.

Проиллюстрируем определение спектральных составляющих тока и энергетических соотношений в схеме умножителя на примере удвоения частоты. Для выявления принципиальной стороны вопроса облегчим задачу допущением, что вольт-кулонная характеристика варактора в пределах используемого участка удовлетворительно аппроксимируется полиномом второй степени. Тогда амплитуда тока второй гармоники I_2 определяется лишь квадратичным членом ряда (9.9).

Подставив в (9.13) вместо $e(t)$ сумму $e(t)+u_n(t)=E\cos\psi_1(t)+U_2\sin\psi_2(t)$, после несложных тригонометрических преобразований получим

$$2b_2[e(t)+u_n(t)][e'(t)+u_n'(t)]=-b_2\omega_1E^2\sin(2\omega_1t+2\theta_1)+$$
$$+b_2\omega_1EU_2\cos(\omega_1t+\theta_1)+3b_2\omega_1EU_2\cos(3\omega_1t+3\theta_1)-$$
$$-2b_2\omega_1U_2^2\sin(4\omega_1t+4\theta_1). \tag{9.16}$$

Токи с частотами $3\omega_1$ и $4\omega_1$, замыкающиеся через «пустые» ветви схемы замещения, не выделяют мощности и могут не приниматься во внимание.

Первое слагаемое в правой части (9.16), совпадающее с (9.13), определяет ток в ветви, содержащей нагрузочный контур с резонансной частотой $\omega_р=2\omega_1$. Амплитуда этого тока

$$I_{\omega 2}=b_2\omega_1E^2, \tag{9.17}$$

а мощность, выделяемая в сопротивлении R,

$$P_{\omega 2}=\frac{I_{\omega 2}^2R}{2}=\frac{b_2^2\omega_1^2}{2}E^4R. \tag{9.18}$$

Второе слагаемое в правой части (9.16) определяет ток основной частоты ω_1, нагружающий генератор $e(t)$. Амплитуда этого тока с учетом (9.17)

$$I_{\omega 1}=b_2\omega_1EU_2=b_2\omega_1EI_{\omega 2}R=b_2^2\omega_1^2E^3R. \tag{9.19}$$

Следовательно, мощность, отбираемая от генератора $e(t)$,

$$P_{\omega 1}=\frac{I_{\omega 1}E}{2}=\frac{b_2^2\omega_1^2E^4}{2}R. \tag{9.20}$$

Сопоставление выражений (9.18) и (9.20) показывает, что $P_{\omega 1}=P_{\omega 2}$.

Легко убедиться, что при увеличении амплитуды E входного колебания и связанного с этим возрастанием влияния членов ряда (9.9) с более высокими степенями структура спектра тока $i_{нл}(t)$ усложнится, но соотношение между $P_{\omega 1}$ и $P_{\omega 2}$ останется прежним.

В равенстве $P_{\omega 1}=P_{\omega n}$ заключается принципиальное отличие умножителя частоты с энергоемким элементом $C_{нл}$ от безынерционного умножителя на транзисторе, рассмотренного в § 8.6. В транзисторном умножителе источник входного сигнала с ча-

стотой ω_1 лишь управляет током коллектора, энергия же колебания с частотой $n\omega_1$ поставляется источником постоянного тока в цепи коллектора. В варакторном умножителе единственным источником энергии является генератор частоты ω_1, который поставляет энергию в нелинейную емкость $C_{нл}$, играющую роль накопителя, откуда энергия «перекачивается» в колебание с частотой $n\omega_1$. При пренебрежении потерями в варакторе КПД умножителя равен единице. В реальном устройстве с учетом потерь в сопротивлении самого варактора и в согласующих цепях КПД достигает 60—70%.

9.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ЕМКОСТЬ

Рассмотрим энергетические соотношения в цепи, содержащей нелинейную емкость и колебательный контур, при входном воздействии в виде

$$e_1(t)+e_0(t)=E_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0).$$

Взаимодействие $e_1(t)$ и $e_0(t)$ в нелинейной емкости $C_{нл}$ создает ток $i_{нл}(t)$, спектр которого, как и при резистивном нелинейном элементе, содержит частоты вида $m\omega_1 \pm n\omega_0$ (кроме постоянной составляющей).

В данном параграфе нас будет интересовать выделение разностной комбинационной частоты $\omega_2=\omega_0-\omega_1$ при $\omega_0>\omega_1$. Для выделения указанной частоты в схему включен колебательный контур с резонансной частотой $\omega_р=\omega_0-\omega_1$. Последовательная схема замещения цепи представлена на рис. 9.3, *а*, а параллельная — на рис. 9.3, *б*.

При достаточно высокой добротности на контуре создается падение напряжения

$$u_2(t)=U_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)=I_2 z_2(\omega_2)\cos(\omega_2 t+\theta_2), \tag{9.21}$$

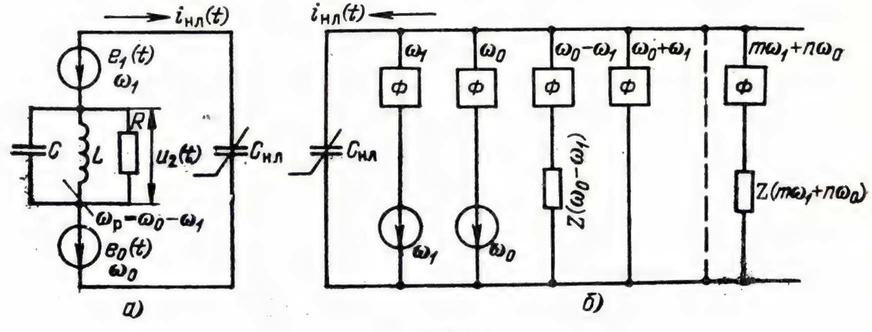


Рис. 9.3

где амплитуды тока I_2 и напряжения U_2, а также фаза θ_2 подлежат определению.

Результирующее напряжение, приложенное к $C_{нл}$,

$$e(t)=e_0(t)+e_1(t)+e_2(t)=E_0\cos\psi_0(t)+E_1\cos\psi_1(t)+$$
$$+E_2\cos\psi_2(t), \qquad (9.22)$$

где $e_2(t)=-u_2(t)$ имеет смысл ЭДС, компенсирующей падение напряжения $u_2(t)$. Подставив (9.22) в выражение (9.11) и ограничившись в нем лишь первыми двумя слагаемыми (с коэффициентами b_1 и b_2), придем к следующему результату:

$$i_{нл}(t)=-b_1[\omega_0E_0\sin(\omega_0t+\theta_0)+\omega_1E_1\sin(\omega_1t+\theta_1)+$$
$$+\omega_2E_2\sin(\omega_2t+\theta_2)]-b_2\{\omega_0E_1E_2\sin[\omega_0t+(\theta_1+\theta_2)]+$$
$$+\omega_1E_0E_2\sin[\omega_1t+(\theta_0-\theta_2)]+\omega_2E_0E_1\sin[\omega_2t+(\theta_0-\theta_1)]\}. \qquad (9.23)$$

При выводе этого выражения токи с частотами, отличными от ω_0, ω_1, и $\omega_2=\omega_0-\omega_1$, которые замыкаются через пустые ветви (не содержащие нагрузочного контура), не учитывались.

Первые три тока (слагаемые с коэффициентом b_1), сдвинутые по фазе на 90° относительно соответствующих напряжений $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_0(t)$, не создают расхода энергии (как и в обычном линейном конденсаторе без потерь).

Токи же частот ω_1, ω_2 и ω_0, обусловленные нелинейностью вольт-кулонной характеристики реактивного элемента, создают мощности $P_{\omega1}$, $P_{\omega2}$ и $P_{\omega0}$, которые нетрудно определить следующими[1] выражениями:

$$P_{\omega_1}=-{}^1/{}_2b_2\omega_1E_1E_2E_0\cos\varphi_z,\quad P_{\omega_2}=-{}^1/{}_2b_2\omega_2E_1E_2E_0\cos\varphi_z,$$
$$\qquad (9.24)$$
$$P_{\omega_1}={}^1/{}_2b_2\omega_0E_1E_2E_0\cos\varphi_z.$$

В этих выражениях φ_z — аргумент комплексного сопротивления $\mathbf{Z}_2(i\omega_2)$. При малых расстройках контура $\cos\varphi_z$ близок к единице.

Смысл отрицательных мощностей $P_{\omega1}$ и $P_{\omega2}$ заключается в том, что соответствующие источники на частотах ω_1 и ω_2 не отдают, а потребляют энергию. Положительное же значение

---

[1] При прохождении тока $i_{\omega2}(t)=-b_2\omega_2E_0E_1\sin[\omega_2t+(\theta_0-\theta_1)]$, определяемого последним слагаемым выражения (9.23), через контур $z_2(\omega_2)$ получается падение напряжения $u_2(t)=-b_2\omega_2E_0E_1z_2(\omega_2)\sin[\omega_2t+(\theta_0-\theta_1)+\varphi_z]$.

Сопоставление этого выражения с (9.21) приводит к равенству $\theta_2=\theta_0-\theta_1-\pi/2+\varphi_z$, откуда вытекают следующие формулы для токов:

$$i_{\omega_1}(t)=-b_2\omega_1E_0E_2\cos(\omega_1t+\theta_1-\varphi_z),$$
$$i_{\omega_2}(t)=-b_2\omega_2E_0E_1\cos(\omega_2t+\theta_2-\varphi_z),$$
$$i_{\omega_0}(t)=b_2\omega_0E_1E_2\cos(\omega_0t+\theta_0+\varphi_z).$$

Все три тока сдвинуты относительно соответствующих ЭДС $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_0(t)$ на угол φ_z, что и определяет средние мощности.

$P_{\omega 0}$ указывает на то, что источник $e_0(t)$ отдает энергию во внешнюю цепь.

Суммарная мощность, выделяемая в нелинейном реактивном элементе,

$$P_{\omega_0}+P_{\omega_1}+P_{\omega_2}={}^1/_2 b_2(\omega_0-\omega_1-\omega_2)E_1E_2E_0\cos\varphi_z=0, \qquad (9.25)$$

поскольку $\omega_0=\omega_1+\omega_2$. Этот результат находится в полном соответствии с принятым допущением отсутствия потерь в емкости.

Итак, в цепи, содержащей энергоемкий нелинейный элемент, возможна перекачка энергии от одного генератора к другому. Это указывает на возможность осуществления преобразования частоты сигнала одновременно с «накачкой» энергией от вспомогательного генератора.

Из выражений (9.24) вытекает следующее соотношение:

$$\frac{P_{\omega_1}}{\omega_1}=\frac{P_{\omega_2}}{\omega_2}=-\frac{P_{\omega_0}}{\omega_0}. \qquad (9.26)$$

9.4. ТЕОРЕМА МЭНЛИ—РОУ

Важное соотношение (9.26), выведенное для квадратичной вольт-кулонной характеристики, можно распространить и на бо́льшую нелинейность, когда в спектре тока, протекающего через нелинейную емкость $C_{нл}$, существует большее число составляющих с частотами вида $\omega_{m,n}=m\omega_1+n\omega_0$ (m и n — целые числа, которые в отличие от § 8.3 могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом сохраняется условие $|m|+|n|\leqslant k$, где k — степень полинома, аппроксимирующего нелинейную характеристику).

Известна теорема Мэнли—Роу, устанавливающая энергетические соотношения в спектре колебания в цепи, содержащей реактивную нелинейность (емкость или индуктивность) при произвольном порядке нелинейности и произвольном числе генераторов.

Модель цепи, используемая при выводе теоремы Мэнли—Роу, представлена на рис. 9.3, *б* (для двух генераторов). Число параллельных ветвей равно числу составляющих в спектре тока, протекающего через $C_{нл}$. Каждая ветвь содержит идеальный фильтр, пропускающий только колебание с соответствующей частотой. Идеальный фильтр можно представлять в виде последовательного соединения элементов L и C, отвечающих условию $1/\sqrt{LC}=m\omega_1+n\omega_0$. «Пустые» ветви, не содержащие сопротивлений Z, замыкают накоротко внешнюю цепь конденсатора $C_{нл}$ для токов соответствующей частоты. Таким образом, на $C_{нл}$ воздействуют помимо напряжений генераторов только напряжения, создаваемые токами комбинационных частот в соответствующих нагруженных ветвях.

Замечаем, что при включении Z только в одну ветвь, соответствующую частоте $\omega_0 - \omega_1 = \omega_2$ (при $m=-1$, $n=1$), получается модель цепи, эквивалентная ранее рассмотренной последовательной схеме с двумя генераторами и одним сопротивлением $Z_2(i\omega_2)$ (см. рис. 9.3, *а*).

Прежде чем давать общую формулировку теоремы, выведем уравнения Мэнли—Роу для случая, когда нагружена всего лишь одна ветвь, содержащая фильтр, пропускающий частоту $f_{m,n} = mf_1 + nf_0$.

Основываясь на законе сохранения энергии, исходим из условия, что сумма средних мощностей, поступающих в элемент $C_{нл}$ и отбираемых от него, равна нулю (конденсатор $C_{нл}$ свободен от потерь):

$$P_0 + P_1 + P_{m,n} = 0. \tag{9.27}$$

Выражение (9.25) иллюстрирует это равенство.

Выразим мощности P_0, P_1 и $P_{m,n}$ через энергию, выделяемую за один период соответственно T_0, T_1 и $T_{m,n}$:

$$P_0 = \frac{Э_0}{T_0} = Э_0 f_0, \quad P_1 = \frac{Э_1}{T_1} = Э_1 f_1 \text{ и } P_{m,n} = \frac{Э_{m,n}}{T_{m,n}} =$$

$$= Э_{m,n}(mf_1 + nf_0).$$

Тогда равенство (9.27) можно записать в форме

$$Э_0 f_0 + Э_1 f_1 + Э_{m,n}(mf_1 + nf_0) = f_1(Э_1 + mЭ_{m,n}) + f_0(Э_0 + nЭ_{m,n}) = 0.$$

Поскольку частоты f_1 и f_0 могут принимать любые значения, то это равенство возможно, только если каждое слагаемое равно нулю по отдельности:

$$Э_1 + mЭ_{m,n} = 0, \; Э_0 + nЭ_{m,n} = 0.$$

Переходя от энергии к мощности, получаем

$$\frac{P_1}{f_1} + \frac{mP_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{P_1}{\omega_1} + \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0,$$

$$\frac{P_0}{f_0} + \frac{nP_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{nP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0.$$

В общем случае при произвольном числе нагруженных ветвей приведенные уравнения должны быть просуммированы по всем возможным при заданной нелинейности значениям m и n, что приводит к общей формулировке теоремы Мэнли—Роу:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0, \tag{9.28}$$

где ω_1 и ω_0 — частоты генераторов, возбуждающих систему; $P_{m,n}$ — мощность колебания частоты $m\omega_1 + n\omega_0$; целые числа m и n определяют порядок комбинационного колебания.

Выражения (9.28) можно распространить на любые реактивности — емкостные и индуктивные — при условии отсутствия гистерезиса.

При рассмотрении систем с нелинейностью второго порядка вычисление сумм в (9.28) не связано с какими-либо трудностями.

Поясним применение выражений (9.28) на примере рассмотренной ранее цепи (см. рис. 9.3, *a*), возбуждаемой двумя генераторами на частотах ω_1 и ω_0. Кроме этих частот на пассивном элементе $Z_2(\omega_2)$ создается одно комбинационное колебание с резонансной частотой $\omega_2=\omega_0-\omega_1$.

В соответствии с обозначениями выражений (9.28) частоту ω_1 следует рассматривать как значение знаменателя $m\omega_1+n\omega_0$ при $m=1$ и $n=0$, а мощность на этой частоте $P_{\omega_1}=P_{1,0}$. Частоте ω_0 соответствуют индексы суммирования $m=0$, $n=1$ и мощность $P_{\omega_2}=P_{0,1}$. Наконец, частоте $\omega_2=\omega_0-\omega_1$ соответствуют индексы $m=-1$, $n=1$ и мощность $P_{\omega_2}=P_{\omega_0-\omega_1}=P_{-1,1}$.

Тогда внутренняя сумма в первом равенстве (9.28) дает

$$\sum_{n=-1}^{1}\frac{mP_{m,n}}{m\omega_1+n\omega_0}=\frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1-\omega_0}+\frac{mP_{m,0}}{m\omega_1+0\cdot\omega_0}+\frac{mP_{m,1}}{m\omega_1+\omega_0}=$$

$$=\frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1-\omega_0}+\frac{P_{m,0}}{\omega_1}+\frac{mP_{m,1}}{m\omega_1+\omega_0}.$$

Суммируя полученное выражение по m, получаем первое равенство (9.28)

$$\sum_{m=0}^{1}\left(\frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1-\omega_0}+\frac{P_{m,0}}{\omega_1}+\frac{mP_{m,1}}{m\omega_1+\omega_0}\right)=\left(0+\frac{P_{0,0}}{\omega_1}+0\right)+$$

$$+\left(\frac{P_{1,-1}}{\omega_1-\omega_0}+\frac{P_{1,0}}{\omega_1}+\frac{P_{1,1}}{\omega_1+\omega_0}\right)=\frac{P_{1,-1}}{\omega_1-\omega_0}+\frac{P_{1,0}}{\omega_1}=0.$$

(Слагаемые, содержащие $P_{0,0}$ и $P_{1,1}$, отброшены.) Таким образом,

$$P_{\omega_0-\omega_1}/[-(\omega_0-\omega_1)]+P_{\omega_0}/\omega_1=0$$

или

$$P_{\omega_0-\omega_1}/(\omega_0-\omega_1)=P_{\omega_2}/\omega_2=P_{\omega_1}/\omega_1.$$

Аналогичным образом второе равенство в (9.28) дает

$$P_{\omega_2}/\omega_2=-P_{\omega_0}/\omega_0.$$

Итак, получаем пропорции

$$P_{\omega_1}/\omega_1=P_{\omega_2}/\omega_2=-P_{\omega_0}/\omega_0,$$

совпадающие с выражением (9.28).

Из проведенного анализа видно, что с помощью нелинейной емкости можно осуществить преобразование спектра, сопро-

вождающееся перекачкой энергии из одного источника в другой. Так, если ω_1 — частота принимаемого сигнала, а ω_0 — частота гетеродина, то можно выделить комбинационную частоту $\omega_2=\omega_0-\omega_1$ с одновременным усилением мощности колебания на этой частоте. Напомним, что при использовании резистивного нелинейного элемента преобразование частоты сигнала (см. § 8.10) не сопровождается перекачкой энергии от гетеродина.

Приведенные выше соотношения будут использованы в § 10.8 при анализе работы параметрического усилителя.

Глава 10. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ

10.1. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Параметрическими называются системы, в которых хотя бы один из параметров изменяется во времени по какому-либо заданному закону. Будем полагать, что изменение (модуляция) параметра или параметров осуществляется электронным способом с помощью управляющего колебания.

Простыми примерами изменяемых параметров являются дифференциальная крутизна нелинейного резистивного элемента (см. § 8.1) и дифференциальные емкость и индуктивность нелинейных энергоемких элементов (см. § 9.1), значения которых изменяются под действием управляющего колебания.

Рассмотрим зависимость крутизны вольт-амперной характеристики нелинейного элемента $i(u)$ от управляющего колебания $e_у(t)$, наложенного на постоянное напряжение E_0 (рис. 10.1,*а*). Используя определение крутизны (8.3), эту зависимость можно записать в виде

$$S(e_у)=di/du\,|_{u=E_0+e_у}. \tag{10.1}$$

Если в пределах изменения $e_у(t)$ характеристика аппроксимируется полиномом второй степени [см. (8.4)], то выражение (10.1) приводится к виду

$$S(e_у)=a_1+2a_2e_у=S_0+2a_2e_у, \tag{10.2}$$

где $S_0=a_1$ — дифференциальная крутизна в точке A (рис. 10.1,*а*). Зависимость крутизны от управляющего напряжения изображена на рис. 10.1,*а* в виде наклонной прямой линии.

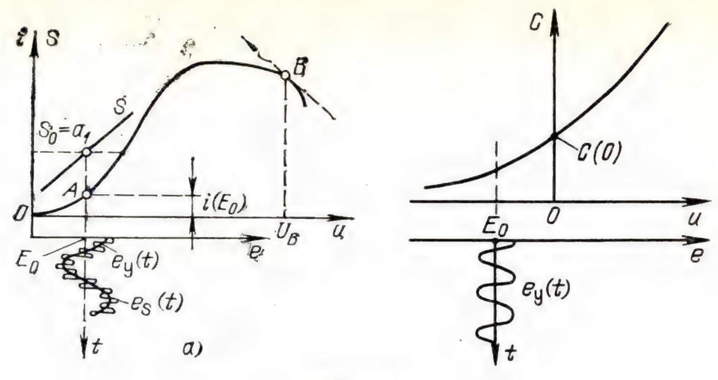


Рис. 10.1

Пусть $e_у(t)=E_у\cos\omega_у t$. Тогда крутизну можно записать в виде функции времени

$$S(t)=S_0+2a_2E_у\cos\omega_у t=S_0(1+m\cos\omega_у t), \qquad (10.3)$$

где $m=2a_2E_у/S_0$ — коэффициент модуляции крутизны.

По отношению к слабому сигналу $e_s(t)$, наложенному на управляющее колебание $e_у(t)$, рассматриваемый нелинейный элемент можно трактовать как линейный с переменным параметром $S(t)$, управляемым по закону (10.3). Существенной особенностью дифференциальной крутизны (а также дифференциального сопротивления) является то, что этот параметр может принимать отрицательное значение. Для этого вольт-амперная характеристика должна на некотором участке иметь отрицательный наклон (окрестность точки B на рис. 10.1,a).

Аналогично можно рассмотреть принцип электронного управления емкостью. Пусть к нелинейной емкости приложены два колебания: сильное, которое является управляющим, и слабое — сигнальное. Воспользуемся следующей аппроксимацией вольт-кулонной характеристики нелинейной емкости:

$$q(E_0+e_у)=q(E_0)+b_1e_у+b_2e^2_у,\ b_1>0,\ b_2>0.$$

Тогда дифференциальную емкость по аналогии с (10.2) можно определить выражением

$$C_{диф}(e_у)=\left.\frac{dq}{du}\right|_{u=E_0+e_у}=b_1+2b_2e_у,$$

где $b_1=C_{диф}(E_0)$ — дифференциальная емкость в точке E_0 [см. (9.4)], т. е. при $e_у=0$.

Если управляющее напряжение является гармоническим колебанием $e_у(t)=E_у\cos\omega_у t$, то $C_{диф}(e_у)$ можно представить в виде

$$C(t)=C_{диф}(E_0)+2b_2E_у\cos\omega_у t=C_{диф}(E_0)(1+m\cos\omega_у t), \qquad (10.4)$$

где $m=2b_2E_у/C_{диф}(E_0)$ — коэффициент модуляции емкости.

После такого представления можно говорить о воздействии одного лишь сигнала $e_s(t)$ на периодически изменяющуюся во времени линейную емкость $C(t)$, так как влияние управляющего колебания сводится к изменению положения рабочей точки для сигнала.

При использовании в качестве параметрической емкости варикапа можно исходить из вольт-фарадной характеристики, представленной на рис. 10.1,*б*. При $u<0$ эта характеристика хорошо аппроксимируется зависимостью

$$C(u)=C(0)\sqrt{\varphi_к/(|u|+\varphi_к)}, \qquad (10.5)$$

где $\varphi_к>0$ — контактная разность потенциалов, зависящая от кристалла, примесей и т. д.; u — приложенное (обратное) напряжение.

Подставляя в (10.5) $|u|=|E_0|+E_у\cos\omega_у t$, получаем (при $E_у\ll\varphi_к+|E_0|$)

$$C(t)\approx\frac{C_{диф}(E_0)}{1+\frac{E_у}{2(\varphi_к+|E_0|)}\cos\omega_у t}=\frac{C_{диф}(E_0)}{1+m\cos\omega_у t}\approx$$

$$\approx C_{диф}(E_0)(1-m\cos\omega_у t), \qquad (10.5')$$

$C_{диф}(E_0)=C(0)\sqrt{\varphi_к/(\varphi_к+|E_0|)}$ — дифференциальная емкость в точке $u=E_0$; $m=E_у/2(\varphi_к+|E_0|)\ll 1$ — коэффициент модуляции емкости.

В тех случаях, когда элемент с нелинейной вольт-кулонной характеристикой подключается параллельно линейной постоянной емкости $C_{лин}$, в выражения (10.4) и (10.5′) вместо $C_{диф}(E_0)$ должна быть подставлена емкость $C_0=C_{диф}(E_0)+C_{лин}$. При этом коэффициент модуляции в (10.4) $m=2b_2E_у/C_0$, а $C(t)=C_0(1+m\cos\omega_у t)$.

Аналогично для варикапа (при $m\ll 1$) вместо (10.5′) имеем

$$C(t)=C_0-\Delta C\cos\omega_у t=C_0(1-m\cos\omega_у t),\ m=\Delta C/C_0.$$

По отношению к слабому сигналу ($E_s\ll E_у$), подаваемому на линейную параметрическую емкость $C(t)$, справедливы следующие соотношения между зарядом, током и напряжением:

$$q(t)=C(t)u_C(t), \qquad (10.6)$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=C(t)\frac{du_C}{dt}+u_C(t)\frac{dC}{dt}, \qquad (10.7)$$

$$u_C(t)=q(t)/C(t)=\frac{1}{C(t)}\int i(t)\,dt. \qquad (10.8)$$

Для линейной параметрической индуктивности $L(t)$ имеют место следующие соотношения, связывающие потокосцепление Φ, напряжение u_L и ток i:

$$\Phi(t) = L(t)\, i(t), \qquad (10.9)$$

$$u_L(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L(t)\frac{di}{dt} + i(t)\frac{dL}{dt}, \qquad (10.10)$$

$$i(t) = \Phi(t)/L(t) = \frac{1}{L(t)}\int u_L(t)\, dt. \qquad (10.11)$$

Отметим принципиальное отличие энергоемких (реактивных) элементов от резистивных: дифференциальные емкость и индуктивность не могут быть отрицательными[1]. Физически это объясняется тем, что увеличение напряжения на емкости не может вызывать уменьшения заряда, а увеличение тока через индуктивность не может приводить к уменьшению потокосцепления.

Итак, элементы с изменяющимися во времени параметрами $R(t)$, $C(t)$ и $L(t)$ будут рассматриваться при воздействии слабого сигнала как линейные; для них справедлив принцип суперпозиции. Термины «дифференциальные» в названиях элементов часто будут опускаться.

Системы с переменными параметрами играют очень большую роль в радиотехнике и электронике.

Можно говорить о двух принципиально различных видах изменения параметров:

1) управляемое изменение для осуществления различных преобразований сигналов (модуляции, преобразования частоты, усиления и т. д.);

2) случайное изменение, обусловленное различными физическими явлениями при передаче сигналов, например, изменяющейся во времени задержкой сигнала, колебанием затухания волн при их распространении, изменением фазовых соотношений при многолучевом распространении радиоволн, изменением сигналов во времени из-за флюктуаций параметров тракта и т. д.

Влияние изменений параметров второго вида, носящих статистический характер, будет рассмотрено в гл. 11. В настоящей главе рассматриваются параметрические процессы при управляемом изменении во времени одного из параметров линейной системы.

10.2. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В гл. 6 рассматривалась обработка различных сигналов в линейных системах с постоянными параметрами. Связь между входным и выходным сигналами в них определялась с помощью

---

[1] Имеются в виду пассивные элементы. С помощью же усилительных схем с обратной связью можно имитировать отрицательные C и L.

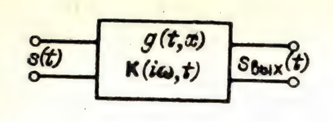


Рис. 10.2

передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ (спектральный метод) или с помощью импульсной характеристики $g(t)$ (метод интеграла наложения).

Аналогичные алгоритмы можно составить и для линейных систем с переменными параметрами. Очевидно, что в подобных системах функциональная зависимость между входным и выходным сигналами в процессе передачи изменяется. Иными словами, передаточная функция системы зависит не только от частоты, но и от времени; импульсная характеристика также зависит от двух аргументов: от интервала $(t—x)$ между моментом приложения дельта-функции x и моментом наблюдения отклика t (как и для системы с постоянными параметрами) и, кроме того, от положения интервала $(t—x)$ на оси времени. Поэтому импульсную характеристику параметрической системы следует обозначать $g(t, x)$.

Если на входе четырехполюсника с импульсной характеристикой $g(t, x)$ действует произвольный сигнал $s(t)$ (рис. 10.2), то, основываясь на принципе суперпозиции, выходной сигнал по аналогии с (5.24) определим с помощью выражения

$$s_{\text{вых}}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t-x),\ g(t, x)\,dx. \tag{10.12}$$

Введем теперь передаточную функцию для этой же параметрической системы. Для этого представим функцию $s(t—x)$ в виде интеграла Фурье:

$$s(t-x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\,e^{i\omega(t-x)}d\omega, \tag{10.13}$$

где $\mathbf{S}(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Тогда выражение (10.12) переходит в следующее:

$$s_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\,e^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, x)\,e^{-i\omega x}dx\,d\omega.$$

Внутренний интеграл в этом выражении есть не что иное, как передаточная функция параметрической системы

$$\mathbf{K}(i\omega, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, x)\,e^{-i\omega x}dx. \tag{10.14}$$

Тогда определение выходного сигнала с помощью спектрального метода приобретает вид

$$s_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega, t)\,e^{i\omega t}d\omega. \tag{10.15}$$

Использование общего выражения (10.14) для систем с произвольным изменением параметров во времени обычно оказывается слишком сложным из-за трудности нахождения импульсной характеристики $g(t, x)$. Задача существенно упрощается при периодическом изменении параметра системы. Определение функции $\mathbf{K}(i\omega, t)$, периодической во времени, рассматривается в § 10.4.

10.3 ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для определения импульсной характеристики системы $g(t, x)$ непосредственно по заданным ее параметрам без обращения к передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega, t)$ необходимо использовать дифференциальное уравнение системы.

Рассмотрим простейшую систему, описываемую уравнением первого порядка

$$a_1(t)\frac{dy(t)}{dt}+a_0(t)\,y(t)=f(t). \qquad (10.16)$$

По определению импульсная характеристика является откликом системы на дельта-функцию $\delta(t-x)$, подаваемую на вход в момент $t=x$ (см. § 10.2). Из этого определения следует, что если в правой части уравнения (10.16) функцию $f(t)$ заменить на $\delta(t-x)$, то в левой части $y(t)$ можно заменить на $g(t, x)$.

Таким образом, приходим к уравнению

$$a_1(t)\frac{dg(t,\ x)}{dt}+a_0(t)\,g(t,\ x)=\delta(t-x). \qquad (10.17)$$

Так как правая часть этого уравнения равна нулю всюду, кроме точки $t=x$, функцию $g(t,\ x)$ можно искать в виде решения однородного уравнения (с нулевой правой частью)

$$a_1(t)\,dg/dt+a_0(t)\,g=0,\ \ a_0\neq 0, \qquad (10.18)$$

при начальных условиях, вытекающих из уравнения (10.17), а также из условия, что к моменту $t=x$ система является «пустой».

В (10.18) переменные разделяются:

$$\frac{dg}{g}+\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt=0, \quad \text{откуда}$$

$$g=\varphi e^{-\int [a_0(t)/a_1(t)]\,dt}, \qquad (10.19)$$

где

$$\varphi=g(t,\ x)\,|_{t=x} \qquad (10.20)$$

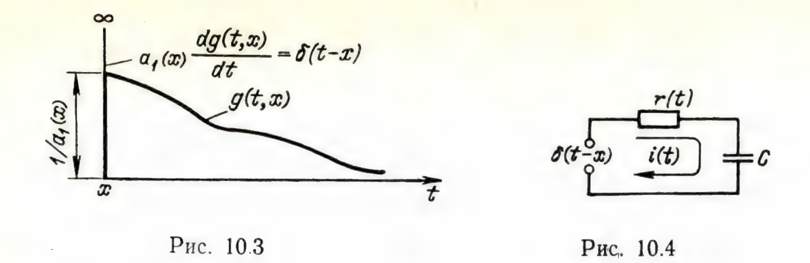


Рис. 10.3

Рис. 10.4

представляет собой значение импульсной характеристики в момент $t=x$.

Для определения φ вернемся к исходному уравнению (10.17), из которого видно, что в точке $t=x$ функция $g(t)$ должна совершать скачок на величину $1/a_1(x)$ (рис. 10.3). Только при этом условии первое слагаемое в уравнении (10.17), т. е. $a_1(t)dg/dt$, может образовать дельта-функцию $\delta(t-x)$.

Так как при $t<x$ $g(t, x)=0$, то в момент $t=x$

$$g(t, x)|_{t=x}=1/a_1(x). \qquad (10.21)$$

Заменяя в выражении (10.19) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом, получаем

$$g(t, x)=\frac{1}{a_1(x)}\exp\left(-\int\limits_x^t \frac{a_0(u)}{a_1(u)}du\right). \qquad (10.22)$$

Для ясности переменная интегрирования вместо t обозначена буквой u.

Используем выражение (10.22) для цепи (рис. 10.4), представляющей собой последовательное соединение резистора с переменным сопротивлением

$$r(t)=r_0/(1+m\sin\Omega t) \qquad (10.23)$$

и с постоянной емкостью C_0. Под $\delta(t-x)$ подразумевается импульс напряжения, а в качестве определяемой функции $g(t, x)$ выберем заряд конденсатора $q(t)$.

Тогда уравнение цепи в соответствии с (10.17) и (10.23) можно записать в форме

$$\frac{r_0}{1+m\sin\Omega t}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C_0}q=\delta(t-x). \qquad (10.24)$$

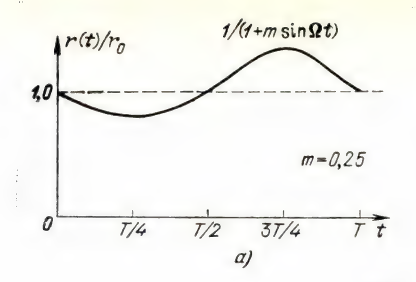
Подставляя в (10.22)

$$a_1(t)=r_0/(1+m\sin\Omega t),\ a_0(t)=1/C_0,$$

получаем

$$q(t, x)=\frac{1+m\sin\Omega t}{r_0}\exp\left[-\int\limits_x^t \frac{1+m\sin\Omega u}{r_0C_0}du\right]=$$

$$=\frac{1+m\sin\Omega t}{r_0}\exp\left[-\frac{t-x}{r_0C_0}+\frac{m}{rC_0\Omega}(\cos\Omega t-\cos\Omega x)\right]. \qquad (10.25)$$



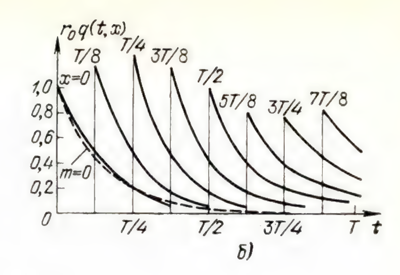


Рис. 10.5

Продифференцировав это выражение по t, можно найти ток $i(t)$. В момент $t=x$, когда $q(t, x)$ образует скачок, равный $1/r(t)$, ток будет $(1/r(t))\delta(t-x)$. Напряжение на емкости можно определить делением выражения (10.25) на C_0.

Из выражения (10.25) видно, как вариация сопротивления по закону (10.23) влияет на характер разряда: в аргументе экспоненты кроме $-(t-x)/r_0C_0$ (как и при постоянном сопротивлении r_0) появляется периодическое слагаемое $(m/r_0C_0\Omega)\times$ $\times(\cos\Omega t-\cos\Omega x)$.

Закон изменения $r(t)/r_0$ показан на рис. 10.5, *а*, график функции $r_0q(t, x)$ при $r_0C_0\Omega=1$ и $m=0{,}25$ — на рис. 10.5, *б*. Штриховой линией показана зависимость $\exp[-(t-x)/r_0C_0]$, соответствующая импульсной характеристике при постоянном сопротивлении $r_0(m=0)$ и $x=0$.

Для более сложных цепей, описываемых дифференциальным уравнением n-го порядка $(n\geqslant 2)$, задача определения импульсной характеристики усложняется.

10.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. МОДУЛЯЦИЯ КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Наряду с выражением (10.14) можно дать еще одно определение передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega, t)$, которое в некоторых задачах позволяет избежать обращения к импульсной характеристике. С этой целью используем выражение (10.15) для случая, когда входной сигнал является гармоническим колебанием $s(t)=\cos\omega_0 t$, а соответствующий ему аналитический сигнал $z(t)=e^{i\omega_0 t}$.

Спектральная плотность этого сигнала $\mathbf{Z}(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ [см. (2.78′)]. Подставляя $\mathbf{Z}(\omega)$ вместо $\mathbf{S}(\omega)$ в (10.15), получаем

$$z_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\mathbf{K}(i\omega, t)\,e^{i\omega t}d\omega=\mathbf{K}(i\omega_0, t)\,e^{i\omega_0 t},$$

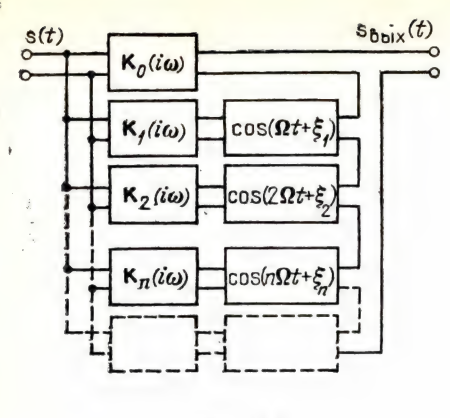


Рис. 10.6

откуда, опуская индекс нуль при ω, находим

$$\mathbf{K}(i\omega,\ t)=z_{вых}(t)/e^{i\omega t}. \qquad (10.26)$$

Под $z_{вых}(t)$ в данном выражении следует подразумевать аналитический сигнал на выходе системы при гармоническом воздействии $e^{i\omega t}$ на входе.

Определение (10.26) особенно эффективно, если передаточная функция $\mathbf{K}(i\omega,\ t)$ изменяется во времени по периодическому закону. При периоде $T=2\pi/\Omega$ функцию $\mathbf{K}(i\omega,\ t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{K}(i\omega,\ t)=\mathbf{K}_0(i\omega)+\mathbf{K}_1(i\omega)\cos(\Omega t+\xi_1)+$$
$$+\mathbf{K}_2(i\omega)\cos(2\Omega t+\xi_2)+\ldots, \qquad (10.27)$$

где $\mathbf{K}_0(i\omega)$, $\mathbf{K}_1(i\omega)$, ..., — не зависящие от времени коэффициенты, в общем случае комплексные, которые можно истолковать как передаточные функции некоторых четырехполюсников с постоянными параметрами. Произведение $\mathbf{K}_n(i\omega)\cos(n\Omega t+\xi_n)$ можно рассматривать как передаточную функцию каскадного соединения двух четырехполюсников: одного с передаточной функцией $\mathbf{K}_n(i\omega)$, не зависящей от времени, и второго с передаточной функцией $\cos(n\Omega t+\xi_n)$, изменяющейся во времени, но не зависящей от частоты ω входного сигнала.

Основываясь на выражении (10.27), любую параметрическую систему с периодически изменяющимися параметрами можно представить в виде эквивалентной схемы, изображенной на рис. 10.6.

В соответствии с (10.26) при входном сигнале $s(t)=\cos\omega t$, $z(t)=e^{i\omega t}$, сигнал на выходе

$$z_{вых}(t)=\mathbf{K}(i\omega,\ t)e^{i\omega t}=\mathbf{K}_0(i\omega)e^{i\omega t}+\mathbf{K}_1(i\omega)e^{i\omega t}\cos(\Omega t+\xi_1)+$$
$$+\mathbf{K}_2(i\omega)e^{i\omega t}\cos(2\Omega t+\xi_2)+\ldots=K_0(\omega)e^{i(\omega t+\varphi_0)}+K_1(\omega)e^{i(\omega t+\varphi_1)}\times$$
$$\times\cos(\Omega t+\xi_1)+K_2(\omega)e^{i(\omega t+\varphi_2)}\cos(2\Omega t+\xi_2)+\ldots \qquad (10.28)$$

Здесь φ_0, φ_1, φ_2, ... — ФЧХ четырехполюсников $\mathbf{K}_0(i\omega)$, $\mathbf{K}_1(i\omega)$, $\mathbf{K}_2(i\omega)$, ...

Переходя к вещественному сигналу на выходе, получаем

$$s_{вых}(t) = \mathrm{Re}\, z_{вых}(t) = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + K_1(\omega)\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\Omega t + \xi_1) + K_2(\omega)\cos(\omega t + \varphi_2) \times \\ \times \cos(2\Omega t + \xi_2) + \ldots = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} K_n(\omega)\{\cos[(\omega + n\Omega)t + \varphi_n + \xi_n] + \\ + \cos[(\omega - n\Omega)t + \varphi_n - \xi_n]\}. \quad (10.29)$$

Этот результат указывает на следующее свойство системы с переменными параметрами: при изменении передаточной функции по любому сложному, но периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω образует на выходе системы спектр, содержащий частоты ω, $\omega \pm \Omega$, $\omega \pm 2\Omega$ и т. д.

Возникновение в параметрической системе колебаний с частотами $\omega \pm n\Omega$ есть не что иное, как процесс переноса спектра низкочастотного управляющего (модулирующего) колебания с основной частотой $\Omega (\Omega \ll \omega)$ в область высоких частот, т. е. процесс получения АМ колебания (процесс модуляции).

Для пояснения сказанного представим передаточную функцию параметрического четырехполюсника в соответствии с определением (10.26) в виде отношения выходного АМ колебания к входному несущему:

$$\mathrm{K}(i\omega_0, t) = \frac{A_0[1 + k_{АМ}s(t)]\, e^{i\omega_0 t}}{E_0 e^{i\omega_0 t}} = \mathrm{K}_0[1 + k_{АМ}s(t)], \quad (10.30)$$

где $k_{АМ}$ — коэффициент пропорциональности, связывающий относительное изменение амплитуды колебания с модулирующим сообщением.

Как и следовало ожидать, передаточная функция в данном случае не зависит от частоты ω_0 и соответствует усилителю, у которого коэффициент усиления изменяется пропорционально величине $s(t)$.

В § 8.5 рассматривался способ получения АМ колебания, основанный на изменении амплитуды импульсов тока в нелинейном резонансном усилителе. По существу этот способ можно рассматривать как пропускание несущего колебания через параметрический четырехполюсник с передаточной функцией (10.30), так как изменение амплитуды импульсов тока, а следовательно, и средней крутизны приводит к требуемому изменению коэффициента усиления.

Таким образом, устройство модуляции, использующее сугубо нелинейный режим активного элемента (транзистора), можно рассматривать как классический пример линейной параметрической системы.

Режим слабого колебания несущей частоты, когда дифференциальная крутизна нелинейного элемента определяется выражением (10.3), также обеспечивает реализацию передаточной функции (10.30). В этом случае нелинейный резонансный усилитель на схеме рис. 8.14 должен быть заменен на линейный резонансный усилитель.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены другие параметрические процессы, в которых происходит мультипликативное «сложение» колебаний (преобразование частоты, синхронное детектирование).

Отметим, что в линейной параметрической системе при подаче на вход негармонического сигнала не существует никакого взаимодействия между его спектральными компонентами (принцип суперпозиции) и в системе не возникает частот вида $n\omega_1+m\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — различные частоты входного сигнала.

Процесс угловой модуляции также использует параметрические устройства. Покажем это на примере передаточной функции линии задержки $\tau_з(t)=\tau_0+\tau_m\sin\Omega t$.

Пусть на вход этой линии задержки, передаточная функция которой

$$\mathbf{K}(i\omega, t)=\mathrm{e}^{-i\omega\tau_з(t)}, \qquad (10.31)$$

подано несущее колебание $e(t)=E_0\cos\omega_0 t$ [соответственно $z(t)=E_0\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$] (рис. 10.7).

Основываясь на (10.26), определяем аналитический сигнал на выходе

$$z_{вых}(t)=E_0\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\mathbf{K}(i\omega_0, t)=E_0\mathrm{e}^{i\omega_0(t-\tau_0-\tau_m\sin\Omega t)}, \qquad (10.32)$$

откуда следует

$$a_{вых}(t)=\mathrm{Re}[z_{вых}(t)]=E_0\cos[\omega_0(t-\tau_0)-\omega_0\tau_m\sin\Omega t]. \qquad (10.33)$$

Получилось ФМ колебание с индексом модуляции $m=\omega_0\tau_m$ и со спектром, аналогичным выражению (3.31). Таким образом, коэффициенты ряда Фурье для функции $\mathbf{K}(i\omega, t)$ в данном примере совпадают с бесселевыми функциями $J_n(\omega_0\tau_m)$ (см. § 3.6).

Осуществление угловой модуляции рассматривается в следующем параграфе.

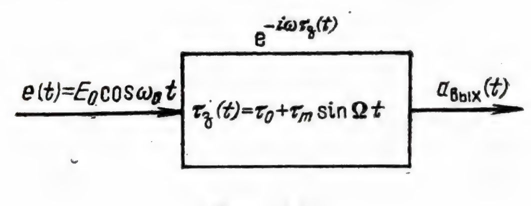


Рис. 10.7

10.5. РЕАЛИЗАЦИЯ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

В автогенераторах, работающих на частотах не выше нескольких десятков мегагерц, широко используются методы угловой модуляции, основанные на прямом изменении резонансной частоты колебательной системы генератора за счет управления величиной емкости или индуктивности контура. Так как резонансная частота колебательного контура непосредственно определяет частоту генерации, то под угловой модуляцией в автогенераторе будем подразумевать частотную.

Существует ряд способов управления резонансной частотой колебательного контура: электронные, электромагнитные и др. Выбор того или иного способа зависит от основных параметров модуляции: относительного изменения частоты $\Delta\omega/\omega_р$ и скорости изменения частоты. Последний параметр характеризуется спектром модулирующего (управляющего) колебания.

Широко распространенным способом электронного управления резонансной частотой колебательного контура является подключение к нему варикапа, емкость которого зависит от напряжения, приложенного в направлении запирания. Упрощенная схема автогенератора с варикапом изображена на рис. 10.8, *а*. На схеме замещения колебательной системы автогенератора (рис. 10.8, *б*) C_0 обозначает среднюю емкость варикапа (в отсутствие модулирующего напряжения), а $\Delta C(t)$ — вариацию емкости, пропорциональную модулирующему напряжению $e_\Omega(t)$. Сопротивление перехода обозначено R, а объемное сопротивление толщи полупроводника r.

При заданных значениях средней частоты ω_0 и частотного отклонения $\Delta\omega$ требуемое изменение емкости ΔC нетрудно найти с помощью очевидных соотношений

$$\omega_0=1/\sqrt{L_к C_{к0}},\ \omega_0+\Delta\omega=1/\sqrt{L_к(C_{к0}+\Delta C)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{L_к C_{к0}}\sqrt{1+\Delta C/C_{к0}}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\Delta C/C_{к0}}},$$

где $C_{к0}=C_к+C_0$ — средняя емкость контура.

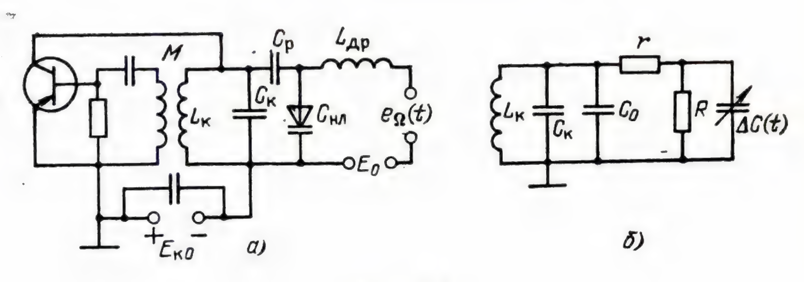


Рис. 10.8

Разделив последнее выражение на ω_0, получим

$$1+\Delta\omega/\omega_0=1/\sqrt{1+\Delta C/C_{к0}},$$

откуда

$$\frac{\Delta C}{C_{к0}}=-\frac{2\Delta\omega/\omega_0+(\Delta\omega/\omega_0)^2}{(1+\Delta\omega/\omega_0)^2}. \qquad (10.34)$$

В общем случае требуемое относительное изменение емкости связано с заданным относительным изменением частоты нелинейной зависимостью (10.34). Однако необходимость использования этого соотношения возникает лишь при очень глубокой частотной модуляции. В ряде применений ЧМ относительное изменение частоты весьма невелико. Например, при передаче речи и музыки на УКВ значение $\Delta\omega/\omega_0$ не превышает нескольких долей процента. В подобных случаях выражение (10.34) можно упростить, если пренебречь значением $\Delta\omega/\omega_0$ по сравнению с единицей:

$$\Delta C/C_{к0}\approx-2\Delta\omega/\omega_0. \qquad (10.35)$$

Таким образом, при малых относительных изменениях $\Delta\omega$ и ΔC связаны линейными соотношениями и для получения линейной ЧМ емкость нужно изменять по закону функции $e_\Omega(t)$.

Недостатком варикапа в схеме частотного модулятора является зависимость сопротивления перехода R от амплитуды внешнего напряжения. При относительно глубокой ЧМ, требующей значительных амплитуд модулирующего напряжения, эта зависимость приводит к существенному изменению вносимого в контур автогенератора затухания и в конечном счете к паразитной АМ.

Аналогично, изменением резонансной частоты колебательного контура, но включенного не в схему автогенератора, а в схему резонансного усилителя, осуществляется фазовая модуляция, т. е. реализуется передаточная функция линии задержки (10.31). В этом случае при подаче на вход усилителя колебания несущей частоты ω_0 изменение резонансной частоты контура $\omega_р$ влияет лишь на фазу выходного колебания. Фазовый сдвиг легко определяется с помощью выражения

$$\theta(t)=\operatorname{arctg}\frac{2\Delta\omega(t)}{\omega_р(t)}Q_{экв}\approx\operatorname{arctg}\frac{2\Delta\omega(t)}{\omega_0}Q_{экв}, \qquad (10.36)$$

где $\Delta\omega(t)=\omega_р(t)-\omega_0$. Замена в знаменателе $\omega_р(t)$ на ω_0 обычно допустима из-за малости относительного изменения резонансной частоты $\omega_р$ при модуляции.

Недостатком рассмотренного способа, как следует из (10.36), является малый диапазон изменения $\theta(t)$ ($\theta_{max}\leqslant20°$), при котором обеспечивается линейная связь между $\theta(t)$ и $\Delta\omega(t)$.

Для устранения этого недостатка после ФМ модулятора можно осуществить многократное умножение частоты, что при-

ведет к увеличению в такое же число раз индекса модуляции. Такой же способ пригоден и для увеличения девиации частоты ЧМ колебаний (см. § 8.2).

Проблема получения больших значений θ_{max} упрощается в диапазоне СВЧ при использовании приборов типа лампы бегущей волны, в которых время пролета электронов можно изменять в некоторых пределах, изменяя потенциал на соответствующих электродах лампы. При заданной и неизменной частоте возбуждения на входе лампы ω_0 изменение времени пролета электронов на величину $\Delta\tau$ эквивалентно изменению фазы выходного колебания на угол $\theta(t)=\omega_0\Delta\tau(t)$. Таким способом удается получить весьма большие значения θ_{max}, измеряемые десятками и более радиан.

10.6. ПРИНЦИП ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

В § 10.1 было показано, что по отношению к сигналу, малому по сравнению с управляющим колебанием, нелинейная емкость вместе с источником управляющего колебания может быть замещена линейной, изменяющейся во времени емкостью. Отвлекаясь от способа осуществления модуляции емкости (или индуктивности), можно говорить об обмене энергией между источником сигнала и энергоемким параметрическим элементом.

Наглядным примером обмена энергией при изменении емкости является хорошо известная модель с механическим раздвижением пластин заряженного конденсатора. Пондемоторная сила электрического поля конденсатора стремится сблизить пластины (независимо от полярности напряжения); следовательно, для их раздвижения, т. е. для уменьшения емкости, необходимо произвести работу, которая увеличивает запас энергии конденсатора. При сближении пластин, наоборот, часть энергии поля конденсатора преобразуется в механическую энергию.

Рассмотрим высокодобротный колебательный контур, составленный из индуктивности $L=\text{const}$ и емкости $C(t)$, изменяющейся (с помощью варикапа) по скачкообразному закону, представленному на рис. 10.9. Допустим, что контур возбуждается сигналом $e(t)=E\cos\omega t$, частота которого ω совпадает со средним значением резонансной частоты контура $\omega_p=1/\sqrt{LC_0}$, а последняя вдвое меньше частоты изменения $C(t)$. Таким образом, полный цикл изменения емкости совершается за время, равное половине периода напряжения на емкости $u_C(t)$.

Напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, близкое к гармоническому, показано на нижней части рис. 10.9. Фаза изменения $C(t)$ подобрана с таким расчетом, чтобы емкость уменьшалась

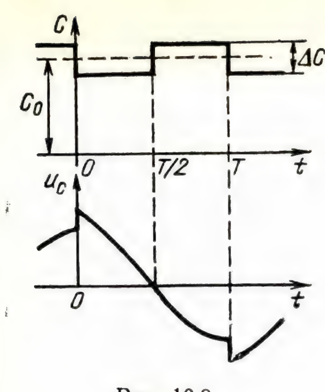


Рис. 10.9

в моменты перехода $u_C(t)$ через амплитудные значения, а увеличивалась в моменты прохождения через нуль. В моменты спада $C(t)$ напряжение $u_C(t)$ получает приращение, поскольку заряд конденсатора не может мгновенно измениться.

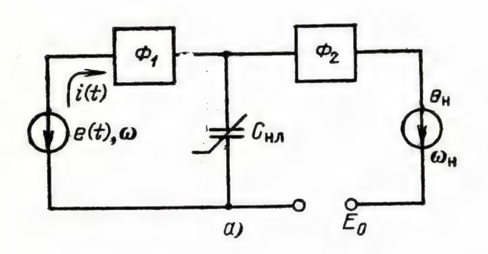
Это означает, что энергия электрического поля в конденсаторе периодически получает приращение, а это эквивалентно увеличению средней мощности сигнала.

Если прирост энергии, обусловленный одним скачком (вниз) емкости $C(t)$, не превышает расход энергии за время T, то параметрическая цепь устойчива, в противном случае возникает параметрическое возбуждение колебаний. Таким образом, регулируя относительную величину $\Delta C/C_0$, т. е. глубину модуляции параметра C, можно осуществить как параметрическое усиление сигнала, так и параметрическую генерацию.

Реализация скачкообразного изменения $C(t)$ связана с техническими трудностями и в практике не применяется. Значительно проще модулировать емкость по гармоническому закону. Необходимо лишь соблюдать основной принцип: уменьшать емкость в области максимальных значений заряда (напряжения) конденсатора и увеличивать в области минимальных значений.

Дополнительная мощность сигнала поставляется («накачивается») генератором напряжения, управляющего значением $C(t)$. В связи с этим его часто называют генератором накачки, а управляющее колебание — напряжением накачки.

Способ получения периодически изменяющейся емкости поясняется схемой на рис. 10.10, *а*. К нелинейной емкости $C_{\text{нл}}$ подводится управляющее напряжение накачки $e_{\text{н}}=E_{\text{н}}\cos(\omega_{\text{н}}t+$ $+\gamma)$, наложенное на постоянное напряжение E_0. Фильтр Φ_1 преграждает путь току частоты $\omega_{\text{н}}$ в цепь источника сигнала, а



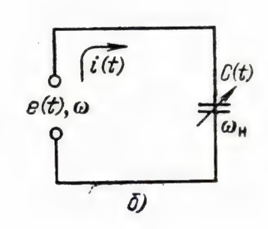


Рис. 10.10

фильтр $Ф_2$ — току частоты сигнала ω (и близких к ω частот) в цепь накачки.

Наложим условие $E \ll E_н$. Тогда, как указано в § 10.1, можно пренебречь изменением емкости под действием сигнала и считать, что закон изменения емкости определяется одним лишь управляющим напряжением. Запишем этот закон в виде

$$C(t) \approx C_0[1 - m\cos(\omega_н t + \gamma)] =$$
$$= C_0 - \Delta C\cos(\omega_н t + \gamma), \; m \ll 1, \tag{10.37}$$

где

$$\Delta C = mC_0; \tag{10.38}$$

γ — начальная фаза.

На рис. 10.10, *б* представлена эквивалентная *линейная* параметрическая схема, на которой цепь накачки не показана.

Определим полный ток через емкость $C(t)$ с помощью общего выражения (10.7):

$$i(t) = [C_0 - \Delta C\cos(\omega_н t + \gamma)][-\omega E\sin\omega t] +$$
$$+ \omega_н \Delta C E\cos\omega t\sin(\omega_н t + \gamma) = -\omega C_0 E\sin\omega t +$$
$$+ {}^1/_2(\omega_н + \omega)\Delta C E\sin[(\omega_н + \omega)t + \gamma] +$$
$$+ {}^1/_2(\omega_н - \omega)\Delta C E\sin[(\omega_н - \omega)t + \gamma]. \tag{10.39}$$

Частота $\omega_н + \omega \approx 3\omega$ в полосу прозрачности фильтра $Ф_1$ не попадает; следовательно, ток в цепи источника сигнала является суммой двух токов: на частоте ω и на комбинационной частоте $\omega_н - \omega$, близкой к ω (поскольку, $\omega_н \approx 2\omega$). Первый из этих токов, сдвинутый по фазе относительно $e(t) = E\cos\omega t$ на угол 90°, не может создавать активную проводимость — ни положительную, ни отрицательную. С точки зрения получения эффекта усиления интерес представляет комбинационное колебание разностной частоты $\omega_н - \omega$, особенно в частном случае $\omega_н = 2\omega$. При этом ток на частоте ω

$$i_{\omega_н - \omega}(t) = i_\omega(t) = +{}^1/_2(\omega_н - \omega)\Delta C E\sin[(\omega_н - \omega)t + \gamma] =$$
$$= +{}^1/_2\omega\Delta C E\sin(\omega t + \gamma) = {}^1/_2\omega\Delta C E\cos[\omega t + \gamma - \pi/2]. \tag{10.40}$$

Амплитуда этого тока $I_\omega = {}^1/_2\omega\Delta C E$.

При ЭДС источника $e(t) = E\cos\omega t$ и токе $i_\omega(t)$, определяемом выражением (10.40), отдаваемая источником мощность

$$P_\omega = \frac{EI_\omega}{2}\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\omega\Delta C\frac{E^2}{2}\sin\gamma = G_{эк}\frac{E^2}{2},$$

где символом

$$G_{эк} = \frac{\omega\Delta C}{2}\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m\omega C_0}{2}\sin\gamma \tag{10.41}$$

обозначена эквивалентная активная проводимость, учитывающая расход мощности источника сигнала.

Таким образом, приходим к схеме замещения (рис. 10.11, *б*), соответствующей параметрической цепи, показанной на рис. 10.11, *а*. Комбинационная частота $\omega_н+\omega=3\omega$ в этой схеме не учитывается, а частота $\omega_н-\omega$ совпадает с частотой ω. В результате по отношению к источнику сигнала параметрическая схема (см. рис. 10.11, *а*) приводится к схеме с постоянными параметрами. Периодическое изменение $C(t)$ с частотой $\omega_н=2\omega$ приводит лишь к появлению активной проводимости $G_{эк}$, шунтирующей постоянную емкость C_0.

Рассмотрим три следующих характерных режима: $\gamma=0$, $\pi/2$ и $-\pi/2$ (рис. 10.12). В первом случае ($\gamma=0$) $C(t)$ модулируется таким образом, что изменение запаса энергии в емкости за период колебания $T_{\omega_н}=2\pi/\omega_н$ (а также за период $T_\omega=2\pi/\omega$) равно нулю. При этом $G_{эк}=0$.

Во втором случае ($\gamma=\pi/2$) максимальная скорость нарастания $C(t)$ имеет место в моменты, когда напряжение проходит через максимумы; при этом часть энергии, запасенной в емкости, переходит в устройство, изменяющее емкость. По отношению к источнику ЭДС это равносильно шунтированию постоянной емкости C_0 положительной активной проводимостью $G_{эк}=(m/2)\omega C_0$.

Наконец, в третьем случае, при $\gamma=-\pi/2$, когда $C(t)$ убывает в области $e(t)=E$ и нарастает в области $e(t)=0$, активная проводимость отрицательна: $G_{эк}=-(m/2)\omega C_0$.

Этот результат согласуется с результатами приведенного выше качественного рассмотрения принципа параметрического усиления. Отрицательная проводимость $G_{эк}$ учитывает приток энергии от генератора накачки в цепь, содержащую $C(t)$. В данном примере с электронно-управляемой емкостью при-

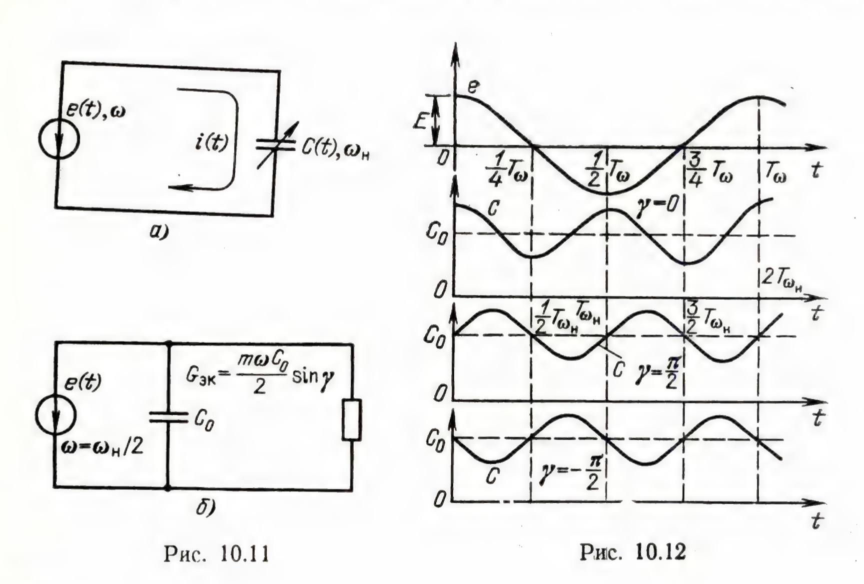


Рис. 10.11

Рис. 10.12

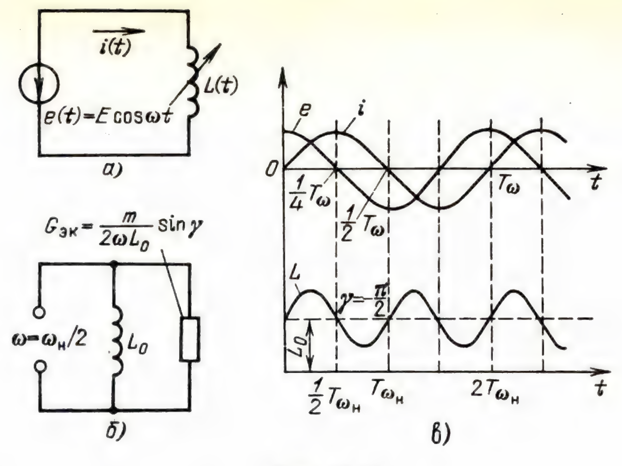


Рис. 10.13

рост энергии, запасаемой в емкости, происходит за счет работы, совершаемой генератором накачки при уменьшении емкости (преодоление сил электрического поля при движении электронов и дырок через потенциальный барьер в области запирающего слоя).

Результаты, аналогичные полученным выше для $C(t)$, нетрудно вывести и для периодически изменяющейся индуктивности $L(t)$.

Исходя из схемы на рис. 10.13, *а* при изменении индуктивности по закону

$$L(t)=L_0[1+m\cos(\omega_{\text{н}}t+\gamma)] \tag{10.42}$$

находим ток с помощью соотношения (10.11) (при $m\ll 1$)

$$i(t)=\frac{1}{L(t)}\int e(t)\,dt=\frac{1}{\omega L_0[1+m\cos(\omega_{\text{н}}t+\gamma)]}E\sin\omega t\approx$$

$$\approx\frac{E}{\omega L_0}[1-m\cos(\omega_{\text{н}}t+\gamma)]\sin\omega t=E\left\{\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t-\right.$$

$$\left.-\frac{m}{2\omega L_0}\sin[(\omega+\omega_{\text{н}})t+\gamma]-\frac{m}{2\omega L_0}\sin[(\omega-\omega_{\text{н}})t-\gamma]\right\}.$$

При $\omega_{\text{н}}=2\omega$ ток на частоте ω

$$i_\omega(t)=E\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t+E\frac{m}{2\omega L_0}\sin(\omega t+\gamma)=$$

$$=E\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t+E\frac{m}{2\omega L_0}\cos\left[\omega t-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right].$$

Первое слагаемое никак не влияет на расход мощности, а второе, сдвинутое относительно ЭДС сигнала на угол $\pi/2-\gamma$, определяет расход мощности

$$P_\omega=\frac{m}{2\omega L_0}\frac{E^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\frac{m}{2\omega L_0}\frac{E^2}{2}\sin\gamma=G_{\text{эк}}\frac{E^2}{2},$$

где

$$G_{\text{эк}}=\frac{m}{2\omega L_0}\sin\gamma$$

— эквивалентная активная проводимость.

Таким образом, при $\omega_{\text{н}}=2\omega$ получается схема замещения, изображенная на рис. 10.13, *б*. Фазовые соотношения между $e(t)=E\cos\omega t$, $i(t)=(E/\omega L_0)\sin\omega t$ и индуктивностью $L(t)$, изменяющейся по закону (10.42), видны из рис. 10.13, *в*, построенного для $\gamma=-\pi/2$. В данном случае проводимость $G_{\text{эк}}$ отрицательна $(-m/2\omega L_0)$, если при прохождении тока $i(t)$ через амплитудные значения $L(t)$ убывает, а при прохождении его через нуль $L(t)$ возрастает. Энергия вводится в цепь за счет работы, совершаемой устройством накачки при уменьшении индуктивности, обтекаемой током (преодоление сил магнитного поля, стремящихся сблизить витки и увеличить индуктивность катушки).

10.7. ОДНОКОНТУРНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Из предыдущего параграфа следует, что введением в колебательный контур переменной емкости или индуктивности можно при соответствующем законе изменения параметра осуществлять усиление колебаний. Простейшая схема одноконтурного параметрического усилителя с переменной емкостью изображена на рис. 10.14, *а*. Нелинейная емкость $C_{\text{нл}}$ находится под воздействием двух напряжений: сигнального с частотой ω и накачки с частотой $\omega_{\text{н}}$.

Рассмотрим сначала режим работы усилителя при точном соблюдении условия $\omega=\omega_{\text{н}}/2$. В этом так называемом синхронном режиме комбинационная частота $\omega_{\text{н}}-\omega$ совпадает с часто-

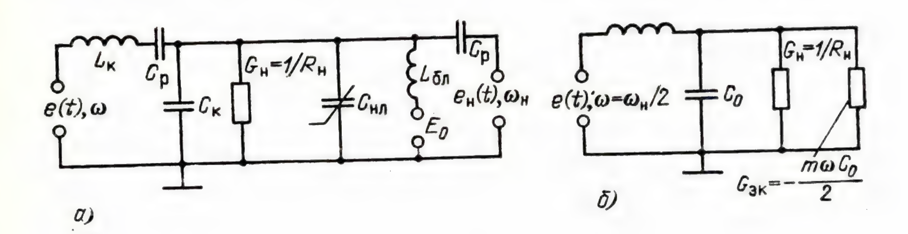


Рис. 10.14

той ω, так что в контуре существует ток только на частоте ω. Схема замещения для синхронного режима представлена на рис. 10.14, *б* для случая $\gamma=-\pi/2$, соответствующего отрицательной вещественной проводимости $G_{эк}$. Символом C_0 обозначена сумма емкости конденсатора контура $C_к$ и средней емкости варикапа (соответствующей постоянному напряжению E_0).

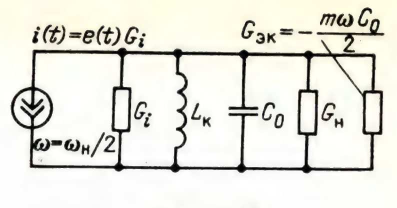


Рис. 10.15

Для упрощения анализа источник ЭДС сигнала $e(t)$, включенный в контур последовательно, заменен на рис. 10.15 генератором тока, подключенным параллельно контуру и шунтированным внутренней проводимостью G_i. Проводимость нагрузки $G_н$ включает в себя также проводимость, учитывающую потери мощности в элементах контура. Шунтирование проводимости нагрузки $G_н$ отрицательной проводимостью $G_{эк}=(\omega\Delta C/2)\times \times\sin\gamma=-\omega\Delta C/2=-m\omega C_0/2$ уменьшает суммарную проводимость и таким образом повышает добротность контура. Получается эффект усиления.

Составим выражение для коэффициента усиления в виде отношения мощности сигнала на выходе усилителя к максимальной мощности, которую можно получить при отсутствии параметрической модуляции. Как известно, максимум мощности, выделяемой в проводимости нагрузки (при отсутствии усиления), достигается при $G_н=G_i$. При этом мощность сигнала

$$P_s=\frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_н}=\frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_i}$$

(I — амплитуда тока генератора).

При подключении дополнительной проводимости $G_{эк}$ напряжение на выходе будет $E=I(G_i+G_н+G_{эк})=I/(2G_н+G_{эк})$, а мощность, выделяемая в проводимости нагрузки,

$$P_s'=\frac{1}{2}E(EG_н)=\frac{1}{2}G_нE^2=\frac{1}{2}G_н\frac{I^2}{(2G_н+G_{эк})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_н}\frac{1}{(1+G_{эк}/2G_н)^2}.$$

Отсюда коэффициент усиления мощности

$$K_P=P_s'/P_s=1/(1+G_{эк}/2G_н)^2. \qquad (10.43)$$

Напомним, что $G_{эк}$ — отрицательная величина.

Из этого выражения непосредственно вытекает условие устойчивости параметрического усилителя (в синхронном режиме)

$$|G_{эк}|<2G_н \text{ или } m\omega C_0/2<2G_н, \qquad (10.44)$$

откуда критическое значение коэффициента параметрической модуляции

$$m_{кр}=2(2G_н/\omega C_0)=2/Q_{эк}, \qquad (10.45)$$

где $Q_{эк}$ — добротность контура с учетом G_i и $G_н=G_i$.

Заметим, что при $G_{эк}=-G_н$, т. е. когда параметрическая модуляция компенсирует потери только в $G_н$, усиление по мощности равно всего четырем.

На практике при усилении реального сигнала, фаза которого неизвестна, а частота может изменяться в некоторой полосе, соблюдение условий синхронного режима невозможно. Пусть частота сигнала ω будет неточно $\omega_н/2$, а $\omega=\omega_н/2+\Omega$, где Ω — небольшое отклонение, не выходящее из полосы прозрачности колебательного контура. Тогда комбинационная частота $\omega_н-\omega=\omega_н-(\omega_н/2+\Omega)=\omega_н/2-\Omega$. При этом в полосе пропускания контура оказываются два колебания: одно с частотой $\omega_н/2+\Omega$ (полезный сигнал), а другое с частотой $\omega_н/2-\Omega$ (комбинационная частота).

Соотношение между амплитудами указанных двух колебаний зависит от глубины модуляции емкости m и величины Ω. Подробный анализ, который здесь не приводится, показывает, что при значениях m, близких к критическому [см. (10.45)], и относительно малой расстройке Ω амплитуды обоих колебаний примерно одинаковы. Возникают биения и связанные с этим последствия (пульсация амплитуды и изменения фазы результирующего колебания). Можно, правда, показать, что даже при расхождении частот ω и $\omega_н/2$ средняя за период биений мощность колебаний больше, чем при отсутствии параметрического воздействия, т. е. что и в этом, так называемом бигармоническом, режиме имеет место усиление сигнала. Однако подобный режим работы усилителя не всегда приемлем.

От недостатков, присущих одноконтурному параметрическому усилителю, свободна схема, рассматриваемая в следующем параграфе.

10.8. ДВУХКОНТУРНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Принципиальная схема двухчастотного или, как его часто называют, двухконтурного усилителя изображена на рис. 10.16. Первый, сигнальный, контур настраивается на центральную частоту спектра сигнала (резонансная частота $\omega_{р1}\approx\omega_1$), а второй, «холостой», контур — на частоту $\omega_{р2}$, достаточно сильно отличающуюся от $\omega_{р1}$.

Частота накачки выбирается из условия

$$\omega_н=\omega_{р1}+\omega_{р2}. \qquad (10.46)$$

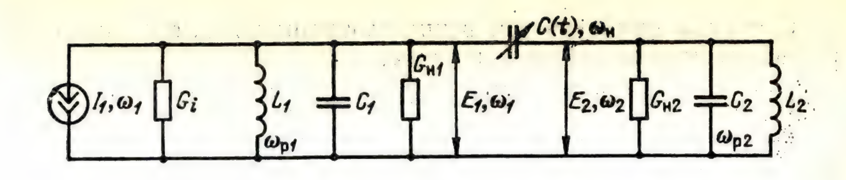


Рис. 10.16

При выборе частоты $\omega_{р2}$ исходят из условия, что частота сигнала ω_1 находится вне полосы прозрачности вспомогательного контура. Но комбинационная частота $\omega_2=\omega_н-\omega_1$ должна находиться вне рабочей полосы сигнального контура.

При выполнении этих условий на сигнальном контуре будет существовать лишь одно напряжение частоты ω_1, а на вспомогательном контуре — частоты ω_2. Считая амплитуды E_1 и E_2 этих напряжений малыми по сравнению с $E_н$, можно заменить нелинейную емкость $C_{нл}$ совместно с генератором накачки линейной параметрической емкостью $C(t)$, изменяющейся с частотой $\omega_н$, как это было сделано в § 10.6. Тогда под воздействием напряжения сигнала $e_1(t)=E_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)$ в цепи переменной емкости $C(t)=C_0-\Delta C\cos(\omega_н t+\theta_н)$ возникает (помимо других составляющих, не представляющих в данном случае интереса) ток

$$i_{\omega_н-\omega_1}(t)=i_{\omega_2}(t)={}^1/_2(\omega_н-\omega_1)\Delta CE_1\sin[(\omega_н t+\theta_н-(\omega_1 t+\theta_1)]=$$
$$={}^1/_2\omega_2\Delta CE_1\sin[\omega_2 t+(\theta_н-\theta_1)]=I_{\omega_2}\sin[\omega_2 t+(\theta_н-\theta_1)] \quad (10.47)$$

[см. 10.39)]. Здесь $I_{\omega_2}={}^1/_2\omega_2\Delta CE_1$.

На сопротивлении холостого контура $Z_2(i\omega_2)=Z_2(\omega_2)e^{i\varphi_z}$ ток $i_{\omega_2}(t)$ создает нападение напряжения

$$I_{\omega_2}Z_2(\omega_2)\sin(\omega_2 t+\theta_н-\theta_1+\varphi_z)={}^1/_2\omega_2\Delta CZ_2(\omega_2)E_1\times$$
$$\times\sin(\omega_2 t+\theta_н-\theta_1+\varphi_z).$$

Эквивалентную ЭДС, воздействующую на емкость $C(t)$, запишем, как и в § 9.3 [см. (9.21)], в форме

$$e_2(t)=E_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)=-{}^1/_2\omega_2\Delta CZ_2(\omega_2)E_1\sin(\omega_2 t+\theta_н-\theta_1+$$
$$+\varphi_z)=E_2\cos[\omega_2 t+\theta_н-\theta_1+\varphi_z+\pi/2],$$

где $E_2={}^1/_2\omega_2\Delta CZ_2(\omega_2)E_1$.

Комбинационный ток $i_{\omega_н-\omega_2}(t)$, обусловленный этой ЭДС, по аналогии с выражением (10.47) будет

$$i_{\omega_н-\omega_2}(t)=i_{\omega_1}(t)={}^1/_2(\omega_н-\omega_2)\Delta CE_2\sin[(\omega_н-\omega_2)t+$$
$$+\theta_н-(\theta_н-\theta_1+\varphi_z+\pi/2)]={}^1/_2\omega_1\Delta CE_2\sin(\omega_1 t+\theta_1-\varphi_z-\pi/2)=$$
$$=-{}^1/_2\omega_1\Delta CE_2\cos(\omega_1 t+\theta_1-\varphi_z). \quad (10.48)$$

Заметим, что фаза накачки $\theta_н$ и частота $\omega_н$ в выражении (10.48) отсутствуют.

С учетом приведенного выше соотношения для E_2 последнее равенство можно записать в форме

$$i_{\omega_1}(t)=-(\Delta C/2)^2\omega_1\omega_2 Z_2(\omega_2)E_1\cos(\omega_1 t+\theta_1-\varphi_z).$$

Как видим, по отношению к сигнальному контуру нелинейная емкость $C_{нл}$ вместе с генератором накачки и холостым контуром может быть замещена проводимостью, учитывающей найденный ток $i_{\omega_1}(t)$.

Комплексная амплитуда этого тока

$$\mathbf{I}_{\omega_1}=-(\Delta C/2)^2\omega_1\omega_2 Z_2(\omega_2)e^{-i\varphi_z}E_1 e^{i\theta_1}.$$

Комплексная амплитуда напряжения $e_1(t)=E_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)$ на сигнальном контуре $\mathbf{E}_1=E_1 e^{\theta_1}$. Следовательно, проводимость, шунтирующая сигнальный контур, будет

$$\mathbf{G}_{эк}(i\omega_1)=\frac{\mathbf{I}_{\omega_1}}{\mathbf{E}_1}=-\left(\frac{\Delta C}{2}\right)^2\omega_1\omega_2 Z_2(\omega_2)e^{-i\varphi_z}=$$

$$=-\left(\frac{\Delta C}{2}\right)^2\omega_1\omega_2\mathbf{Z}_2^*(i\omega_2)=-\left(\frac{mC_0}{2}\right)^2\omega_1\omega_2\mathbf{Z}_2^*(i\omega_2), \qquad (10.49)$$

где $\mathbf{Z}_2^*(i\omega_2)=Z_2(\omega_2)e^{-i\varphi_z}$ — функция, комплексно-сопряженная функции $\mathbf{Z}_2(i\omega_2)$.

При резонансе, когда $\omega_1=\omega_{p1}$ и, следовательно, $\omega_2=\omega_{p2}$, сопротивление вспомогательного контура будет $R_{н2}=1/G_{н2}$ и формула (10.49) принимает вид

$$G_{эк}(\omega_{p1})=-(mC_0/2)^2\omega_1\omega_2 R_{н2}. \qquad (10.50)$$

На схеме замещения, представленной на рис. 10.17, элементы, расположенные слева от штриховой линии, соответствуют сигнальному контуру усилителя, а справа — нелинейной емкости вместе со вспомогательным контуром. Полученная схема по существу совпадает со схемой одноконтурного усилителя (см. рис. 10.15). Различие лишь в способе определения эквивалентной отрицательной проводимости.

Подробности, связанные с определением комбинационных колебаний $i_{\omega_н-\omega_1}(t)$ и $i_{\omega_н-\omega_2}(t)$, приведены с целью привлечения внимания к следующим преимуществам двухконтурного усилителя:

а) эквивалентная отрицательная проводимость, а следова-

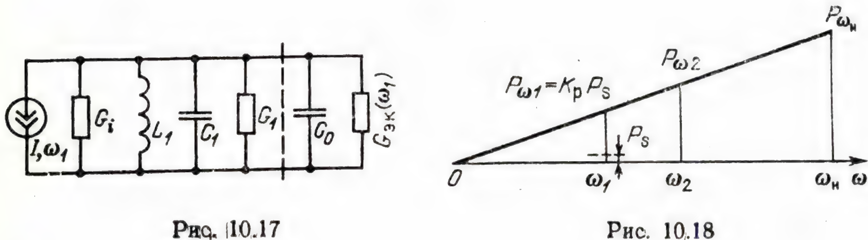


Рис. 10.17

Рис. 10.18

тельно, и усиление мощности не зависят от фазы напряжения накачки;

б) не требуется соблюдение определенного соотношения между частотами ω_1 и $\omega_н$.

Оба этих свойства двухконтурного усилителя объясняются тем, что полная фаза комбинационного тока $i_{\omega_н-\omega_2}$ в выражении (10.48), определяющая характер эквивалентной проводимости $G_{эк}$, по существу является разностью фаз напряжений накачки $e_н(t)$ и $e_2(t)$. Первая из них имеет вид $(\omega_н t+\theta_н)$, а вторая $(\omega_2 t+\theta_н-\theta_1)$ (без учета φ_z и $\pi/2$). При образовании разности $\theta_н$ выпадает, а разностная частота $\omega_н-\omega_2$ в любом случае совпадает с частотой сигнала (поскольку $\omega_2=\omega_н-\omega_1$).

Коэффициент усиления двухконтурного усилителя при резонансной частоте ($\omega_1=\omega_{р1}$) можно определить из выражения, аналогичного формуле (10.43):

$$K_р=1/(1+G_{эк}/2G_{н1})^2, \tag{10.51}$$

где $G_{эк}$ вычисляется по формуле (10.49), а $G_{н1}$ — проводимость нагрузки сигнального контура.

При отклонении частоты сигнала ω_1 от резонансной частоты $\omega_{р1}$ и соответственно частоты ω_2 от $\omega_{р2}$ модуль сопротивления $Z(\omega_2)$ уменьшается, что приводит к уменьшению модуля $G_{эк}$ и, следовательно, коэффициента усиления мощности.

Основываясь на выражении (10.49), можно вычислить АЧХ и полосу пропускания двухконтурного усилителя.

Условие устойчивости усилителя в данном случае можно записать в форме

$$|G_{эк}|=(mC_0/2)^2\omega_1\omega_2 R_{н2}<2G_{н1}$$

или

$$m<2\sqrt{2}\sqrt{G_н/R_{н2}\omega_1\omega_2 C_0^2}.$$

Рассмотрим энергетический баланс в двухчастотном усилителе в зависимости от соотношения частот ω_1 и ω_2. Пусть заданы частота ω_1 и мощность P_s сигнала на входе усилителя. Так как с повышением вспомогательной частоты ω_2 модуль отрицательной величины $G_{эк}$ увеличивается [см. (10.49)], то $K_р$ также растет [см. (10.51)]. Мощность сигнала на выходе усилителя $P_{\omega_1}=K_р P_s$.

Для определения требуемой мощности генератора накачки $P\omega_н$, а также мощности P_{ω_2}, выделяемой во вспомогательном контуре, воспользуемся теоремой Мэнли-Роу. На основании выражения (9.26) можно записать следующие соотношения:

$$P_{\omega_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}P_{\omega_1}, \quad P_{\omega_н}=\frac{\omega_н}{\omega_1}P_{\omega_1}=P_{\omega_1}+P_{\omega_2}.$$

(Знак минус в последнем выражении опущен, так как очевидно, что эта мощность отбирается от генератора накачки.)

Соотношение мощностей P_s, P_{ω_1}, P_{ω_2} и $P_{\omega_н}$ иллюстрируется рис. 10.18. Из этого рисунка видно, что при $\omega_2 > \omega_1$ на вспомогательном контуре выделяется мощность, бо́льшая, чем на сигнальном. Таким образом, хотя с повышением частоты ω_2 мощность $P\omega_1$ и растет, распределение мощности, отбираемой от генератора накачки, изменяется в пользу частоты ω_2. Несмотря на это, часто работают в режиме $\omega_2 > \omega_1$, так как при усилении слабого сигнала основное значение имеет не степень использования мощности $P_{\omega_н}$, а отношение мощности P_{ω_1} к P_s, т. е. K_P.

Для иллюстрации количественных соотношений в двухчастотном параметрическом усилителе приведем следующий пример.

Пусть требуется осуществить усиление сигнала на частоте $f_1 = 30$ МГц при ширине спектра $2\Delta f_0 = 100$ кГц.

Исходные данные первого (сигнального) контура: характеристическое сопротивление $\rho_1 = 100$ Ом; внутреннее сопротивление источника сигнала, шунтирующее контур, $R_i = 5$ кОм; сопротивление нагрузки $R_{н1} = 5$ кОм.

Исходные данные второго (холостого) контура: резонансная частота $f_{р2} = 60$ МГц; характеристическое сопротивление $\rho_2 = 50$ Ом; сопротивление нагрузки $R_{н2} = 5$ кОм.

Прежде чем вычислять требуемую вариацию емкости варикапа, найдем предельную проводимость $G_{эк}$, которую можно подключать к сигнальному контуру при заданной ширине спектра сигнала $2\Delta f_0$.

Максимальная добротность сигнального контура (при шунтировании отрицательной проводимостью), очевидно, не должна превышать

$$Q_1 \leqslant f_1/2\Delta f_0 = 30 \cdot 10^6/100 \cdot 10^3 = 300.$$

При $\rho_1 = 100$ Ом результирующая проводимость, шунтирующая первый контур, должна быть не менее

$$G_i + G_{н1} + G_{эк} \geqslant 1/\rho_1 Q_1,$$

откуда

$$G_{эк} \geqslant 1/\rho_1 Q_1 - (G_i + G_{н1}) = 1/\rho_1 Q_1 - 2G_{н1} = -367 \cdot 10^{-6} \text{ См}.$$

Подставляя значения $G_{эк}$, ω_1, ω_2 и $R_{н2}$ в (10.50), находим

$$mC_0/2 = \Delta C/2 = \sqrt{|G_{эк}|/\omega_1\omega_2 R_{н2}} \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ Ф},$$

откуда

$$\Delta C = 6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 6 \text{ пФ}.$$

Требуемое значение ΔC можно реализовать с помощью обычного варикапа. Существующие в настоящее время варикапы допускают, например, изменение емкости до 30 пФ.

Коэффициент усиления мощности вычислим по формуле (10.51):

$$K_P = 1 \Big/ \left(1 - \frac{367 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}\right)^2 \approx 147.$$

В заключение отметим основные преимущества и недостатки параметрического усилителя.

Важным преимуществом параметрического усилителя является относительно низкий уровень шумов по сравнению с транзисторными или ламповыми усилителями. В § 7.3 отмечалось, что главным источником шумов в транзисторном и ламповом усилителях является дробовой эффект, обусловленный хаотическим переносом дискретных зарядов электронов и дырок (в транзисторе). В параметрическом усилителе аналогичный эффект, имеет место в приборе, осуществляющем модуляцию параметра. Например, изменение емкости варикапа происходит за счет перемещений электронов и дырок. Однако интенсивность потока носителей электричества в варикапе во много раз меньше, чем в транзисторе или лампе. В последних интенсивность потока определяет непосредственно мощность полезного сигнала, выделяемого в цепи нагрузки, а в варикапе — всего лишь эффект модуляции параметра. Ослабление влияния дробового эффекта столь значительно, что в параметрическом усилителе уровень шумов определяется в основном тепловыми шумами. В связи с этим часто применяют охлаждение параметрического диода до 5 ... 10 К.

Недостатком параметрического усилителя является сложность развязки цепей накачки и сигнала.

В схеме, представленной на рисунке 10.14, *а*, характерной для параметрических усилителей метрового диапазона, развязка осуществляется с помощью разделительных конденсаторов и блокировочных дросселей. В диапазоне СВЧ, на которых особенно широко применяются параметрические усилители, приходится прибегать к весьма сложным конструкциям, сочетающим в одном узле двухчастотную колебательную цепь в виде полых резонаторов, варикап и специальные элементы развязки (циркулятор, направленный ответвитель, поглотитель, заградительный фильтр).

10.9. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Из предыдущих параграфов следует, что параметрический усилитель, в котором глубина модуляции m нелинейной емкости или индуктивности доводится до значения, превышающего некоторое критическое $m_{кр}$, превращается в генератор. Подобные генераторы называются **параметронами**. Простейший параметрон представляет собой колебательный контур, один из

элементов которого — нелинейная емкость или индуктивность — подвергается периодическому изменению во времени с помощью генератора накачки.

Можно наметить следующую картину возникновения и нарастания колебания в параметрическом генераторе. Пусть закон изменения емкости варикапа определяется выражением

$$C(t)=C_0/(1+m\sin\omega_н t), \tag{10.52}$$

где частота накачки $\omega_н=2\omega_р$; $\omega_р$ — резонансная частота колебательного контура.

Если $m>m_{кр}$ (неустойчивая система), при запуске генератора накачки в контуре возникает колебание с частотой $\omega_р=\omega_н/2$ и начальной фазой 0 или π (по отношению к фазе накачки).

При отсутствии внешнего воздействия, т. е. в режиме свободного колебания, фаза (0 или π), а также амплитуда возникающего колебания являются случайными величинами, зависящими от фазы и амплитуды шумового напряжения $e_ш(t)$ в контуре.

Для выявления процесса нарастания амплитуды колебания обратимся к рассмотрению свойств простого колебательного контура, емкость которого изменяется по закону (10.52) при $L=\text{const}$ и $r=\text{const}$.

В режиме свободного колебания дифференциальное уравнение для тока в контуре будет

$$L\frac{di(t)}{dt}+ri(t)+\frac{1}{C(t)}\int i(t)\,dt=0.$$

Переходя от тока i к заряду q и учитывая выражение (10.52), получаем

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{r}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{(1+m\sin\omega_н t)}{LC_0}q=0. \tag{10.53}$$

Величина $1/LC_0=\omega_р^2$ определяет резонансную частоту контура в отсутствие модуляции емкости, т. е. при $m=0$.

Таким образом, уравнение (10.53) можно записать в форме

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\alpha_к\frac{dq}{dt}+\omega_р^2(1+m\sin\omega_н t)\,q=0, \tag{10.54}$$

где $\alpha_к=r/2L$.

Основываясь на допущении высокой добротности контура ($Q=\omega_р/2\alpha_к\gg1$), мы вправе искать решение уравнения (10.54) в виде колебания с частотой $\omega_р$ и медленно меняющейся амплитудой

$$q(t)=A_0e^{\mu t}\cos(\omega_р t+\xi), \tag{10.55}$$

где μ — показатель, зависящий от параметров контура и модуляции емкости.

Заметим, что при $Q \gg 1$ можно, как и для контура с постоянной емкостью, считать

$$q(t) = C_0 e_c(t) = C_0 E_{c_0} e^{\mu t} \cos(\omega_p t + \xi). \qquad (10.55')$$

Подстановкой (10.55′) в (10.54) можно определить как μ, так и начальную фазу ξ, однако задачу можно еще более упростить, поскольку нас интересует режим заведомой неустойчивости решения $q(t)$, при котором собственное колебание в контуре возрастает за счет энергии, отбираемой от генератора накачки. Это возможно, если напряжение $e_c(t)$ на емкости сфазировано относительно функции $C(t)$ так, как это показано на рис. 10.19; начальная фаза может быть либо $\xi=0$ (сплошная линия), либо $\xi=\pi$.

Подставив в (10.54) $q = A_0 e^{\mu t} \cos\omega_p t$, после несложных преобразований придем к следующему результату:

$$\mu = \frac{m}{4}\omega_p - \alpha_к \qquad (10.56)$$

и

$$q(t) = A_0 e^{(m\omega_p/4 - \alpha_к)t} \cos\omega_p t. \qquad (10.57)$$

Для нарастания амплитуды должно выполняться условие

$$m\omega_p/4 > \alpha_к \text{ или } m > 4\alpha_к/\omega_p = 2/Q = 2d.$$

Этот результат совпадает с определением критического значения m в § 10.7 [см. (10.45)].

Механизм ограничения амплитуды при параметрическом

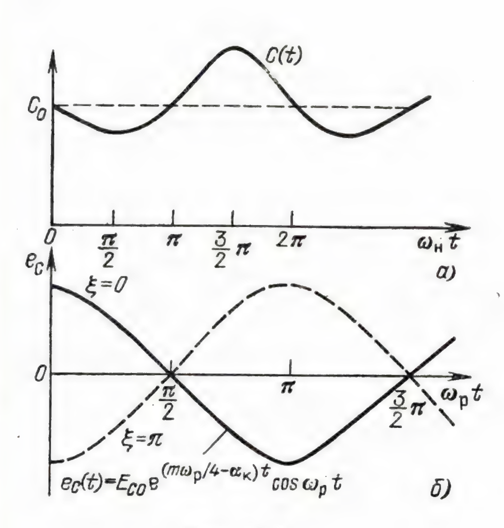


Рис. 10.19

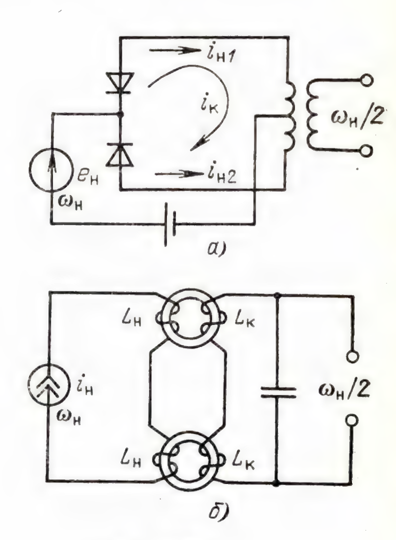


Рис. 10.20

возбуждении обусловлен заходом амплитуды колебаний на нелинейные участки характеристик емкости или индуктивности. При этом изменяются средние значения $C(t)$ или $L(t)$, а следовательно, и средняя резонансная частота контура. Расстройка контура относительно частоты $\omega_н/2$ ухудшает условия преобразования энергии накачки и приводит к ограничению амплитуды.

В настоящее время принцип параметрического возбуждения колебаний используется в специальных генераторах (параметронах), применяемых в различных устройствах для обработки дискретной информации. Это объясняется главной особенностью параметрического возбуждения — двузначностью фазы генерируемых колебаний. Так как установление фазы φ или $\varphi+\pi$ зависит от начальных условий, то, задавая в момент запуска генератора начальную фазу с помощью сигнала, можно получить одно из двух устойчивых состояний генератора, соответствующих двум знакам двоичного кода (например, фазе φ условно приписывается нуль, а фазе $\varphi+\pi$ — единица).

В емкостном параметроне (рис. 10.20, *а*) в качестве переменной емкости используются два полупроводниковых диода, а индуктивностью контура служит первичная обмотка высокочастотного трансформатора. Напряжение накачки $e_н(t)$ с частотой $\omega_н$, вдвое превышающей резонансную частоту контура, подается на диоды синфазно, благодаря чему емкости диодов уменьшаются или увеличиваются одновременно и вместе с тем исключается прохождение частоты $\omega_н$ на выход. Благодаря симметрии устраняется также прохождение колебаний частоты $\omega_н/2$, возбуждаемых в контуре, в цепь накачки. Положение рабочей точки на характеристиках *p—n*-переходов задается постоянным напряжением смещения.

В индуктивном параметроне (рис. 10.20, *б*) контур состоит из постоянной емкости и катушек $L_к$, насаженных на ферритовые сердечники, магнитная проницаемость которых периодически изменяется при пропускании тока накачки $i_н(t)$ через катушки $L_н$. Исходное положение рабочей точки на характеристике нелинейной индуктивности задается постоянным током, пропускаемым через катушки $L_н$. Встречное включение катушек $L_н$ на двух сердечниках устраняет прямое прохождение колебаний частоты $\omega_н$ на выход, а также колебаний частоты $\omega_н/2$ из контура в цепь накачки.

Следует отметить, что к параметрону термин «генератор» или «генерирование» может быть применен лишь условно. В отличие от любой электронной автоколебательной системы или генератора с посторонним возбуждением, в которых осуществляется преобразование энергии источника постоянного тока в энергию колебаний, в параметроне первичным источником энергии является генератор накачки. Назначение параметрона, используемого в качестве реле с двумя устойчивыми состояниями, не в получении колебаний, а в «запоминании» фазы сигнала.

В связи с таким информационным назначением параметрона основное значение приобретает его быстродействие, от которого зависит и быстродействие устройства, работающего на параметронах. Необходимо по возможности повысить скорость нарастания амплитуды при каждом запуске параметрона.

Так как в соответствии с формулами (10.55) и (10.56) амплитуда напряжения на контуре нарастает по закону

$$E(t)=E_{C_0}e^{(m\omega_p/4-\alpha_к)t},$$

где через E_{C_0} обозначена начальная амплитуда (т. е. амплитуда сигнала, фазу которого требуется запомнить), то время, необходимое для достижения стационарной амплитуды $E_{ст}$, можно определить выражением

$$\ln\frac{E_{ст}}{E_{C_0}}=\left(\frac{m\omega_p}{4}-\alpha_к\right)t_{max}=(m-2d)\frac{\omega_p t_{max}}{4},$$

откуда

$$t_{max}=\left(\ln\frac{E_{ст}}{E_{C_0}}\right)\Big/(m-2d)\frac{\pi}{2}f_p.$$

Приведем следующий пример. Пусть на частоте $f_p=$ $=36$ МГц (промежуточная частота приемника СВЧ) при добротности колебательного контура $Q\approx 50$ $(d=0{,}02)$ требуется обеспечить отношение $E_{ст}/E_{C_0}\approx 10^6$ (амплитуда запускающего радиоимпульса ~ 1 мкВ, стационарная амплитуда ~ 1 В).

Средняя емкость контура, включая варикап, ~ 15 пФ, $\Delta C\approx 2$ пФ, так что коэффициент модуляции емкости

$$m=\Delta C/C_0\approx 0{,}13.$$

Находим

$$t_{max}\approx\ln 10^6\Big/\left[(0{,}13-2\cdot 0{,}02)\frac{\pi}{2}\cdot 36\cdot 10^6\right]\approx 2{,}7 \text{ мкс}.$$

Это соответствует примерно 194 периодам напряжения накачки (при $f_н=2f_p=72$ МГц).

Возможности увеличения параметра m и амплитуды E_C весьма ограничены. Поэтому основным путем увеличения быстродействия является повышение частоты f_p.

Приведенные в данном параграфе соображения ограничены случаем возбуждения колебания с частотой $f_p=f_н/2$. Более детальный анализ явлений в контуре с периодической (гармонической) накачкой, основанный на теории дифференциального уравнения Матье, указывает на возможность возбуждения колебаний с частотами $f=(n/2)f_н$, $n=1, 2, 3 \ldots$

Глава 11. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

11.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При анализе помехоустойчивости радиосистем особенно часто приходится рассматривать линейную сумму полезного сигнала $s(t)$ и шумовой помехи $n(t)$

$$y(t)=s(t)+n(t). \tag{11.1}$$

В этом случае помеха называется *аддитивной*, а $y(t)$ — аддитивной смесью сигнала и шума. Примерами аддитивной помехи являются рассмотренные в гл. 7 дробовый и тепловой шумы, возникающие в электронных приборах и электрических цепях независимо от действующих в них сигналов.

Однако при передаче сигнала по реальному каналу связи помимо аддитивной помехи есть и другие факторы, которые искажают сигнал, например паразитные изменения во времени параметров цепей или любых других элементов канала связи. В самом простом случае, когда эти изменения имеют характер АМ, сигнал на выходе канала связи можно представить в виде

$$s_{\text{вых}}(t)=K(t)s(t)+n(t).$$

В этом выражении $n(t)$, как и в (11.1), — аддитивная помеха, а $K(t)$ — коэффициент, характеризующий *мультипликативную* помеху. В реальных условиях механизм образования мультипликативной помехи более сложен и не всегда может быть сведен к простому перемножению помехи и сигнала. Несмотря на это обычно под мультипликативной подразумевают помеху, являющуюся результатом нежелательного изменения параметров линейной системы, через которую передается сигнал.

В следующих параграфах данной главы сначала изучается воздействие гауссовского, в основном узкополосного, шума на нелинейные устройства: амплитудный и частотный детекторы. Затем в § 11.7 рассматриваются воздействие случайных процессов на параметрические цепи и влияние мультипликативной помехи на передачу сигналов.

11.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Реальное нелинейное устройство представляет собой сочетание нелинейных безынерционных элементов с линейными инерционными электрическими цепями. Это очень усложняет опре-

деление статистических характеристик сигнала и шума на выходе всего устройства. Для линейных цепей просто определить корреляционную (или спектральную) функцию, но очень сложно — закон распределения. В нелинейных же, но безынерционных элементах, наоборот, основная трудность состоит в нахождении корреляционной функции. Поэтому общих методов анализа преобразования случайных процессов в нелинейных устройствах не существует. Приходится ограничиваться некоторыми частными задачами, представляющими практический интерес и поддающимися решению, а также прибегать к различным идеализациям характеристик изучаемой модели устройства.

Пусть на нелинейный элемент действует случайное колебание (напряжение, ток) с заданной плотностью вероятности $p(x)$. Требуется найти плотность вероятности $p(y)$ выходной величины y. Связь между y и x определяется нелинейной зависимостью $y=f(x)$, имеющей смысл, например, вольтамперной характеристики электронного, полупроводникового или иного активного элемента.

Если $f(x)$ определяет однозначное соответствие между x и y в каждый рассматриваемый момент независимо от значений x в предыдущие моменты времени (безынерционный элемент), то плотность вероятности находится из очевидного соотношения

$$p(y)\,dy=p(x)\,dx, \tag{11.2}$$

откуда с учетом неотрицательности $p(x)$ и $p(y)$

$$p(y)=p(x)/|dy/dx|. \tag{11.3}$$

Если обратная функция $x=\varphi(y)$ неоднозначна, то

$$p(y)=\left[\frac{p(x)}{|dy/dx|}\right]_{x=\varphi_{I}(y)}+\left[\frac{p(x)}{|dy/dx|}\right]_{x=\varphi_{II}(y)}+\ldots, \tag{11.4}$$

где $\varphi_{I}(y)$, $\varphi_{II}(y)$ — значения x на соответствующих ветвях неоднозначной функции $\varphi(y)$.

Если характеристика $y=f(x)$ постоянна на некотором интервале изменения x, то выражение (11.3) следует дополнить слагаемым с дельта-функцией, учитывающим интегральную вероятность пребывания x ниже (или выше) определенного уровня.

Нахождение $p(y)$ проще всего пояснить на практических примерах. Ограничимся случаем, когда $p(x)$ соответствует нормальному распределению.

1. Воздействие гауссовского случайного процесса $x(t)$ на элемент с симметричной квадратичной характеристикой (рис. 11.1). Показанную на рис. 11.1 вольт-амперную характеристику можно реализовать, например, с помощью двухтактного включения двух диодов с квадратичными характеристиками (рис. 11.2).

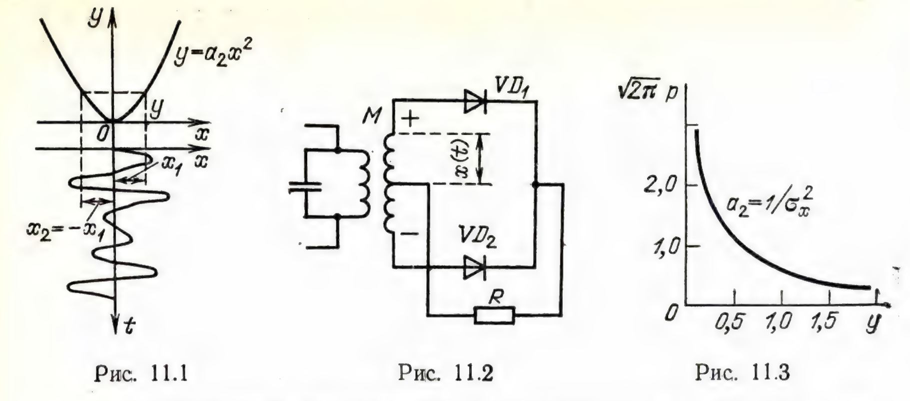


Рис. 11.1 Рис. 11.2 Рис. 11.3

При полярности напряжения, обозначенной на рис. 11.2, ток, равный a_2x^2, проходит через диод VD_1, при противоположной полярности — через диод VD_2.

Полагая $y=a_2x^2$, $dy/dx=2a_2x$ и учитывая, что какому-либо фиксированному значению y соответствуют два значения x, а именно $x_1=+\sqrt{y/a_2}$ и $x_2=-\sqrt{y/a_2}$, по формуле (11.4) находим

$$p(y)=\begin{cases} p(+\sqrt{y/a_2})/2a_2\sqrt{y/a_2}+ \\ \quad +p(-\sqrt{y/a_2})/2a_2\sqrt{y/a_2} & \text{при } y>0, \\ 0 & \text{при } y<0. \end{cases} \qquad (11.5)$$

Подставляя $x_{1,2}^2=y/a_2$ в выражение для плотности вероятности $p(x)$

$$p(x_{1,2})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,e^{-x_{1,2}^2/2\sigma_x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,e^{-y/2a_2\sigma_x^2},$$

получаем окончательно

$$p(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{a_2}}\dfrac{e^{-y/2a_2\sigma_x^2}}{\sqrt{y}} & \text{при } y\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } y<0. \end{cases} \qquad (11.6)$$

График этого распределения изображен на рис. 11.3.

2. Воздействие гауссовского процесса на однополупериодный детектор с линейно-ломаной характеристикой (рис. 11.4). В данном случае

$$y=\begin{cases} a_1x & \text{при } x\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Очевидно, что в соответствии с (11.3)

$$p(y)=\frac{p(x=y/a_1)}{a_1}=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,a_1\sigma_x}\,e^{-y^2/2\sigma_x^2a_1^2} & \text{при } y>0, \\ 0 & \text{при } y<0. \end{cases}$$

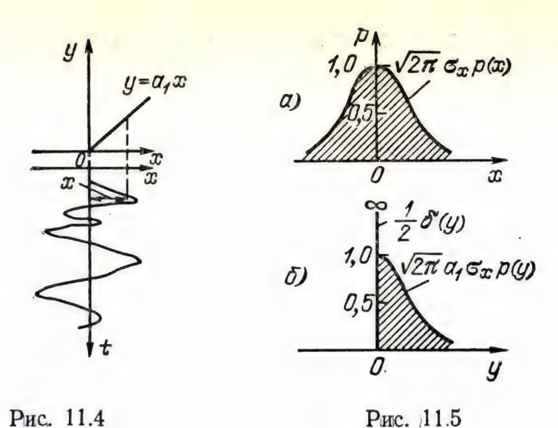


Рис. 11.4 Рис. 11.5

Особое внимание следует обратить на поведение функции $p(y)$ в точке $y=0$. Так как $y=0$ при любых отрицательных значениях x, вероятность $P(y=0)$ равна вероятности того, что $x \leqslant 0$. Но вероятность $P(x \leqslant 0)=1/2$. Отсюда вытекает, что плотность вероятности $p(y=0)=\infty$. Это обстоятельство можно учесть, записав выражение для $p(y)$ в форме

$$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta(y)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a_1\sigma_x}\,e^{-y^2/2a_1^2\sigma_x^2} & \text{при } y \geqslant 0,\\ 0 & \text{при } y<0.\end{cases} \tag{11.7}$$

Слагаемое $^1/_2\delta(y)$ равно нулю всюду, кроме точки $y=0$, где оно обращается в бесконечность. При интегрировании же по y это слагаемое дает 1/2. Графики $p(x)$ и $p(y)$ изображены на рис. 11.5.

3. Воздействие гауссовского процесса на ограничитель (рис. 11.6).

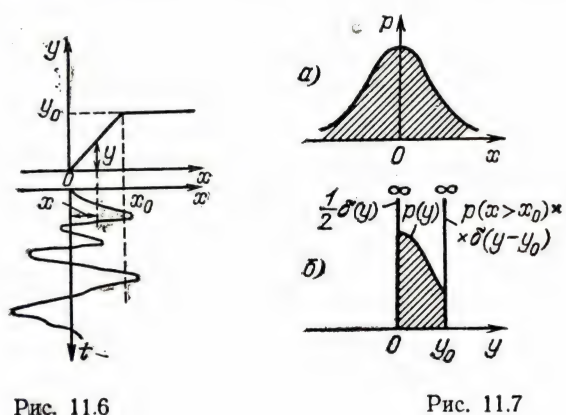


Рис. 11.6 Рис. 11.7

По аналогии с предыдущим случаем нетрудно составить выражение

$$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta(y)+\frac{1}{a_1\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,e^{-y^2/2a_1^2\sigma_x^2}+ & \\ \quad +P(x>x_0)\,\delta(y-y_0) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant y_0,\\ 0 & \text{при } y<0 \text{ и } y>y_0.\end{cases} \tag{11.8}$$

Графики распределения x и y изображены на рис. 11.7.

Приведенных примеров достаточно для уяснения метода определения плотности вероятности случайной величины на выходе нелинейного безынерционного элемента с любой вольтамперной характеристикой. Простота этого метода обусловлена тем, что не учитывается влияние выходных цепей (инерционных) на работу рассматриваемого нелинейного элемента.

11.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В БЕЗЫНЕРЦИОННОМ НЕЛИНЕЙНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Прямое определение энергетического спектра выходного процесса по известному спектру на входе нелинейного элемента не представляется возможным. Единственный путь — определение корреляционной функции с последующим применением преобразования Фурье.

Если на входе нелинейного элемента с характеристикой $y=f(x)$ действует стационарный процесс $x(t)$, то ковариационная функция на выходе может быть представлена в форме

$$K_y(\tau)=M(y_t y_{t+\tau})=M[f(x_t)f(x_{t+\tau})], \tag{11.9}$$

где x_t и $x_{t+\tau}$ — значения $x(t)$ в моменты времени t и $t+\tau$; y_t и $y_{t+\tau}$ — соответствующие им значения y на выходе нелинейного элемента.

Для усреднения произведения $f(x_t)f(x_{t+\tau})$ должна быть известна двумерная плотность вероятности входного процесса $p(x_t,\ x_{t+\tau})$. Если эта плотность вероятности известна, то ковариационную функцию можно представить в виде выражения

$$K_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\,f(x_2)\,p(x_1,\ x_2)\,dx_1dx_2, \tag{11.10}$$

где для удобства записи через x_1 и x_2 обозначены соответственно x_t, $x_{t+\tau}$.

Этот интеграл удается вычислить далеко не во всех практически важных задачах. В связи с этим часто приходится прибегать к различным обходным способам, один из которых будет приведен далее.

В качестве примера задачи, достаточно интересной для практики и доступной для решения прямым методом, рассмотрим воздействие стационарного гауссовского процесса $x(t)$ на нелинейный элемент с квадратичной характеристикой $y=a_2x^2$ (см. § 11.2, п.1).

Двумерная плотность вероятности процесса $x(t)$ равна[1]

$$p(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2-2rx_1x_2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right], \qquad (11.11)$$

где r — коэффициент корреляции величин x_1 и x_2, т. е. $r=r_x(\tau)$.

Подставив выражение (11.11), а также $f(x)=a_2x^2$ в (11.10), получим

$$K_y(\tau)=\frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^2x_2^2\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2-2rx_1x_2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right]dx_1dx_2=$$

$$=\frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^2\exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right]\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_2^2\exp\left[-\frac{x_2^2-2rx_1x_2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right]dx_2\right\}dx_1. \qquad (11.12)$$

Интеграл в фигурных скобках легко вычислить, дополнив выражение $x_2^2-2rx_1x_2$ до квадрата разности $x_2^2-2rx_1x_2=$ $=(x_2-rx_1)^2-r^2x_1^2$ и заменив переменную $x_2-rx_1=z$:

$$\exp\left[\frac{r^2x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty}(z^2+2rx_1z+r^2x_1^2)\,e^{-z^2/2\sigma_x^2(1-r^2)}dz=$$

$$=\exp\left[\frac{r^2x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right]\left[\sqrt{2\pi}\,\sigma_x^3(1-r^2)^{3/2}+0+\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r^2}r^2x_1^2\right].$$

Подставляя этот результат в (11.12), получаем

$$K_y(\tau)=\frac{a_2^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\left[\sigma_x^2(1-r^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^2e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}dx_1+\right.$$

$$\left.+r^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^4e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}dx_1\right].$$

Далее определяем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^2e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}dx_1=\sqrt{2\pi}\sigma_x^3, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^4e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}dx_1=\sqrt{2\pi}3\sigma_x^5.$$

---

[1] См., например, [6, 7].

Таким образом,

$$K_y(\tau)=a_2{}^2\sigma_x^4\,[(1-r^2)+3r^2]=a_2{}^2\sigma_x^4+2a_2{}^2\sigma_x^4 r_x^3\,(\tau)=$$
$$=a_2^2\alpha_x^4+2a_2{}^2R_x^3\,(\tau). \qquad (11.13)$$

Здесь использовано известное соотношение $r_x(\tau)=R_x(\tau)/\sigma_x{}^2$ [при $M(x)=0$].

Особый интерес представляет воздействие узкополосного случайного процесса на нелинейный элемент (задача детектирования).

Представляя корреляционную функцию узкополосного процесса в форме (4.76) и учитывая, что

$$R_x^2\,(\tau)=\sigma_x^4 r_0{}^2(\tau)[{}^1/_2+{}^1/_2\cos 2\omega_0\tau], \qquad (11.14)$$

где r_0 — огибающая корреляционной функции узкополосного процесса, записываем выражение (11.13) в окончательном виде

$$K_y(\tau)=a_2{}^2\sigma_x^4+a_2{}^2\sigma_x^4 r_0{}^2(\tau)+a_2{}^2\sigma_x^4 r_0{}^2(\tau)\cos 2\omega_0\tau. \qquad (11.15)$$

Применяя затем преобразование Фурье, получаем общее выражение для спектра процесса на выходе квадратичного элемента (при гауссовском процессе на входе)

$$W_y(\omega)=a_2{}^2\sigma_x^4 2\pi\delta(\omega)+a_2{}^2\sigma_x^4\int_{-\infty}^{\infty} r_0{}^2(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau+$$
$$+a_2{}^2\sigma_x^4\int_{-\infty}^{\infty} r_0{}^2(\tau)\cos(2\omega_0\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau=$$
$$=W_{y0}(\omega)+W_{\text{нч}}(\omega)+W_{\text{вч}}(\omega). \qquad (11.16)$$

Первое слагаемое (дискретное) соответствует постоянной составляющей выходного колебания, второе — низкочастотной флуктуационной составляющей (спектр которой примыкает к нулевой частоте) и третье — высокочастотной флуктуационной составляющей со спектром, группирующимся вблизи частоты $2\omega_0$.

11.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ УЗКОПОЛОСНОГО ШУМА НА АМПЛИТУДНЫЙ ДЕТЕКТОР

Амплитудный детектор, содержащий диод и фильтр нижних частот (RC-цепь), представляет собой сочетание безынерционного нелинейного элемента с инерционной линейной цепью.

Разделим рассматриваемое устройство на две самостоятельные части: 1) нелинейный элемент; 2) фильтр нижних частот.

Изложенные в предыдущих параграфах методы, а также некоторые другие специальные приемы позволяют в принципе найти закон распределения и корреляционную функцию шума сначала на выходе нелинейного элемента (диода), а затем и

на выходе фильтра. В общем случае эти исследования требуют весьма громоздких вычислений. Задачу можно значительно облегчить, если использовать некоторые упрощения, вытекающие из принципа работы реальных устройств.

Рассмотрим сначала «линейное» детектирование, т. е. детектирование высокочастотного колебания с достаточно большими амплитудами. В данном случае под таким колебанием подразумевается гауссовский шум (в отсутствие сигнала), сформированный избирательными цепями на входе детектора. Как и при детектировании полезного амплитудно-модулированного колебания, можно считать, что напряжение на выходе линейного детектора воспроизводит огибающую амплитуд высокочастотного колебания, в данном случае огибающую шума. Поэтому при линейном детектировании нет необходимости рассматривать отдельно статистические характеристики тока диода и напряжения на выходе RC-цепи. Напряжение $u_{\text{вых}}(t)$, развиваемое на этой цепи, можно приравнять огибающей шума на входе детектора $U(t)$ (т. е. считать, что коэффициент передачи детектора равен единице). При таком подходе статистические характеристики шума на выходе детектора полностью совпадают с приведенными в § 4.6 характеристиками огибающей $A(t)$. Таким образом, приходим к выводу, что напряжение шума на выходе линейного детектора обладает рэлеевским распределением

$$p(u_{\text{вых}}) = p(A) = \frac{u_{\text{вых}}}{\sigma_x^2} e^{-u_{\text{вых}}^2/2\sigma_x^2}, \quad 0 < u_{\text{вых}} < \infty. \tag{11.17}$$

По формулам (4.71), (4.72) находим:

среднее значение (постоянную составляющую) шумового напряжения

$$U_0 = M[u_{\text{вых}}(t)] = M[A(t)] = \sqrt{\pi/2}\sigma_x = 1{,}26\sigma_x, \tag{11.18}$$

средний квадрат напряжения

$$M[u^2_{\text{вых}}(t)] = 2\sigma_x^2. \tag{11.19}$$

Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе линейного детектора

$$\sigma^2_{\text{вых}} = M(u^2_{\text{вых}}) - U_0{}^2 = 2\sigma_x^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 = 0{,}43\sigma_x^2. \tag{11.20}$$

Итак, основные параметры шума на выходе — постоянная составляющая U_0 и дисперсия $\sigma^2_{\text{вых}}$ — просто выражаются через дисперсию $\sigma_x{}^2$ высокочастотного шума, действующего на входе детектора.

Корреляционную функцию и энергетический спектр выходного шума нетрудно вычислить по формулам (4.77), (4.78).

В качестве примера рассмотрим воздействие на линейный детектор шума $x(t)$, спектр которого определяется выражением

$$W_x(\omega) = N_0[e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2}]. \tag{11.21}$$

а корреляционная функция в соответствии с (4.39) и с учетом [5, формулы (3.896.3) и (3.896.4)]

$$R_x(\tau) = N_0 \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2} e^{i\omega\tau} d\omega\right] =$$

$$= \frac{N_0}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\tau^2/4\alpha} \cos\omega_0\tau = \sigma_x^2 e^{-\tau^2/4\alpha} \cos\omega_0\tau. \qquad (11.22)$$

Тогда

$$r_0(\tau) = e^{-\tau^2/4\alpha} \qquad (11.23)$$

и в соответствии с (4.78)

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2\alpha} e^{-\Omega\tau} d\tau\right] =$$

$$= \frac{\pi\sigma_x^2}{4}\left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi\alpha}\, e^{-\alpha\Omega^2/2}\right]. \qquad (11.24)$$

Слагаемое с дельта-функцией соответствует постоянной составляющей напряжения на выходе детектора.

График $W_{\text{вых}}(\Omega)$ изображен на рис. 11.8, *б*. Ширина этого спектра в $\sqrt{2}$ раз больше ширины спектра $W_x(\omega)$ на входе детектора (рис. 11.8, *а*).

Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания независимо от особенностей структуры его спектра. Полученный результат свидетельствует о том, что огибающая каждой из реализаций рассматриваемого шума (на входе детектора) обладает более широким спектром, чем частотная полоса самой реализации. На первый взгляд это может показаться странным, поскольку известно, что для модулированного колебания ширина спектра огибающей либо совпадает с шириной спектра самого колебания (при АМ), либо у́же его (при ЧМ). Это кажущееся противоречие легко устраняется, если принять во внимание полную корреляцию между колебаниями нижних и верхних боковых частот при модуляции. Достаточно нарушить, например, симметрию амплитуд или фаз боковых частот при АМ, чтобы сумма трех колебаний с частотами ω_0, $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$ представляла собой колебание, огибающая которого содержит помимо частоты Ω еще и частоты 2Ω, 3Ω и т. д. В этом случае амплитудный детектор выделит на выходе колебание, спектр которого будет шире полосы частот вы-

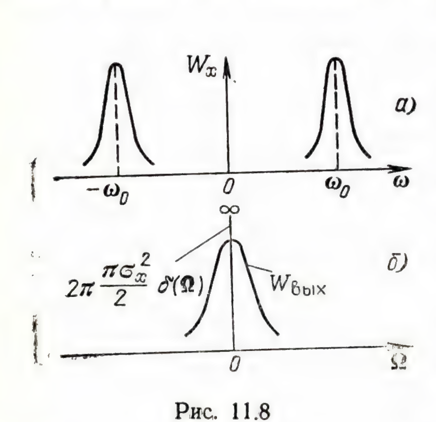


Рис. 11.8

сокочастотного колебания на входе. В спектре же шума нет никакой корреляции (и тем более симметрии) между спектральными составляющими, частоты которых расположены слева и справа от центральной частоты ω_0. Естественно, что огибающая каждой из реализаций шума обладает более широким спектром, чем модулированное колебание с той же шириной спектра. Соответственно увеличивается и средняя ширина спектра огибающей шума, т. е. спектр огибающей.

Рассмотрим теперь воздействие гауссовского шума на квадратичный детектор. В данном случае напряжение на выходе детектора с учетом отфильтровывания высокочастотной составляющей шума по аналогии с выражением (8.46) можно представить в форме

$$u_{\text{вых}}(t) = KA^2(t)/2, \tag{11.25}$$

где K — коэффициент, учитывающий параметр вольт-амперной характеристики диода a_2 и сопротивление нагрузки на выходе детектора.

По формуле (11.3), в которой под $p(x)$ следует подразумевать плотность вероятности огибающей $A(t)$, находим закон распределения шумового напряжения на выходе квадратичного детектора

$$p(u_{\text{вых}}) = p\left(K\frac{A^2}{2}\right) = \frac{p(A)}{\left|\dfrac{du_{\text{вых}}}{dA}\right|} = \frac{A}{\sigma_x^2}\,e^{-A^2/2\sigma_x^2}\frac{1}{KA} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma_x^2}\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}. \tag{11.26}$$

Итак, при воздействии на квадратичный детектор с фильтром нижних частот узкополосного гауссовского процесса шум на выходе всего устройства имеет экспоненциальное распределение.

Вычислим среднее значение выходного напряжения

$$M[u_{\text{вых}}(t)] = \int_0^\infty u_{\text{вых}}\,p(u_{\text{вых}})\,du_{\text{вых}} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma_x^2}\int_0^\infty u_{\text{вых}}\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}du_{\text{вых}} = K\sigma_x^2, \tag{11.27}$$

а также средний квадрат напряжения

$$M[u_{\text{вых}}^2(t)] = \int_0^\infty u_{\text{вых}}^2\,p(u_{\text{вых}})\,du_{\text{вых}} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma_x^2}\int_0^\infty u_{\text{вых}}^2\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}du_{\text{вых}} = 2K^2\sigma_x^4. \tag{11.28}$$

Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе

$$\sigma^2_{\text{вых}} = M[u^2_{\text{вых}}(t)] - \{M[u_{\text{вых}}(t)]\}^2 = 2K^2\sigma_x^4 - K^2\sigma_x^4 = \\ = K^2\sigma_x^4. \qquad (11.29)$$

Для полного описания свойств шума на выходе квадратичного детектора остается вычислить его корреляционную функцию и энергетический спектр. Это можно выполнить с помощью формул (11.15), (11.16). Второе слагаемое в (11.15) определяет искомую корреляционную функцию, а второе слагаемое в (11.16) — соответствующий этой функции спектр.

При $r_0(\tau) = e^{-\tau^2/4\alpha}$ (см. предыдущий пример) получаем

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = W_{y0}(\Omega) + W_{\text{нч}}(\Omega) = a_2{}^2\sigma_x^4 \Big[2\pi\delta(\Omega) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2\alpha} e^{-i\Omega\tau} d\tau\Big] = a_2{}^2\sigma_x^4 [2\pi\delta(\Omega) + \sqrt{2\pi\alpha}\, e^{-\alpha\Omega^2/2}]. \qquad (11.30)$$

Графики функций $W_x(\omega)$ и $W_{\text{вых}}(\Omega)$ по форме совпадают с графиками на рис. 11.8. Они отличаются только масштабом по оси ординат из-за различия в постоянных коэффициентах [$a_2{}^2\sigma_x^4$ вместо $\pi\sigma_x^2/2$ перед квадратными скобками в (11.24) и единица вместо 1/4 перед вторым слагаемым].

11.5. СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ГАУССОВСКОГО ШУМА НА АМПЛИТУДНЫЙ ДЕТЕКТОР

При наложении узкополосного шума $x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ на сигнал $s(t) = E\cos\omega_0 t$ суммарное колебание

$$u(t) = s(t) + x(t) = E\cos\omega_0 t + A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = \\ = [E + A(t)\cos\theta]\cos\omega_0 t - A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0 t = U(t)\cos[\omega_0 t + \\ + \xi(t)]. \qquad (11.31)$$

Огибающая $U(t)$ и фаза $\xi(t)$ по аналогии с (8.34) и (8.35) определяются выражениями

$$U(t) = \sqrt{E^2 + A^2(t) + 2EA(t)\cos\theta(t)}, \qquad (11.32)$$

$$\xi(t) = \operatorname{arctg}\frac{A(t)\sin\theta(t)}{E + A(t)\cos\theta(t)}. \qquad (11.33)$$

При анализе воздействия колебания на амплитудный детектор статистическими характеристиками фазы $\xi(t)$ можно не интересоваться (этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе применительно к частотному детектору). Основное значение имеет плотность вероятности $p(U)$ огибающей U, определяемая по формуле [6, 7]

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-(U^2+E^2)/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right), \qquad (11.34)$$

где I_0 — бесселева функция комплексного аргумента (модифицированная).

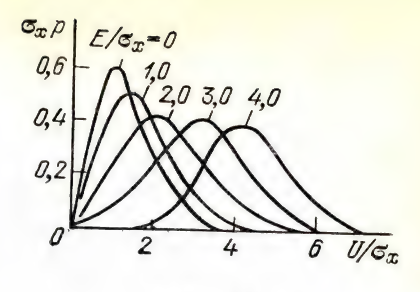


Рис. 11.9

Определяемая формулой (11.34) функция называется обобщенной функцией Рэлея. Графики функции $p(U)$ для нескольких значений E/σ_x приведены на рис. 11.9. При $E/\sigma_x=0$ (отсутствие сигнала) выражение (11.34) переходит в (4.70). В другом крайнем случае, когда амплитуда сигнала E очень велика по сравнению с σ_x, кривая $p(U)$ близка к гауссовской кривой с дисперсией σ_x^2 и средним значением, равным E.

Рассмотрим сначала линейное детектирование. Будем считать, что напряжение на выходе детектора совпадает с огибающей амплитуд высокочастотного напряжения на входе. Тогда, основываясь на формуле (11.34), находим постоянную составляющую напряжения на выходе детектора

$$U_0=M(U)=\int_0^\infty U p(U)\,dU=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}e^{-E^2/2\sigma_x^2}\int_0^\infty U^2 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right)dU$$

и средний квадрат напряжения

$$M[U^2(t)]=\int_0^\infty U^2 p(U)\,dU=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}e^{-E^2/2\sigma_x^2}\int_0^\infty U^3 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right)dU.$$

После вычисления интегралов [8] получаем следующие выражения:

$$U_0=\sigma_x\sqrt{\pi/2}\{I_0(E^2/4\sigma_x^2)+E^2/2\sigma_x^2[I_0(E^2/4\sigma_x^2)+$$

$$+I_1(E^2/4\sigma_x^2)]\}e^{-E^2/4\sigma_x^2}=\sigma_x\sqrt{\pi/2}\{I_0(h^2/2)+$$

$$+h^2[I_0(h^2/2)+I_1(h^2/2)]\}e^{-h^2/2}, \qquad (11.35)$$

где $h^2=E^2/2\sigma_x^2$;

$$M[U^2(t)]=2\sigma_x^2+E^2. \qquad (11.36)$$

Из последнего выражения вытекает равенство

$$\sigma^2_{вых}=M[U^2(t)]-U_0^2=2\sigma_x^2+E^2-U_0^2. \qquad (11.37)$$

Ранее было показано, что в отсутствие сигнала ($E=0$) постоянная составляющая шума на выходе линейного детектора равна $\sqrt{\pi/2}\sigma_x$ [см. (11.18)].

Приращение постоянной составляющей $U_0-\sqrt{\pi/2}\sigma_x$, где U_0 определяется выражением (11.35), и есть полезный сигнал.

Следовательно, отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе линейного детектора

$$(С/П)_{вых}=(U_0-\sqrt{\pi/2}\sigma_x)^2/(2\sigma_x^2+E^2-U_0^2). \qquad (11.38)$$

Рассмотрим предельные случаи $h^2\ll 1$ (слабый сигнал) и $h^2\gg 1$ (сильный сигнал).

1. $h^2\ll 1$, $I_0(h^2/2)\approx 1$, $I_1(h^2/2)\approx h^2/4$, $e^{-h/2}\approx 1-h^2/2$.

Выражение (11.35) упрощается:

$$U_0\approx\sqrt{\pi/2}\sigma_x\{1+h^2(1+h^2/4)\}e^{-h^2/2}\approx\sqrt{\pi/2}\sigma_x(1+h^2/2).$$

При этом приращение постоянной составляющей

$$U_0=\sqrt{\pi/2}\sigma_x\approx\sqrt{\pi/2}\sigma_x h^2/2,$$

а дисперсия в соответствии с (11.36)

$$\sigma^2_{вых}=2\sigma_x^2+E^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2_x(1+h^2/2)^2\approx\sigma^2_x\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{С}{П}\right)_{вых}=\left(\frac{\pi}{2}\sigma_x^2\frac{h^4}{4}\right)\Big/(2-\pi/2)\sigma_x^2=dh^4=d\left(\frac{С}{П}\right)^2_{вх}, \qquad (11.39)$$

где d — постоянный коэффициент, близкий к единице.

Выражение (11.39) показывает, что в амплитудном детекторе имеет место подавление слабого сигнала сильной помехой. Например, при $(С/П)_{вх}=0{,}1$ $(С/П)_{вых}\approx 0{,}01$.

Рассматриваемый вопрос имеет важное значение для проблемы обнаружения сигналов на фоне сильной помехи.

2. $h^2\gg 1$, функции $I_0(h^2/2)$ и $I_1(h^2/2)$ можно определять выражениями

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right)\approx\frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}h}\left(1+\frac{1}{4h^2}\right),\quad I_1\left(\frac{h^2}{2}\right)\approx\frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}h}\left(1-\frac{3}{4h^2}\right).$$

Выражение (11.35) при указанных приближениях приводится к виду

$$U_0\approx\sqrt{2}\sigma_x h(1+1/4h^2)=E(1+1/4h^2)\approx E.$$

Как и следовало ожидать, при $E\gg\sigma_x$ постоянная составляющая выходного напряжения U_0 почти совпадает[1] с E.

---

[1] См., например, кривую $E/\sigma_x=4$ на рис. 11.9 и комментарий к рисунку на с. 295.

При вычислении же дисперсии $\sigma^2_{вых}$ необходимо учитывать слагаемое $1/4h^2$ в выражении

$$U_0^2=E^2(1+1/4h^2)^2\approx E^2(1+1/2h^2)=E^2+\sigma_x^2.$$

Таким образом,

$$\sigma^2_{вых}=2\sigma_x^2+E^2-(E^2+\sigma_x^2)=\sigma_x^2$$

и отношение сигнал-помеха на выходе

$$(С/П)_{вых}\approx U_0^2/\sigma^2_{вых}\approx E^2/\sigma_x^2=2\ (С/П)_{вх}. \quad (11.40)$$

Проведем аналогичное рассмотрение для квадратичного детектирования.

Заменяя в формуле (11.25) $A(t)$ на $U(t)$, получаем напряжение на выходе квадратичного детектора

$$u_{вых}(t)=K[E^2/2+A^2(t)/2+EA(t)\cos\theta(t)]. \quad (11.41)$$

Усредняя это выражение по времени и учитывая, что $\overline{A^2(t)}=2\sigma_x^2$ и $\overline{A(t)\cos\theta(t)}=0$ (как и среднее значение $\overline{x(t)}=\overline{A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]}$), получаем постоянную составляющую напряжения на выходе квадратичного детектора

$$\overline{u_{вых}(t)}=K(E^2/2+\sigma_x^2)=U_{ос}+U_{оп}. \quad (11.42)$$

Слагаемое $U_{оп}=K\sigma_x^2$ определяет постоянную составляющую, обусловленную помехой [см. (11.27)] в отсутствие сигнала. Слагаемое же $U_{ос}=KE^2/2$, представляющее собой приращение постоянной составляющей под действием гармонического напряжения сигнала, можно рассматривать как полезный сигнал на выходе детектора.

Возводя выражение (11.41) в квадрат, получаем

$$u^2_{вых}(t)=K^2\left[\frac{E^2}{2}+\frac{A^2(t)}{2}+EA(t)\cos\theta(t)\right]^2=$$

$$=K^2\left[\frac{E^4}{4}+\frac{A^4(t)}{4}+E^2A^2(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta(t)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{E^2A^2(t)}{2}+E^3A(t)\cos\theta(t)+A^3(t)E\cos\theta(t)\right]. \quad (11.43)$$

Слагаемые с $\cos\theta(t)$ и $\cos 2\theta(t)$ при усреднении обращаются в нуль. Поэтому средняя мощность на выходе[1]

$$\overline{u^2_{вых}(t)}=K^2\left[\frac{E^4}{4}+\frac{1}{4}\overline{A^4(t)}+E^2\overline{A^2(t)}\right]=$$

$$=K^2\left(\frac{E^4}{4}+2\sigma_x^4+2E^2\sigma_x^2\right).$$

---

[1] При усреднении $A^4(t)$

$$M[A^4(t)]=\int_0^\infty A^4 p(A)\,dA=8\sigma_x^4.$$

Вследствие эргодичности рассматриваемого процесса в данном параграфе не делается различия между усреднением по множеству и по времени.

Вычитая из этого выражения $(\overline{u_{\text{вых}}})^2$, находим дисперсию шума на выходе квадратичного детектора

$$\sigma^2_{\text{вых}} = K^2(E^4/4 + 2\sigma_x^4 + 2E^2\sigma_x^2) - K^2(E^4/4 + E^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4) =$$
$$= K^2(E^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4). \qquad (11.44)$$

При $E=0$ это выражение переходит в (11.29). Составим теперь отношение сигнал-помеха на выходе детектора (по мощности)

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)_{\text{вых}} = \frac{U^2_{\text{ос}}}{\sigma^2_{\text{вых}}} = \frac{K^2(E^4/4)}{K^2(E^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4)} = \frac{(E^2/2\sigma_x^2)^2}{1 + 2E^2/2\sigma_x^2}. \qquad (11.45)$$

Но $E^2/2\sigma_x^2$ есть отношение сигнал-помеха (по мощности) на входе детектора. Таким образом, при значениях $(\text{С/П})_{\text{вх}} \ll 1$ (т. е. при $E^2/2 \ll \sigma_x^2$

$$(\text{С/П})_{\text{вых}} \approx (\text{С/П})^2_{\text{вх}}, \qquad (11.46)$$

а при больших значениях $(\text{С/П})_{\text{вх}}$, т. е. при $E^2/2 \gg \sigma_x^2$.

$$(\text{С/П})_{\text{вых}} \approx {}^1/_2 (\text{С/П})_{\text{вх}}. \qquad (11.47)$$

Так, при $E^2/2\sigma_x^2 = 1/10$ отношение $(\text{С/П}_{\text{вых}}) = 1/120$ [(11.45)], а при $E^2/2\sigma_x^2 \geqslant 4$ отношение $(\text{С/П})_{\text{вых}}$ близко к половине отношения сигнала к помехе на входе.

На основании формулы (11.45) можно сделать следующее важное заключение: при слабом (относительно помехи) сигнале в квадратичном детекторе имеет место подавление сигнала, а при сильном сигнале отношение сигнал-помеха пропорционально отношению сигнала к помехе на входе.

Сопоставим результаты, полученные для квадратичного и линейного детектирования. Сравнение формул (11.46) и (11.39) показывает, что при слабом сигнале и сильной помехе линейный и квадратичный детекторы ведут себя одинаково: отношение сигнал-помеха на выходе пропорционально квадрату отношения сигнал-помеха на входе. Таким образом, и в линейном детекторе имеет место подавление слабого сигнала. Анализ показывает, что это свойство присуще детекторам и с любыми другими вольт-амперными характеристиками.

Однако при $E \gg \sigma_x$ отношение сигнал-помеха на выходе квадратичного детектора в 4 раза (по мощности) меньше, чем у линейного [ср. (11.47) и (11.40)]. Это объясняется тем, что при квадратичном детектировании сильный сигнал выносит помеху на участок характеристики с повышенной крутизной, что приводит к относительному увеличению помехи. Действительно, пусть огибающая амплитуд входного напряжения, равная 1 В, получила приращение в результате наложения помехи $a \ll 1$. Тогда напряжение на выходе квадратичного детектора в соответствии с (11.25) увеличится от $K/2$ до $(K/2)(1+a)^2 \approx (K/2)(1+2a)$, т. е. относительное приращение (помехи) будет $2a$, а при ли-

нейном детектировании это приращение будет всего лишь a. Переходя от напряжения к мощности, получаем проигрыш в 4 раза.

Хотя проведенное рассмотрение относится к гармоническому (немодулированному) сигналу, полученные выводы можно полностью распространить на обработку прямоугольных импульсных радиосигналов на фоне помех, когда импульс на выходе детектора есть приращение постоянной составляющей выпрямленного напряжения в промежутке времени, равном длительности импульса.

Наличие амплитудной модуляции сигнала, которую можно рассматривать как медленное изменение постоянной составляющей напряжения на выходе детектора, также не оказывает существенного влияния на сравнительную оценку $(С/П)_{вых}$ при квадратичном и линейном детектировании.

Следует, наконец, отметить, что все полученные в этом параграфе результаты не зависят от соотношения между несущей частотой сигнала ω_0 и мгновенной частотой помехи $\omega_0+d\theta/dt$. Из этого следует, что наложение паразитной частотной или фазовой модуляции на сигнал (при постоянной амплитуде) не оказывает влияния на отношение сигнал-помеха на выходе детектора. Это положение согласуется с основными свойствами амплитудного детектора, установленными в гл. 8.

11.6. СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ГАУССОВСКОГО ШУМА НА ЧАСТОТНЫЙ ДЕТЕКТОР

Основываясь на рассмотренном в § 8.10 принципе работы частотного детектора, в дальнейшем будем исходить из структурной схемы, показанной на рис. 11.10. Сигнал $s(t)$ на входе резонансного амплитудного ограничителя представляет собой ЧМ колебание (имеется в виду тональная модуляция частоты)

$$s(t)=E\cos\left(\omega_0 t+\frac{\omega_д}{\Omega}\sin\Omega t\right), \tag{11.48}$$

а помеха — гауссовский процесс со спектром $W_x(\omega)=W_0$, равномерным в полосе пропускания фильтра промежуточной частоты (имеется в виду супергетеродинный приемник).

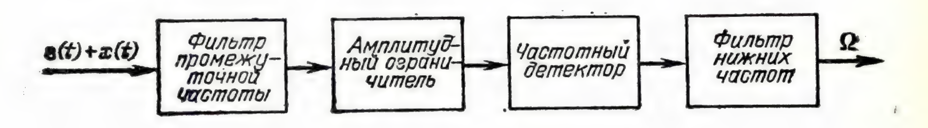


Рис. 11.10

Полосу пропускания этого фильтра $2\Delta\omega_0$ можно приравнять удвоенной девиации частоты, т. е. $\Delta\omega_0 = \omega_д$. Фильтр нижних частот на выходе детектора должен обладать полосой прозрачности от 0 до Ω_{max}, где Ω_{max} — наивысшая частота модуляции. Помеху, действующую на входе ограничителя, запишем, как и в предыдущем параграфе, в виде $x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$.

При анализе совместного действия $s(t)$ и $x(t)$ на частотный детектор облегчим задачу, рассматривая раздельно два режима: 1) при отсутствии полезной ЧМ, когда на входе действует чисто гармоническое колебание $s(t) = E\cos\omega_0 t$ и шум $x(t)$; 2) при наличии ЧМ. Будем считать, что во втором режиме помеха на выходе детектора остается такой же, что и в первом.

Итак, в отсутствие модуляции суммарное колебание на входе ограничителя [см. (11.31)]

$$s(t) + x(t) = E\cos\omega_0 t + A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = U(t)\cos[\omega_0 t + \xi(t)], \qquad (11.49)$$

где $U(t)$ и $\xi(t)$ определяются выражениями (11.32) и (11.33).

Обозначив порог ограничения $U_{пор}$, придем к следующему выражению для колебания на выходе ограничителя, колебательный контур которого настроен на частоту ω_0:

$$u_{вых}(t) = U_{пор}\cos[\omega_0 t + \xi(t)] \qquad (11.50)$$

[ср. с (8.36)].

Напряжение на выходе частотного детектора, пропорциональное производной фазы $\xi(t)$, в отсутствие полезной модуляции является помехой. Таким образом,

$$x_{вых}(t) = S_{чд}\dot{\xi}(t), \qquad (11.51)$$

где $S_{чд}$ — крутизна характеристики частотного детектора (см. § 8.9). Как видим, интенсивность и структура помехи $x_{вых}(t)$ на выходе частотного детектора полностью определяются статистическими характеристиками производной фазы $\xi(t)$.

Общее выражение для фазы при любых соотношениях между $A(t)$ и E имеет вид (11.33). Однако в реальных условиях приема ЧМ колебаний обеспечивается значительное превышение сигнала над помехой. Обычно $E^2/2\sigma_x^2 \gg 1$. (Как и в предыдущем параграфе, σ_x^2 — средняя мощность помехи на входе ограничителя). Поэтому выражение (11.33) можно упростить:

$$\xi(t) \approx \operatorname{arctg}\left[\frac{A(t)\sin\theta(t)}{E}\right] \approx \frac{A(t)}{E}\sin\theta(t). \qquad (11.52)$$

Статистические характеристики случайной функции $\xi(t) = [A(t)/E]\sin\theta(t)$ совпадают с характеристиками, найденными в п. 4.6.1 для квадратурных слагаемых узкополосного процесса. Там было показано, что функция $A(t)\sin\theta(t)$ обладает нормальным законом распределения и спектром $2W_x(\omega_0+\Omega)$ [см. (4.64)]. Таким образом,

$$W_\xi(\Omega) = 2W_x(\omega_0+\Omega)/E^2. \qquad (11.53)$$

При дифференцировании гауссовского случайного процесса распределение остается нормальным (см. § 7.1). Следовательно, $\dot{\xi}(t)$, т. е. мгновенное значение частотного отклонения, также обладает нормальным распределением.

Итак, при $E^2/2\sigma_x^2 \gg 1$ шум на выходе частотного детектора (как и на входе) является гауссовским процессом.

Остается определить спектр процесса $\dot{\xi}(t)$. Для этого достаточно умножить $W_\xi(\Omega)$ на Ω^2 (см. § 7.4). Таким образом,

$$W_{\dot{\xi}}(\Omega) = \Omega^2 W_\xi(\Omega) = \frac{2\Omega^2}{E^2} W_x(\omega_0 + \Omega), \tag{11.54}$$

а спектр помехи на выходе частотного детектора в соответствии с выражением (11.51)

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = S_{\text{чд}}^2 W_{\dot{\xi}}(\Omega) = \frac{2S_{\text{чд}}^2\Omega^2}{E^2} W_x(\omega_0 + \Omega). \tag{11.55}$$

Для белого шума с энергетическим спектром W_0 (на входе приемника) $W_x(\omega_0+\Omega) = W_0$. Следовательно, спектр помехи на выходе частотного детектора в соответствии с (11.54)

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = \frac{2S_{\text{чд}}W_0}{E^2}\Omega^2, \quad |\Omega| \leqslant \omega_{\text{д}}. \tag{11.56}$$

График этой функции, нормированной относительно максимального значения $W_{\text{вых}}(\omega_{\text{д}})$, построен на рис. 11.11 для частного случая $f_{\text{д}} = 75$ кГц и $F_{max} = 10$ кГц (параметры канала звукового сопровождения с частотной модуляцией Московского телецентра).

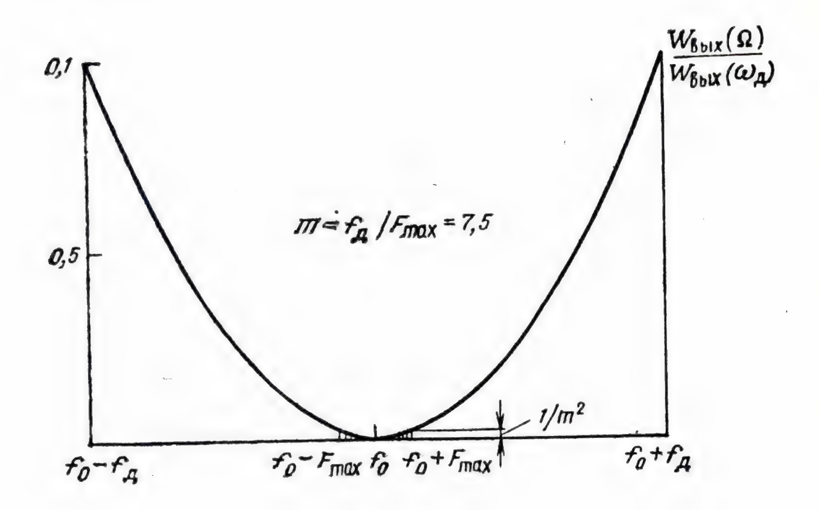


Рис. 11.11

Мощность помехи в полосе пропускания фильтра звуковых частот

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \frac{2S^2_{\text{чд}} W_0}{E^2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 d\Omega = \frac{2S^2_{\text{чд}} W_0}{E^2} \frac{1}{2\pi} \frac{2\Omega^3_{\max}}{3}. \quad (11.57)$$

Учитывая, что $W_0 2(2F_{\max})$ есть не что иное, как σ_x^2, т. е. мощность в двух полосах $2F_{\max}$ (одна в области $\omega > 0$, вторая в области $\omega < 0$), приведем (11.57) к виду

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \frac{S^2_{\text{чд}}}{3} \frac{\sigma^2_x}{E^2/2} \Omega^2_{\max}. \quad (11.58)$$

Рассмотрим теперь режим ЧМ, при котором напряжение на выходе частотного детектора пропорционально девиации частоты. При тональной ЧМ

$$U_s = S_{\text{чд}} \omega_{\text{д}}. \quad (11.59)$$

Итак, мощность сигнала на выходе (без учета влияния помехи) $U_s^2/2 = \frac{1}{2} S^2_{\text{чд}} \omega^2_{\text{д}}$, а мощность помехи (без учета модуляции) определяется выражением (11.58). Следовательно, отношение сигнал-помеха на выходе

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)^{\text{чм}}_{\text{вых}} = \frac{U_s^2/2}{\sigma^2_{\text{вых}}} = \frac{1/2 S^2_{\text{чд}} \omega_{\text{д}}^2}{\frac{1}{3} S^2_{\text{чд}} \frac{\sigma_x^2/2}{E^2/2} \Omega^2_{\max}} =$$

$$= 3m^2 \frac{E^2/2}{\sigma^2_x} = 3m^2 \left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)_{\text{вх}}. \quad (11.60)$$

Соотношения (11.56)—(11.60) иллюстрируются рис. 11.11. В рассматриваемой системе для осуществления частотной модуляции требуется очень широкая полоса пропускания в тракте промежуточной частоты, что обусловливает сильное возрастание помехи на выходе фильтра. Однако, как очевидно из рис. 11.11, только ничтожная доля мощности этой помехи попадает в тракт низких частот (на рис. 11.11 эта мощность определяется площадью заштрихованного участка).

Увеличив отношение $\omega_{\text{д}}/\Omega_{\max}$, т. е. индекс угловой модуляции, можно получить большой выигрыш в отношении сигнал — помеха по сравнению с системами с АМ. Подобный способ получил широкое распространение в системах радиовещания на УКВ, а также в каналах звукового сопровождения телевидения.

Следует подчеркнуть, что преимущества широкополосной частотной модуляции сохраняются пока помеха на входе детектора слабее сигнала и пока обеспечивается полное ограничение амплитуды колебания на входе детектора. В тех случаях, когда помеха сильнее сигнала, имеет место его подавление.

11.7. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Пусть передаточная функция линейной параметрической цепи является вещественной функцией времени и не зависит от частоты. В § 10.4 было показано, что подобная передаточная функция характеризует цепь, в которой имеет место АМ.

Обозначим передаточную функцию через $K(t)$ (аргумент $i\omega$ опущен), причем $K(t)$ может представлять собой как детерминированную, так и случайную функцию. Входной сигнал $s(t)$ также может быть либо детерминированным, либо случайным процессом (с нулевым средним).

Составим выражение для ковариационной функции выходного сигнала $s_{\text{вых}}(t)$

$$K_{s_{\text{вых}}}(t, \tau) = M[s_{\text{вых}}(t)\, s_{\text{вых}}(t+\tau)] = M[K(t) K(t+\tau) s(t) s(t+\tau)]. \qquad (11.61)$$

Нас интересует случай, когда передаточная функция $K(t)$ не зависит от входного сигнала $s(t)$. Тогда среднее значение произведения в (11.61) равно произведению средних значений соответствующих сомножителей, т. е.

$$K_{s_{\text{вых}}}(t, \tau) = M[K(t) K(t+\tau)] M[s(t) s(t+\tau)] = K_K(t, \tau) R_s(t, \tau), \qquad (11.62)$$

где $R_s(t, \tau)$ — корреляционная функция входного сигнала, а

$$K_K(t, \tau) = M[K(t) K(t+\tau)] \qquad (11.63)$$

ковариационная функция цепи с коэффициентом передачи $K(t)$.

Из выражения (11.62) вытекает важное свойство линейной цепи с переменными параметрами: корреляционная функция выходного сигнала равна произведению корреляционных функций входного сигнала $R_s(t, \tau)$ и цепи $K_K(t, \tau)$.

Для нестационарных процессов корреляционные функции в (11.62), (11.63) зависят не только от временно́го сдвига, но и от времени t. Этими характеристиками не всегда удобно пользоваться. Далее в примерах используются функции $R(\tau)$, получаемые усреднением $R(t, \tau)$ по t.

Применяя преобразование Фурье к усредненной по времени функции $R_{\text{вых}}(\tau)$, получаем также усредненный спектр выходного сигнала

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вых}}(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau. \qquad (11.64)$$

Проиллюстрируем использование соотношений (11.61)—(11.64) на примерах.

1. Гармонический сигнал $s(t)=\cos\omega_0 t$ действует на входе линейной системы с передаточной функцией

$$K(t)=K_0+\Delta K(t), \tag{11.65}$$

где K_0 — среднее значение коэффициента усиления системы; $\Delta K(t)$ — флюктуация коэффициента усиления, представляющая собой нормально распределенную стационарную случайную функцию с дисперсией σ_K^2.

Для полной характеристики изменения во времени передаточной функции системы должны быть заданы либо ковариационная функция $K_K(\tau)$, либо спектр $W_K(\omega)$ случайной функции $K(t)$.

Постоянной составляющей K_0 соответствует спектр $W_{K_0}(\omega)=$ $=K_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}d\tau=2\pi K_0^2\delta(\omega)$. Спектр второго слагаемого, т. е. $\Delta K(t)$, зададим в форме $W_{\Delta K}(\omega)=2c/(a^2+\omega^2)$, где a и c — постоянные величины

Таким образом, спектр суммы $K_0+\Delta K$

$$W_K(\omega)=2\pi K_0^2\delta(\omega)+2c/(a^2+\omega^2). \tag{11.66}$$

Заданному спектру $W_K(\omega)$ соответствует ковариационная функция

$$K_K(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_K(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega=K_0^2+\frac{c}{a}e^{-a|\tau|}. \tag{11.67}$$

Найдем ковариационную функцию и спектр мощности сигнала на выходе системы.

Имея в виду соотношения (11.62) и (11.67), а также учитывая, что корреляционная функция сигнала $s(t)=\cos\omega_0 t$ равна $R_s(\tau)=1/2\cos\omega_0\tau$, получаем

$$K_{s_{\text{вых}}}(\tau)=K_K(\tau)\,R_s(\tau)=\frac{1}{2}\left(K_0^2+\frac{c}{a}e^{-a|\tau|}\right)\cos\omega_0\tau. \tag{11.68}$$

Находим теперь спектр мощности с помощью выражения (11.64):

$$W_{\text{вых}}(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(K_0^2+\frac{c}{a}e^{-a|\tau|}\right)\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}K_0^2\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right]+$$

$$+\frac{c}{4a}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau\right].$$

Первые два интеграла дают дельта-функции $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ и $2\pi\delta(\omega+\omega_0)$. Последние же два интеграла дают соответственно

$2a/[a^2+(\omega-\omega_0)^2]$ и $2a/[a^2+(\omega+\omega_0)^2]$.

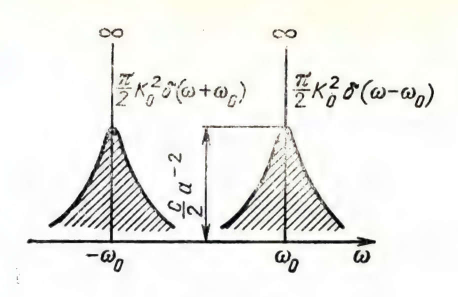


Рис. 11.12

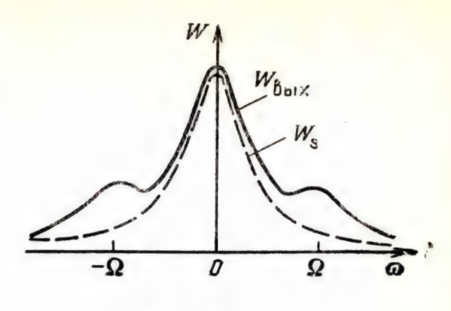


Рис. 11.13

Таким образом, окончательно имеем

$$W_{вых}(\omega)=\frac{\pi}{2}K_0^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+$$

$$+\frac{c}{2}\left[\frac{1}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\right]. \quad (11.69)$$

Функция $W_{вых}(\omega)$ изображена на рис. 11.12. Монохроматической составляющей выходного сигнала соответствуют две дискретные спектральные линии, а шумовой составляющей, обусловленной флюктуациями усиления $\Delta K(t)$, — сплошной спектр (на рис. 11.12 заштрихован). Этот спектр состоит из комбинационных частот, располагающихся симметрично относительно частоты сигнала ω_0 (в области отрицательных ω симметрично относительно $-\omega_0$).

2. Гауссовский случайный процесс $s(t)$ с нулевым средним и со спектром (рис. 11.13)

$$W_s(\omega)=2d/(b^2+\omega^2), \quad (11.70)$$

группирующимся вблизи нулевой частоты, действует на входе системы с передаточной функцией

$$K(t)=K_0(1+M\cos\Omega t),\ M<1. \quad (11.71)$$

Находим корреляционную функцию входного сигнала

$$R_s(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2d}{b^2+\omega^2}e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{d}{b}e^{-b|\tau|} \quad (11.72)$$

и ковариационную функцию системы

$$K_K(\tau)=K_0^2+\frac{1}{2}M^2K_0^2\cos\Omega\tau. \quad (11.73)$$

Тогда в соответствии с (11.62) корреляционная функция выходного сигнала

$$R_{вых}(\tau)=K_K(\tau)R_s(\tau)=\frac{d}{b}\left(K_0^2+\frac{1}{2}M^2K_0^2\cos\Omega\tau\right)e^{-b|\tau|} \quad (11.74)$$

и спектр

$$W_{вых}(\omega)=\frac{d}{b}K_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-b|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau+\frac{dM^2K_0^2}{2b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-b|\tau|}\cos\Omega\tau e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=K_0^2\frac{2d}{b^2+\omega^2}+K_0^2M^2d\left[\frac{1}{b^2+(\omega-\Omega)^2}+\frac{1}{b^2+(\omega+\Omega)^2}\right]. \qquad (11.75)$$

Функция $W_{вых}(\omega)$ изображена на рис. 11.13.

3. Нормально распределенный случайный процесс $s(t)$ действует на входе системы, передаточная функция $K(t)$ которой является также случайной функцией с нормальным распределением.

Спектры процессов $s(t)$ и $K(t)$ зададим в форме $W_s(\omega)=2d/(b^2+\omega^2)$, как в примере 2, $W_K(\omega)=2\pi K_0^2\delta(\omega+2c/(a^2+\omega^2)$, как в примере 1.

Корреляционная функция входного сигнала и ковариационная функция рассматриваемой системы соответственно

$$R_s(\tau)=\frac{d}{b}e^{-b|\tau|},\quad K_K(\tau)=K_0^2+\frac{c}{a}e^{-a|\tau|}.$$

Находим корреляционную функцию выходного сигнала

$$R_{вых}(\tau)=K_K(\tau)R_s(\tau)=\frac{d}{b}K_0^2e^{-b|\tau|}+\frac{cd}{ab}e^{-(a+b)|\tau|} \qquad (11.76)$$

и спектр мощности

$$W_{вых}(\omega)=K_0^2\frac{2d}{b^2+\omega^2}+\frac{cd}{ab}\frac{2(a+b)}{(a+b)^2+\omega^2}. \qquad (11.77)$$

Первое слагаемое в правой части (11.77) соответствует сигналу на выходе системы с передаточной функцией K_0 (в отсутствие мультипликативной помехи), а второе слагаемое — мультипликативной помехе. Значение этого слагаемого пропорционально произведению параметра d, характеризующего интенсивность сигнала, и параметра c, который определяет дисперсию флюктуации передаточной функции системы σ_K^2.

Глава 12. ДИСКРЕТНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

12.1. ПРИНЦИП ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Переход к системам цифровой обработки сигналов является одной из основных тенденций современной радиоэлектроники. Это направление оказывает большое влияние на развитие теории и техники сигналов и систем.

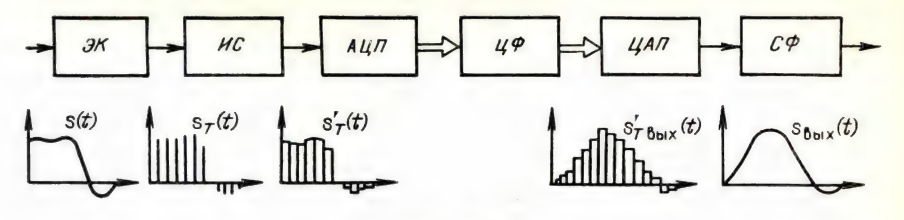


Рис. 12.1

Общее представление о принципе цифровой обработки континуального сигнала можно получить из функциональной схемы, изображенной на рис. 12.1. Сначала входной (континуальный) сигнал $s(t)$ подвергается дискретизации с помощью электронного ключа (ЭК), работающего с шагом T. Эта процедура описана в § 2.13 (см. также рис. 2.26). Сигнал на выходе ЭК имеет вид последовательности коротких импульсов $s_T(t)$, являющихся отсчетами сигнала $s(t)$. Предполагается, что при выборе шага T (на основании теоремы Котельникова) обеспечивается сохранение информации, содержащейся в континуальном сигнале.

Каждый отсчет запоминается в интегрирующей схеме (ИС) на время $t_з$, необходимое для срабатывания аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Очевидно, что $t_з<T$. На выходе ИС получается ступенчатое колебание $s_т'(t)$. В АЦП уровень каждой ступени этого колебания измеряется (сравнивается с эталонным) и ему присваивается значение ближайшего квантованного уровня, общее число которых $L=2^r$. Каждому уровню в АЦП ставится в соответствие кодовое слово — двоичное число, состоящее из r разрядов, каждый из которых представлен единицей или нулем (стандартным импульсом или паузой). Очевидно, чем длиннее кодовое слово, тем выше точность представления каждого отсчета сигнала.

Полученный таким образом цифровой сигнал поступает в цифровой фильтр (ЦФ), представляющий собой вычислительное устройство. В ЦФ производится обработка кодовых слов по заданному алгоритму, использующему математические операции сложения, умножения на постоянные коэффициенты и задержки во времени. Заметим, что в качестве ЦФ может быть использована и универсальная ЭВМ.

Среди разнообразных алгоритмов обработки цифровых сигналов наибольшее распространение получила цифровая фильтрация, включающая в себя цифровой спектральный анализ.

На выходе ЦФ возникают новые кодовые слова, соответствующие профильтрованному сигналу, и после прохождения ими цифроаналогового преобразователя (ЦАП) сигнал приобретает ступенчатую форму, причем высота каждой ступени равна отсчету выходного сигнала в соответствующие моменты времени. Под выходным дискретизованным сигналом $s'_{т вых}(t)$

в дальнейшем будем подразумевать последовательность коротких импульсов, амплитуды которых равны высотам соответствующих ступеней.

Наконец, в четырехполюснике, который можно назвать синтезирующим фильтром (СФ), осуществляется преобразование сигнала с выхода ЦАП в континуальный выходной сигнал $s_{вых}(t)$.

Одним из основных параметров рассмотренной системы является шаг дискретизации T, задаваемый опорным генератором. Особое внимание уделяется повышению стабильности частоты $1/T$ этого генератора, задающего строгую синхронность управления всеми ключевыми элементами устройств системы.

Цифровые системы обработки сигналов обладают рядом преимуществ по сравнению с аналоговыми. В первую очередь следует отметить абсолютную стабильность их характеристик. Кроме того, в цифровых фильтрах возможна реализация таких алгоритмов обработки, которые в аналоговой обработке нереализуемы. Характеристики фильтра легко перестраиваются. Возможно создание адаптивных (самонастраивающихся) систем. Эти и другие преимущества будут отмечены в дальнейшем после детального рассмотрения основных характеристик цифрового фильтра.

Следует отметить, что при рассмотрении принципа действия схемы, представленной на рис. 12.1, преобразования аналог—цифра и цифра—аналог могут быть опущены. В этом случае неквантованные отсчеты сигнала $s_T(t)$ (аналоговые) вводятся в дискретный фильтр, в котором над ними совершаются те же математические операции, что и над кодовыми словами в цифровом фильтре.

Системы, в которых не используется цифровое кодирование, относятся к классу дискретных систем аналогового типа. В последующих параграфах рассматриваются именно такие системы, а оценка погрешностей, связанных с эффектом квантования, дается в § 12.8.

Отметим также, что в «чисто» цифровых системах передачи информации сигнал на выходе приемника уже имеет форму, пригодную для цифровой обработки, и поэтому АЦП в такой системе не нужен. Если при этом потребитель информации использует непосредственно сигнал с выхода цифрового фильтра, то отпадает необходимость и в ЦАП.

12.2. ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ДИСКРЕТНЫЕ (ЦИФРОВЫЕ) ФИЛЬТРЫ

Сигнал на входе дискретного фильтра представляет собой последовательность отсчетов $s(kT)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, взятых с интервалом T из континуального сигнала $s(t)$. Этот сигнал можно записать в форме, аналогичной (2.106′), но с использо-

ванием вместо дельта-функций $\delta(t-kT)$ единичных импульсов (отсчетов) $\delta[(m-k)T]$, определяемых в виде

$$\delta[(m-k)T]=\begin{cases}1 \text{ при } m=k,\\ 0 \text{ при } m\neq k;\end{cases} \tag{12.1}$$

$$\delta[mT]=\begin{cases}1 \text{ при } m=0,\\ 0 \text{ при } m\neq 0,\end{cases}$$

где m и k — целые числа.

Как видно из этого определения, единичный импульс $\delta[(m-k)T]$ можно использовать для фиксации положения отсчетов сигнала на оси времени только в дискретные моменты. При этом выражение, аналогичное (2.106′), принимает следующий вид:

$$s(mT)=\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta[(m-k)T]. \tag{12.2}$$

При рассмотрении цифровых фильтров множитель T в аргументах дискретных функций $s(mT)$, $s(kT)$ и $\delta(mT)$ иногда опускается.

На выходе фильтра в результате определенных операций возникает последовательность отсчетов $s_{\text{вых}}(mT)$, $m=0$, 1, 2, ...

Рассмотрим сначала наиболее простой алгоритм работы цифрового фильтра, при котором отсчет $s_{\text{вых}}(mT)$ в момент $t=mT$ зависит от отсчета, поступающего в этот же момент на вход фильтра, и от H предшествующих ему отсчетов:

$$s_{\text{вых}}(mT)=a_0 s(mT)+a_1 s(mT-T)+a_2 s(mT-2T)+\ldots$$
$$\ldots+a_{\text{н}} s(mT-HT). \tag{12.3}$$

Этот алгоритм реализуется схемой, представленной на рис. 12.2, на которой T означает элемент задержки на шаг дискретизации (в цифровом фильтре это элемент памяти); a_0, a_1, ..., a_H — умножители («весовые коэффициенты» фильтра), а Σ — сумматор отсчетов, из которых образуется выходной сигнал.

Начиная с момента $t=0$ выходные отсчеты в моменты $t=0$, T, $2T$, ... будут определяться выражениями

$$s_{\text{вых}}(0)=a_0 s(0),$$

$$s_{\text{вых}}(T)=a_0 s(T)+a_1 s(0),$$

$$s_{\text{вых}}(2T)=a_0 s(2T)+a_1 s(T)+a_2 s(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{\text{вых}}(mT)=a_0 s(mT)+a_1 s[(m-1)T]+a_2 s[(m-2)T]+\ldots$$
$$\ldots+a_H s[(m-H)T].$$

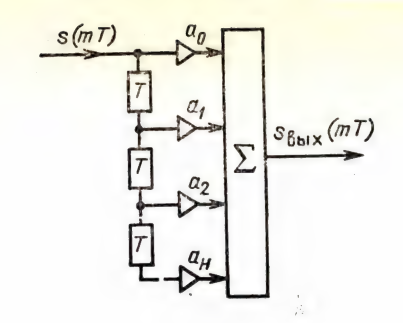


Рис. 12.2

Приведенные соотношения, соответствующие алгоритму (12.3), обобщаются выражением

$$s_{\text{вых}}(mT)=\sum_{k=0}^{H} a_k s\,[(m-k)\,T]. \qquad (12.3')$$

При подаче на вход фильтра единичного отсчета $\delta(mT)$ на выходе сумматора возникает последовательность отсчетов, имеющая смысл импульсной характеристики фильтра $g(mT)$ (рис. 12.3). Из (12.3), а также непосредственно из схемы на рис. 12.2, следует, что $g(mT)=\{a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_н\}$, т. е. отсчеты $g(mT)$ совпадают с весовыми коэффициентами фильтра.

Выражение (12.3′) можно переписать в форме

$$s_{\text{вых}}(mT)=\sum_{k} s\,[(m-k)\,T]\,g\,(kT)=$$

$$=\sum_{k} s\,(kT)\,g\,[(m-k)\,T]. \qquad (12.3'')$$

Выражение (12.3″) является дискретным эквивалентом интегральной свертки, используемой при анализе передачи континуальных сигналов в аналоговых системах.

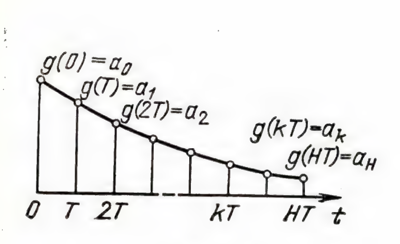


Рис. 12.3

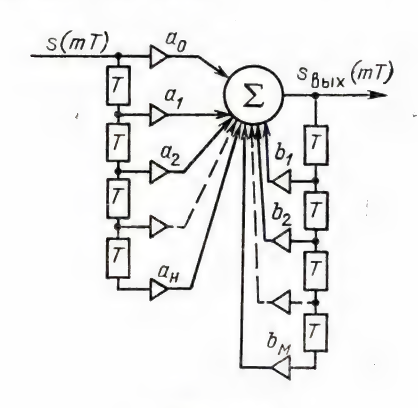


Рис. 12.4

Представленный на рис. 12.2 фильтр называется трансверсальным. Иначе образуется сигнал на выходе фильтра при введении в его схему обратных связей (рис. 12.4). В этом случае значение сигнала на выходе сумматора в любой момент времени mT зависит дополнительно (по сравнению с трансверсальным фильтром) от некоторого числа отсчетов выходного сигнала в предшествующие моменты времени, что значительно расширяет возможности фильтра. Подобные фильтры называются рекурсивными.

Разностное уравнение (12.3) следует заменить для рекурсивного фильтра более общим уравнением, учитывающим обратные связи с весовыми коэффициентами $b_1, b_2, \ldots, b_M$:

$$s_{\text{вых}}(mT)=a_0s(mT)+a_1s[(m-1)T]+\ldots+a_Hs[(m-H)T]+ +b_1s_{\text{вых}}[(m-1)T]+\ldots+b_Ms_{\text{вых}}[(m-M)T]. \quad (12.4)$$

Наглядное различие между трансверсальным и рекурсивным фильтрами заключается в свойствах их импульсных характеристик. В первом случае импульсная характеристика содержит конечное число отсчетов $(H+1)$, а во втором благодаря обратной связи число отсчетов неограниченно велико. В связи с этим трансверсальные фильтры иногда называют КИХ-фильтрами, а рекурсивные — БИХ-фильтрами.

12.3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Из предыдущего параграфа ясно, что линейное разностное уравнение [(12.3) или (12.4)] полностью описывает работу цифрового фильтра. Анализ характеристик фильтра существенно упрощается при использовании аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Поэтому целесообразно представить слагаемые разностных уравнений в форме (2.106′) [вместо (12.2)]. В § 2.13 было определено изображение по Лапласу сигнала $s_T(t)$:

$$\mathscr{L}[s_T(t)]=\mathbf{S}_T(p)=\sum_{k=0}^{\infty}s(kT)\,e^{-pkT}. \quad (12.5)$$

Аналогично изображение по Лапласу выходного сигнала

$$\mathscr{L}[s_{T\text{вых}}(t)]=\mathbf{S}_{T\text{вых}}(p)=\sum_{k=0}^{\infty}s_{\text{вых}}(kT)\,e^{-pkT}. \quad (12.5')$$

Передаточную функцию цифрового фильтра можно определить как отношение

$$\mathbf{K}_T(p)=\mathbf{S}_{T\text{вых}}(p)/\mathbf{S}_T(p). \quad (12.6)$$

Определим $\mathbf{K}_T(p)$ для трансверсального фильтра, представленного на рис. 12.2. Сначала запишем разностное уравнение (12.3) с использованием записи дискретных сигналов в форме (2.106′)

$$s_{T\text{вых}}(t) = a_0 s_T(t) + a_1 s_T(t-T) + \ldots + a_H s_T(t-HT). \qquad (12.7)$$

Применив к этому выражению преобразование Лапласа, с учетом теоремы смещения получим

$$\mathbf{S}_{T\text{вых}}(p) = a_0 \mathbf{S}_T(p) + a_1 \mathbf{S}_T(p)\,\mathrm{e}^{-pT} + \ldots + a_H \mathbf{S}_T(p)\,\mathrm{e}^{-pHT} =$$

$$= \mathbf{S}_T(p) \sum_{k=0}^{H} a_k e^{-pkT},$$

откуда по формуле (12.6)

$$\mathbf{K}_T(p) = \sum_{k=0}^{H} a_k \mathrm{e}^{-pkT}. \qquad (12.8)$$

Заметим, что такое же выражение получится, если применить преобразование Лапласа непосредственно к импульсной характеристике $g(kT)$, представив ее в форме

$$g_T(t) = \sum_{k=0}^{H} a_k \delta(t - kT)$$

(см. комментарий к рис. 12.3).

Очевидно, что обратное преобразование Лапласа передаточной функции $\mathbf{K}_T(p)$ даст импульсную характеристику $g_T(t)$ или ее отсчеты [см. (2.112) и (2.113)].

Подставив в (12.8) $p = i\omega$, получим передаточную функцию на оси частот (комплексную частотную характеристику)

$$\mathbf{K}_T(i\omega) = \sum_{k=0}^{H} a_k \mathrm{e}^{-i\omega kT}. \qquad (12.9)$$

Сопоставление выражений (12.9) и (2.110) показывает, что передаточная функция цифрового фильтра $\mathbf{K}_T(i\omega)$, как и спектры $\mathbf{S}_T(\omega)$, $\mathbf{S}_{T\text{вых}}(\omega)$ имеет периодическую структуру с периодом (на оси частот), равным $\omega_1 = 2\pi/T$.

Следовательно, рассматриваемую передаточную функцию наряду с (12.9) можно записать также в форме

$$\mathbf{K}_T(i\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{\text{ан}}[i(\omega - n\omega_1)], \qquad (12.10)$$

где $\mathbf{K}_{\text{ан}}(i\omega)$ — передаточная функция аналогового фильтра, обладающего импульсной характеристикой $g(t)$, которая соответствует дискретной характеристике

$$g_T(t) = \sum_{k=0}^{H} g(kT)\,\delta(t - kT).$$

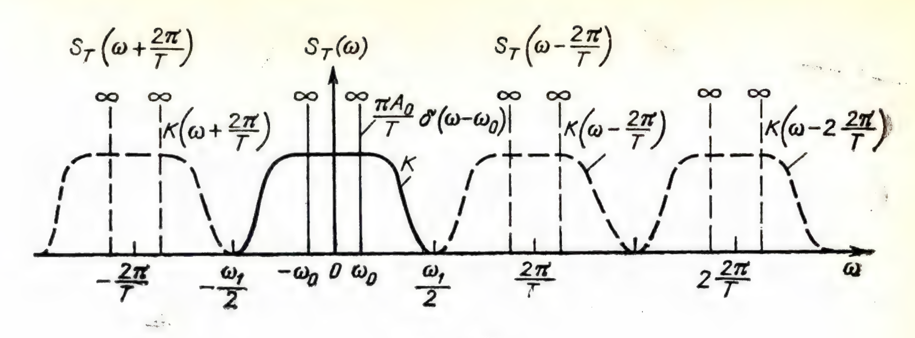


Рис. 12.5

Выражение (12.10) аналогично (2.109). Если шаг T мал по сравнению с протяженностью функции $g(t)$ или, что то же самое, частота повторения ω_1 больше полосы прозрачности аналогового фильтра, то частотные характеристики, соответствующие разным значениям n, не перекрываются. В этом случае на центральном участке $-\omega_1/2<\omega<\omega_1/2$, т. е. при $n=0$, характеристики $\mathbf{K}_T(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{ан}(i\omega)$ полностью совпадают. Это иллюстрируется рис. 12.5 для дискретного фильтра нижних частот при воздействии гармонического колебания

$$s_T(t)=A_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\omega_0 kT\delta(t-kT), \quad \omega_0<\pi/T,$$

со спектральной плотностью

$$\frac{\pi A_0}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-n\omega_1)+\delta(\omega+\omega_0-n\omega_1)]$$

[см. (2.95) и (2.109)]. Сплошными линиями показаны спектр сигнала и АЧХ фильтра в пределах центрального частотного интервала, а штриховыми — их периодические продолжения. После обратного преобразования дискретного сигнала $s_{T\text{вых}}(t)$ в континуальный сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ (с помощью СФ, как на рис. 12.1) только центральный участок определяет спектральный состав выходного сигнала.

Следует подчеркнуть важность этого заключения. По существу оно означает, что определение передаточной функции дискретного фильтра можно распространить и на отношение $\mathbf{S}_{\text{вых}}(\omega)/\mathbf{S}(\omega)$. Иными словами, выражение (12.6) можно трактовать как передаточную функцию дискретного фильтра в целом с учетом как дискретизации сигнала $s(t)$ на входе, так и восстановления континуальной формы $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе устройства.

Определим теперь передаточную функцию рекурсивного цифрового фильтра. Повторяя рассуждения, приведшие к фор-

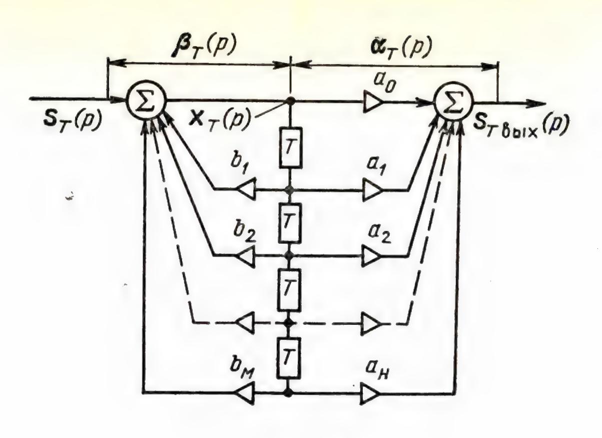


Рис. 12.6

муле (12.8), и основываясь при этом на разностном уравнении (12.4), нетрудно получить

$$\mathbf{K}_T(p) = \frac{a_0 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-p2T} + \ldots + a_H e^{-pHT}}{1 - b_1 e^{-pT} - b_2 e^{-2pT} - \ldots - b_M e^{-pMT}}. \tag{12.11}$$

Передаточная функция (12.11) соответствует схеме на рис. 12.4. Однако эта схема не является единственной, поскольку возможны другие формы реализации, обладающие этой же передаточной функцией. Так, выражение (12.11) можно представить в виде произведения двух передаточных функций

$$\mathbf{K}_T(p) = \frac{\mathbf{X}_T(p)}{\mathbf{S}_T(p)} \frac{\mathbf{S}_{T\text{вых}}(p)}{\mathbf{X}_T(p)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{M} b_k e^{-pkT}} \sum_{k=0}^{H} a_p e^{-pkT} = \beta_T(p)\, \alpha_T(p)$$

или при переходе от переменной p к $i\omega$

$$\mathbf{K}_T(i\omega) = \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{M} b_k e^{-i\omega kT}} \sum_{k=0}^{H} a_k e^{-i\omega kT} = \beta_T(i\omega)\, \alpha_T(i\omega). \tag{12.12}$$

Такому представлению соответствует каноническая схема на рис. 12.6, являющаяся каскадным соединением фильтров $\beta_T(i\omega)$ и $\alpha_T(i\omega)$. Достоинством схемы является использование в ней минимального числа элементов задержки, равного порядку фильтра (порядку разностного уравнения).

12.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

12.4.1. ДИСКРЕТНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

В § 2.13 было показано, что спектральная плотность $\mathbf{S}_T(\omega)$ дискретизованного по времени сигнала $s_T(t)$ имеет периодическую структуру с периодом на оси частот $\omega_1=2\pi/T$ (рис. 12.7, *б*). Этот спектр, как и спектр $\mathbf{S}(\omega)$ исходного (континуального) сигнала (рис. 12.7, *а*), является сплошным. Между тем при цифровой обработке сигналов осуществляется дискретизация и в частотной области. Это означает, что сплошной спектр $\mathbf{S}_T(\omega)$ представляется совокупностью своих значений $\mathbf{S}_T(n\Delta\omega)$ на дискретных частотах $\omega=n\Delta\omega$. Подобный спектр для сигнала, длительность которого $T_c=NT$, показан на рис. 12.7, *в*.

Интервал между соседними спектральными линиями в соответствии с теоремой отсчетов (см. § 2.12) не должен превышать $\Delta\omega=2\pi/T_c=2\pi/NT=\omega_1/N$. Отсюда следует, что число отсчетов спектра $\mathbf{S}_T(\omega)$ в пределах одного его периода $\omega_1/\Delta\omega=N$, т. е. такое же, как и число временны́х отсчетов.

Выражение (2.110) для сигнала, состоящего из N отсчетов, имеет вид

$$\mathbf{S}_T(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\,e^{-i\omega kT}.$$

Подставляя в него $\omega=n\Delta\omega$, получаем соотношение

$$\mathbf{S}_T(n\Delta\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\,e^{-i\Delta\omega nkT}=\sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\,e^{-i\frac{2\pi}{N}nk},$$

$n=0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N/2$ (при четном N).

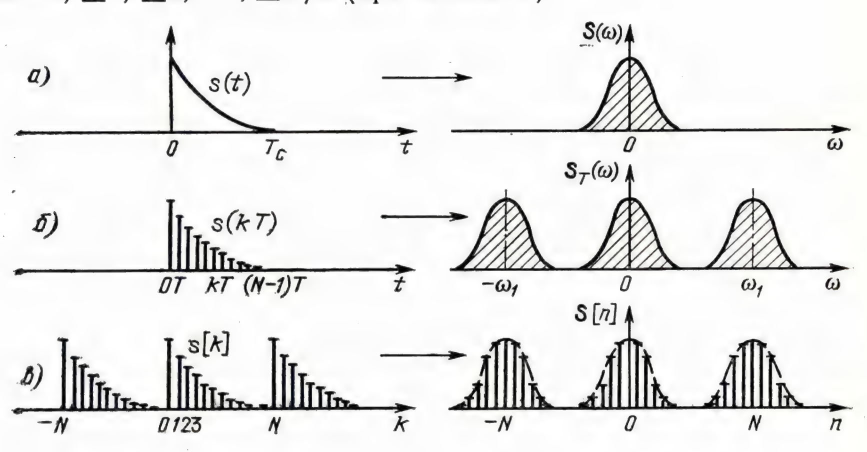


Рис. 12.7

Полученное выражение называется **дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)**.

Аргументы $n\Delta\omega$ и kT часто обозначаются просто n и k и заключаются в квадратные скобки. Окончательно ДПФ можно записать в форме

$$\mathbf{S}[n]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0, \quad \pm 1, \ldots, \pm N/2. \qquad (12.13)$$

Выражение (12.13) является алгоритмом вычисления спектральных коэффициентов $\{\mathbf{S}[n]\}$ по заданным временны́м отсчетам $\{s[k]\}$.

При четном N и действительных отсчетах $\{s[k]\}$

$$\mathbf{S}[N/2+l]=\mathbf{S}^*[N/2-l], \ l=0, 1, \ldots, N/2,$$

где $\mathbf{S}^*[n]$ — величина, комплексно-сопряженная $\mathbf{S}[n]$.

Действительно, подставляя в $\mathbf{S}[n]$ $n=N/2+l$ и учитывая, что N является периодом, получаем

$$\mathbf{S}[N/2+l]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}(N/2+l)k}=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, e^{+i\frac{2\pi}{N}(N/2-l)k}=$$

$$=\mathbf{S}^*[N/2-l], \ l=0, 1, \ldots, N/2,$$

что и требовалось доказать.

Из этого свойства ДПФ, в частности, следует, что при $l=0$ $\mathbf{S}[N/2]=\mathbf{S}^*[N/2]$, т. е. $\mathbf{S}[N/2]$ всегда действительное число. Это справедливо и для $\mathbf{S}[0]$.

На основе доказанных свойств ДПФ картину образования периодической структуры спектра можно пояснить построением, показанным на рис. 12.8 (для $N=8$). Амплитудный спектр исходного континуального сигнала представлен на рис. 12.8, *а*. Весь диапазон разбит на N равных интервалов $\Delta\omega$. Отсчетные точки на оси частот расположены в середине каждого интервала. На рис. 12.8, *б* представлено периодическое продолжение спектра. В точке $n=N/2=4$ $\mathbf{S}[4]=\mathbf{S}[-4]$ — действительное число, в точке $n=N/2+1=5$ спектральная плотность $\mathbf{S}[5]=\mathbf{S}^*[3]$, а по модулю $|\mathbf{S}[5]|=|\mathbf{S}^*[3]|$ и т. д. При $n=N=8$ начинается следующий период последовательности $\mathbf{S}[n]$. Очевидно, что в выражении (12.13) можно изменить нумерацию отсчетов спектра:

$$\mathbf{S}[n]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1. \qquad (12.14)$$

Именно в такой форме в дальнейшем будет записываться ДПФ последовательности N временны́х отсчетов.

Существует **обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)**, которое позволяет найти последова-

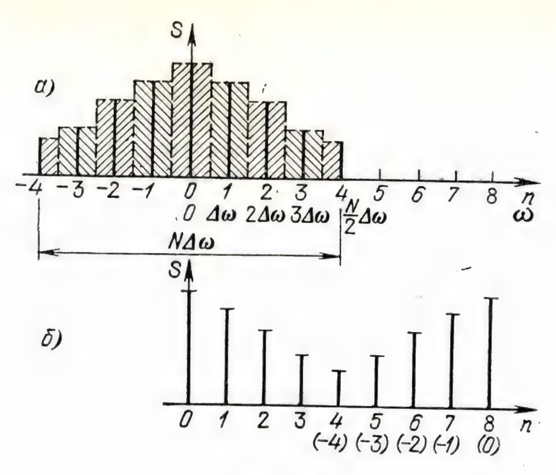


Рис. 12.8

тельность N отсчетов сигнала, по которой определялось ДПФ $\mathbf{S}[n]$.

ОДПФ задается выражением

$$s[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{S}[n]\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}kn},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \tag{12.15}$$

которое отличается от (12.14) только масштабным множителем $1/N$ и знаком экспоненты, подобно тому, как это было в случае преобразований Фурье аналогового сигнала [см. (2.38), (2.39)].

Для доказательства того, что (12.15) действительно является ОДПФ, подставим (12.14) в (12.15):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}s[m]\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}nm}\,\mathrm{e}^{+i\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}s[m]\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}n(k-m)}.$$

Внутренняя сумма в правой части этого выражения равна N при $k=m$ и нулю во всех других случаях (как сумма векторов, концы которых делят окружность единичного радиуса на N равных друг другу дуг). Таким образом, только одно слагаемое внешней суммы отлично от нуля и равно $\frac{1}{N}s[k]N=s[k]$, что и требовалось доказать.

В литературе встречается запись, содержащая множитель $1/N$ в ДПФ (а не в ОДПФ), а также запись с множителями T в ДПФ и $1/NT$ в ОДПФ. В последнем случае учитывается зависимость временны́х и спектральных коэффициентов от интервала дискретизации T.

Итак, дискретизованному сигналу $\{s[k]\}$, $k=0,\ 1,\ldots,\ N-1$, соответствует сплошной спектр $\mathbf{S}_T(\omega)$ с периодической струк-

турой (рис. 12.7, *б*). Дискретизованному же спектру $\mathbf{S}[n]$, $n=0, 1, \ldots, N-1$, соответствует периодическая последовательность сигналов $\{s[k]\}$, повторяемых с периодом N (рис. 12.7, *в*). Однако в расчет следует принимать только N отсчетов этого сигнала: $\{s[k]\}$, $k=0, 1, \ldots, N-1$. Заметим, что если дискретизации подвергнуть периодический сигнал с периодом NT, где T — шаг дискретизации, то ему будет соответствовать дискретный спектр с периодом N.

Ряд свойств непрерывных преобразований Фурье, рассмотренных в § 2.5, нетрудно сформулировать и для ДПФ. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Линейность*

Если $s_1[k]$ и $s_2[k]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, — дискретные сигналы, а $\mathbf{S}_1[n]$ и $\mathbf{S}_2[n$ — их ДПФ, то ДПФ сигнала $as_1[k]+bs_2[k]$ равно $a\mathbf{S}_1[n]+b\mathbf{S}_2[n]$.

2. *Сдвиг во времени*

Если дискретному сигналу $s[k]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, соответствует ДПФ $\mathbf{S}[n]$, то ДПФ сигнала $s[k-m]$ равно $\mathbf{S}[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}nm}$, m — целое число. Иными словами, сдвиг отсчетов последовательности $s[k]$ на m интервалов приводит лишь к изменению фазочастотной характеристики ДПФ. Следует отметить, что в отличие от аналогового сигнала, когда $s(t)$ целиком сдвигается по оси времени, для дискретного сигнала имеется в виду круговой сдвиг. Например, при $m>0$ отсчеты $s[0]$, $s[1], \ldots, s[m-1]$ поочередно переносятся в конец последовательности.

3. *Свертка сигналов*

Если дискретным сигналам $s[k]$ и $g[k]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, соответствуют ДПФ $\mathbf{S}[n]$ и $\mathbf{G}[n]$, то ДПФ сигнала

$$y[m]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, g[m-k], \tag{12.16}$$

называемого **круговой (периодической) сверткой**, равно

$$\mathbf{Y}[n]=\mathbf{S}[n]\mathbf{G}[n].$$

Для доказательства этого равенства найдем ДПФ правой части (12.16):

$$\mathbf{Y}[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\, g[m-k]\right] e^{-i\frac{2\pi}{N}nm}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\left[\sum_{m=0}^{N-1} g[m-k]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}n(m-k)}\right] e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Последнее выражение в квадратных скобках есть не что иное, как ДПФ G[n]. Тогда

$$\mathbf{Y}[n]=\mathbf{G}[n]\sum_{k=0}^{N-1}s[k]\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}nk}=\mathbf{G}[n]\,\mathbf{S}[n],$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат можно распространить с некоторыми уточнениями и на случай апериодической (линейной) свертки, определяемой выражением (12.3″), когда дискретные функции $s[k]$ и $g[k]$ не являются периодическими и содержат разное число отсчетов (N_s и N_g). Очевидно, что по алгоритму (12.3″) число отсчетов в совокупности $\{g[m]\}$ равно $N=N_s+$ $+N_g-1$. Для получения такого же периода в круговой свертке необходимо последовательности $s[k]$ и $g[k]$ дополнить нулевыми отсчетами, чтобы каждая из них содержала в итоге по N отсчетов.

Итак, вычисление ОДПФ произведения S[n]G[n] дает такой же результат, как вычисление круговой свертки (12.16) сигналов $\{s[k]\}$ и $\{g[k]\}$. Это свойство ДПФ будет дополнительно обсуждено в § 12.11 при рассмотрении алгоритмов цифровой фильтрации во временно́й и частотной областях.

В заключение отметим, что алгоритм вычисления ДПФ (12.14) можно использовать для вычисления ОДПФ. Для этого необходимо все отсчеты сигнала $s[k]$ заменить отсчетами спектра S[n], поменяв их, кроме S[0], местами: S[1] с S[N—1], S[2] с S[N—2] и т. д., и полученный результат разделить на N.

12.4.2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Под дискретным случайным процессом понимается последовательность отсчетов $\{x[k]\}$ континуального случайного сигнала (или помехи) $x(t)$, взятых в моменты $t=kT$. Каждый отсчет $x[k]$— случайная величина. Процесс $x[k]$ называется стационарным (в широком смысле), если его среднее значение $\overline{x[k]}$ постоянно, а корреляционная функция $\overline{x[k_1]x[k_2]}=$ $=\overline{x[k]x[k+m]}=R_x[m]$ зависит только от разности $m=k_1-k_2$. В дальнейшем полагаем $\overline{x[k]}=0$.

Пусть заданы спектральная плотность мощности $W_x(\omega)$ и корреляционная функция $R_s(\tau)$ исходного континуального процесса $x(t)$, связанные между собой соотношениями (4.38′) и (4.39′).

В результате дискретизации процесса $x(t)$ аналогичные характеристики принимают следующий вид:

$$W_{xT}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}W_x\left(\omega-n\frac{2\pi}{T}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x[m]\,\mathrm{e}^{-im\omega T},\qquad(12.17)$$

$$R_x[m]=\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} W_{xT}(\omega)\,e^{im\omega T}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_{xT}(\omega)\,e^{im\omega T}d(\omega T). \qquad (12.18)$$

Следует иметь в виду, что в отличие от $W_x(\omega)$ функция $W_{xT}(\omega)$ имеет размерность мощности [см. комментарий к (2.110)].

Вывод выражений (12.17) совершенно аналогичен выводу (2.109) и (2.110), а выражение (12.18) аналогично (2.113). Как и при дискретизации детерминированного сигнала $s(t)$, спектр $W_{xT}(\omega)$ является сплошным, имеет периодическую структуру и может быть выражен либо в виде суммы парциальных спектров $W_x(\omega-n2\pi/T)$, либо через дискретные отсчеты $R_x[m]$ [в данном случае корреляционной функции $R_x(\tau)$].

Рассмотрим два характерных примера:

1. Спектральная плотность мощности исходного случайного процесса $W_x(\omega)$ не выходит за пределы частотного интервала $(-\pi/T,\ \pi/T)$. В этом случае парциальные спектры не перекрываются и в пределах центрального лепестка $(n=0)$, как это следует из (12.17), $W_{xT}(\omega)=W_x(\omega)/T$. Пределы интегрирования $-\pi/T$, π/T в выражении (12.18) можно заменить на $\pm\infty$, так что

$$R_x[m]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,e^{im\omega T}d\omega=R_x(\tau)|_{\tau=mT},\ \ R_x[0]=R_x(0)$$

Это означает, что корреляционная функция дискретизованного процесса $\{x[k]\}$ представляет собой последовательность отсчетов $\{R_x[m]\}$, взятых из функции $R_x(\tau)$.

Важное прикладное значение имеет марковский нормальный процесс. Случайный процесс $x(t)$ называется марковским, если для любого набора моментов времени $t_1<t_2<\ldots<t_{m+1}$ условное распределение вероятностей для $x(t_{m+1})$ относительно величин $x(t_m),\ldots,x(t_1)$ совпадает с условным распределением $x(t_{m+1})$ относительно $x(t_m)$ [«будущее» $x(t_{m+1})$ не зависит от «прошлого» $x(t_{m-1}),\ldots,x(t_1)$ при фиксированном «настоящем» $x(t_m)$]. Существует следующая теорема[1]: гауссовский случайный процесс $x[k]$ будет одновременно и марковским тогда и только тогда, когда при $l<k<m$ коэффициент корреляции $r_x[m-l]$ отвечает фундаментальному соотношению $r_x[k-l]r_x[m-k]=r_x[m-l]$.

Для гауссовского стационарного процесса с нормированной корреляционной функцией $r_x[m-l]=\exp(-\alpha|m-l|)$, $\alpha>0$, это

[1] **Феллер В.** Введение в теорию вероятности и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1967.

соотношение выполняется, причем дискретизованная экспонента является единственной функцией, для которой по заданному ее значению при одном частном сдвиге $k \neq 0$ можно определить значение $r_x[k]$ при любом другом k.

С этим связано важное свойство марковского процесса первого порядка: если установлено, что $x[k]$ обладает нормальным распределением, то на следующем шаге дискретизации $k+1$ распределение также нормальное. Так, при воздействии белого шума на линейные системы, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка, формируется марковский процесс. Например, собственный шум в усилителе с RC-цепью при $r_u(\tau)=\exp(-|\tau|/RC)$ [см. (7.19)] является марковским (одномерным) процессом. При более сложных корреляционных функциях случайные процессы часто аппроксимируются близкими к ним одномерными марковскими процессами[1].

2. Спектральная плотность мощности дискретного случайного процесса $\{n[k]\}$ задана в виде

$$W_{nT}(\omega)=W_0/T, \quad -\pi/T<\omega<\pi/T.$$

Корреляционная функция в соответствии с (12.18)

$$R_n[m]=\frac{W_0}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega T} d(\omega T).$$

При любых значениях $m \neq 0$ интеграл в правой части равен нулю, а при $m=0$ равен 2π.

Таким образом,

$$R_n(m)=\frac{W_0}{T}\delta[m], \tag{12.19}$$

где $\delta[m]$ определяется выражением (12.1).

Итак, рассматриваемый процесс $\{n[k]\}$ является дельта-коррелированным и может быть назван дискретным белым шумом. Однако в отличие от непрерывного белого шума [см. (4.40)] его дисперсия конечна и равна W_0/T, т. е. средней мощности в полосе частот от $-1/2T$ до $1/2T$.

12.5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

12.5.1. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ p И z

В изображения по Лапласу дискретизованных сигналов, а также в передаточные функции дискретных систем входит

---

[1] **Полляк Ю. Г.** Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.— М.: Сов. радио, 1971.

функция $\exp(pT)$. Чтобы облегчить анализ, удобно сделать замену

$$z = e^{pT}, \quad p = \frac{1}{T} \ln z.$$

При такой замене указанные трансцендентные функции комплексной переменной p преобразуются в соответствующие z-изображения, являющиеся алгебраическими функциями комплексной переменной z, благодаря чему упрощается представление их на плоскости z.

Преобразование плоскости $p=\sigma+i\omega$ в плоскость $z=x+iy$ можно осуществлять с помощью следующих соотношений, связывающих координаты (σ_1, ω_1) какой-либо точки p_1 на плоскости p с координатами (x_1, y_1) соответствующей точки z_1 на плоскости z (рис. 12.9):

$$z_1 = x_1 + iy_1 = e^{(\sigma_1 + i\omega_1)T},$$

$$x_1 = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T, \quad y_1 = e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T.$$

В полярных координатах на плоскости z

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\sigma_1 T},$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \omega_1 T + m 2\pi,$$

где m — любое целое число.

На рис. 12.10 представлены отображения некоторых характерных точек и областей из p-плоскости на z-плоскость. Точка

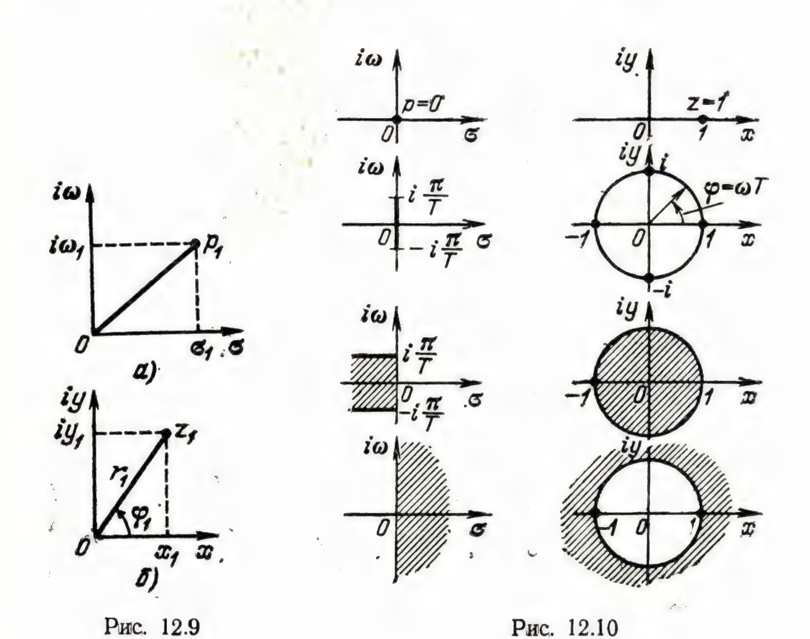


Рис. 12.9

Рис. 12.10

$p=0$ переходит в точку $z=1$ на действительной оси z-плоскости. При движении точки p-плоскости вдоль оси $i\omega$ (т. е. при $\sigma=0$) соответствующая ей точка z-плоскости описывает окружность единичного радиуса. Один полный оборот радиуса-вектора соответствует изменению частоты ω в интервале от ω_1 до $\omega_1+2\pi/T$.

При движении точки p_1 вдоль оси $i\omega$ в пределах от $-i\infty$ до $i\infty$ точка z_1 описывает бесконечно большое число окружностей. Таким образом, взаимно однозначное отображение p на z существует только для полосы p-плоскости между $\pm i\pi/T$. Внутри этой полосы левая полуплоскость отображается внутрь единичного круга. Все параллельные полосы такой же ширины в левой полуплоскости соответствуют этому же кругу. Правая полуплоскость p преобразуется во всю z-плоскость, исключая единичный круг.

12.5.2. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Преобразованию Лапласа дискретного сигнала [см. (2.111)] соответствует функция

$$\hat{\mathbf{S}}(z)=\mathbf{S}_T(p)\big|_{p=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{k=0}^{\infty}s[k]\,z^{-k}, \qquad (12.20)$$

которую будем называть **прямым z-преобразованием** (односторонним).

Ряд (12.20) сходится для $|z|>r_0$ и расходится для $|z|<r_0$, где r_0 — радиус сходимости. Действительное число r_0 определяется из условия $cr_0^k>|s[k]|$, $k=0, 1, 2, \ldots$, $c>0$ — постоянное действительное число.

Для $|z|>r_0$ z-преобразование $\mathbf{S}(z)$ является аналитической функцией переменной z. С помощью аналитического продолжения функция $\hat{\mathbf{S}}(z)$ может быть распространена на всю плоскость, а выражение (12.20) справедливо только в области сходимости.

В случае ограниченной последовательности $s[k]$, $0\leqslant k<N$, для сходимости ряда достаточно $|s[k]|<\infty$. При этом z может принимать любые значения, кроме $z=0$.

На окружности единичного радиуса в z-плоскости переменная $z=e^{i\omega T}$. Подставив эту переменную в (12.20) и учтя (2.110), получим важное соотношение

$$\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})=\sum_{k=0}^{\infty}s[k]\,e^{-i\omega kT}=\mathbf{S}_T(\omega). \qquad (12.21)$$

Итак, $\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})$ есть не что иное, как спектральная плотность $\mathbf{S}_T(\omega)$ сигнала $s(t)$, дискретизованного с шагом T.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что ДПФ S[n] N отсчетов сигнала $s[k]$ есть значения $\hat{S}(z)$, равномерно расположенные в N точках $z=e^{i\frac{2\pi}{N}n}$ на окружности единичного радиуса в плоскости z.

Учитывая периодичность функций $S_T(\omega)$ и S[n], можно ограничиваться только одним обходом по указанной окружности.

Найдем z-преобразования для некоторых распространенных в теории сигналов временных функций $s(t)$.

1. Последовательность отсчетов из затухающей экспоненты $s(t)=e^{-\alpha t}$, $t\geqslant 0$, $\alpha>0$. В этом случае

$$s[k]=e^{-\alpha kT}=b^k, \quad b=e^{-\alpha T}<1,$$

$$\hat{S}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(bz^{-1})^k.$$

Наложим условие $|bz^{-1}|<1$. Тогда можно применить формулу геометрической прогрессии

$$\hat{S}(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-b}. \tag{12.22}$$

Нуль функции $\hat{S}(z)$ в точке $z_0=0$, полюс в точке $z_п=b<1$, радиус сходимости $r_0=|z_п|=b$, область сходимости $|z|>b$.

Отметим, что расположение полюса вне круга $r=1$ (при $b<1$) соответствует тому, что выражение (12.22) является z-преобразованием отсчетов из нарастающей экспоненты ($\alpha<0$), не имеющей физического смысла.

На окружности единичного радиуса z-преобразование (12.22) определяет спектр дискретизованного сигнала

$$\hat{S}(e^{i\omega T})=S_T(\omega)=1/(1-be^{i\omega T}). \tag{12.23}$$

Модуль этой функции (АЧХ спектра)

$$S_T(\omega)=1/\sqrt{1-2b\cos\omega T+b^2}. \tag{12.23'}$$

График АЧХ для некоторых значений параметра b представлен на рис. 12.11.

2. Последовательность отсчетов из единичного скачка $s(t)=1$, $t\geqslant 0$. Этот сигнал можно рассматривать как частный случай предыдущего примера при $\alpha=0$ ($b=1$)

$$s[k]=1[k]=\begin{cases}1 & \text{при } k\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } k<0.\end{cases}$$

Подставляя в (12.22) $b=1$, получаем

$$\hat{S}(z)=1/(1-z^{-1})=z/(z-1). \tag{12.24}$$

Спектральная плотность $S_T(\omega)=1/(1-e^{-i\omega T})$ на частотах $\omega=n2\pi/T$, n — целое число, обращается в бесконечность.

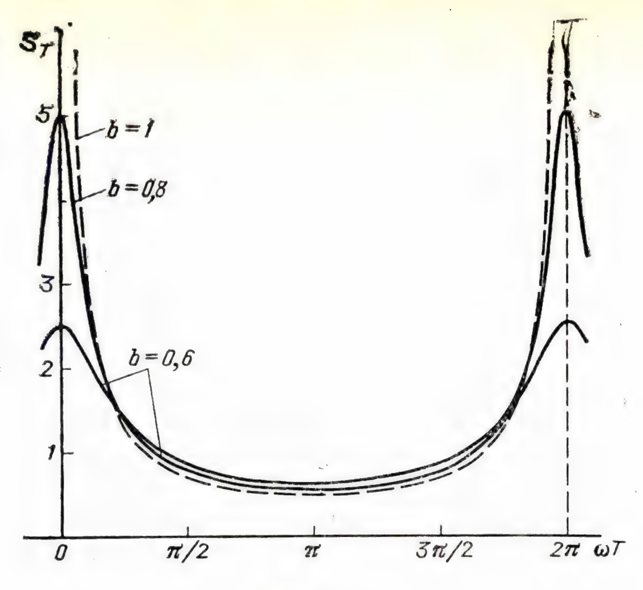


Рис. 12.11

Для уточнения структуры спектра дискретизованного скачка обратимся к исходной функции $s(t)=1$, $t\geqslant 0$, и представим ее в виде суммы $s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ (см. § 2.10, пример 3).

Спектральная плотность постоянной составляющей 1/2 равна $\pi\delta(\omega)$ [см. (2.96)], а после дискретизации этой составляющей во времени с шагом T спектральная плотность будет

$$\frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n2\pi/T) \text{ [см. (2.109)].}$$

Таким образом, полная спектральная плотность дискретизованного скачка

$$\mathbf{S}_T(\omega)=\frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n2\pi/T)+\frac{1}{1-e^{-i\omega T}}. \qquad (12.24')$$

Второе слагаемое в правой части определяет спектральную плотность дискретизованной функции $^1/_2\operatorname{sgn}(t)$ на всех частотах, кроме $\omega=n2\pi/T$, а первое слагаемое — именно на **этих** частотах.

На интервале $0<\omega T<2\pi$ АЧХ спектра определяется выражением $1/|1-e^{i\omega T}|=1/2\sin(\omega T/2)$.

На рис. 12.11 график этой функции представлен штриховой линией (при $\alpha T=0$ $b=1$) [функция $\frac{\pi}{T}\delta(\omega)$ на рисунке не показана].

3. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$, $t\geqslant 0$, $\alpha>0$. В этом случае

$$s[k]=e^{-\alpha kT}\cos\omega_0 kT=\frac{b^k}{2}e^{i\omega_0 kT}+\frac{b^k}{2}e^{-i\omega_0 kT},$$

где $b=e^{-\alpha T}$.

Применяя (12.20) получаем

$$\hat{S}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(be^{i\omega_0 T}z^{-1})^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(be^{-i\omega_0 T}z^{-1})^k.$$

При $b<1$ по формуле геометрической прогрессии

$$\hat{S}(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-be^{i\omega_0 T}z^{-1})}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-be^{-i\omega_0 T}z^{-1})}=$$

$$=\frac{z(z-b\cos\omega_0 t)}{z^2-2bz\cos\omega_0 T+b^2}. \qquad (12.25)$$

Нули: $z_{01}=0$, $z_{02}=b\cos\omega_0 T$.

Полюсы: $z_{п\ 1,2}=b(\cos\omega_0 T\pm i\sin\omega_0 T)$.

Радиус сходимости ряда (12.25) $r_0=|z_{п\ 1,2}|=b$, а область сходимости $|z|>b$.

В табл. 12.1 приведены Z-преобразования рассмотренных, а также других распространенных сигналов.

Таблица 12.1

NN	$s[k],\quad k\geqslant 0$	$\hat{S}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s[k]z^{-k}$
1	$\delta[k]$	1
2	$1[k]$	$z/(z-1)$
3	k	$z/(z-1)^2$
4	k^2	$z(z+1)/(z-1)^3$
5	b^k	$z/(z-b)$
6	kb^{k-1}	$z/(z-b)^2$
7	$\frac{k(k-1)}{2}b^{k-2}$	$\frac{z}{(z-b)^3}$
8	$\frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{l!}b^{k-l}$	$\frac{z}{(z-b)^{l+1}}$
9	$Ab^k\sin ak$	$\frac{Abz\sin a}{z^2-2bz\cos a+b^2}$
10	$Ab^k\cos ak$	$\frac{Az(z-b\cos a)}{z^2-2bz\cos a+b^2}$
11	$\frac{a^k-b^k}{a-b}\ (a\neq b)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$

12.5.3. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Применим z-преобразование к передаточной функции дискретной системы. Подстановка $e^{pT}=z$ в выражение (12.11) дает

$$\hat{K}(z)=\frac{\hat{S}_{\text{вых}}(z)}{\hat{S}(z)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{H} a_k z^{-k}}{1-\sum\limits_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}. \quad (12.26)$$

Из этого выражения видно, что передаточная функция дискретной системы является дробно-рациональной. По заданному выражению (12.26) легко составить разностное уравнение вида (12.4), определяющее алгоритм преобразования входного дискретного сигнала в выходной. Для этого каждому из слагаемых вида $s[m-k]$ в уравнении (12.4) достаточно приписать коэффициент a_k при степени z^{-k} в числителе, а слагаемым вида $s_{\text{вых}}[m-k]$ — коэффициент b_k при степени z^{-k} в знаменателе выражения (12.26). Соответственно по заданному разностному уравнению можно составить выражение (12.26).

Следует, однако, отметить, что не всякая дробно-рациональная функция может быть реализована в виде передаточной функции системы.

Пусть, например, передаточная функция задана в виде отношения полиномов по положительным степеням

$$\hat{K}(z)=\frac{a_0 z^{H}+a_1 z^{H-1}+\ldots+a_H}{b_0 z^{M}-b_1 z^{M-1}-\ldots-b_M}. \quad (12.26')$$

Разделив числитель и знаменатель на $b_0 z^M$, приведем это выражение к виду

$$\hat{K}(z)=\frac{\frac{a_0}{b_0} z^{H-M}+\frac{a_1}{b_0} z^{H-M-1}+\ldots+\frac{a_H}{b_0} z^{M}}{1-\frac{b_1}{b_0} z^{-1}-\ldots-\frac{b_M}{b_0} z^{-M}}.$$

Если $H>M$, то первое слагаемое в числителе (с положительной степенью z) образует в уравнении (12.4) слагаемое вида $(a_0/b_0)s[m+k]$, где $k=H-M>0$, соответствующее импульсу $s[m+k]$, который опережает во времени входной импульс $s[m]$, что, конечно, невозможно. Отсюда следует, что фильтр осуществим при условии, что степень знаменателя в (12.26′) больше или равна степени числителя.

С учетом этих замечаний запишем передаточную функцию в следующих эквивалентных формах (при $b_0=1$):

$$\hat{\mathbf{K}}(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_Mz^{-H}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}-\ldots-b_Mz^{-M}}=$$

$$=\frac{z^{M-H}(a_0z^H+a_1z^{H-1}+a_2z^{H-2}+\ldots+a_M)}{z^M-b_1z^{M-1}-b_2z^{M-2}-\ldots-b_M}; \qquad (12.27)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(z)=a_0z^{M-H}\frac{(z-z_{01})(z-z_{02})\ldots(z-z_{0H})}{(z-z_{\text{п}1})(z-z_{\text{п}2})\ldots(z-z_{\text{п}M})}. \qquad (12.28)$$

В выражении (12.27) коэффициенты a_k и b_k следует подставлять с теми же знаками, с которыми они входят в (12.4).

В выражении (12.28) z_{0n} — нули, а $z_{\text{п}n}$ — полюсы передаточной функции; z_{0n} и $z_{\text{п}n}$ могут быть либо действительными, либо комплексными числами. В первом случае они расположены на действительной оси, а во втором образуют комплексно-сопряженные пары.

Нули могут быть расположены в любой точке плоскости z, полюсы же — только *внутри круга единичного радиуса.* Это условие вытекает из требования устойчивости цепи; при рассмотрении поведения передаточной функции на плоскости p условие устойчивости требует расположения полюсов в левой полуплоскости. Как отмечалось выше, левая полуплоскость p отображается внутрь единичного круга на плоскости z.

Для перехода от функции $\hat{\mathbf{K}}(z)$ к функции $\mathbf{K}_T(i\omega)$ следует, как это вытекает из (12.21), приравнять $z=e^{i\omega T}(\sigma=0)$.

Таким образом,

$$\mathbf{K}_T(i\omega)=\frac{a_0+a_1e^{-i\omega T}+a_2e^{-i2\omega T}-\ldots+a_He^{-iH\omega T}}{1-b_1e^{-i\omega T}-b_2e^{-i2\omega T}-\ldots-b_Me^{-iM\omega T}}=$$

$$=a_0z^{M-H}\frac{(e^{i\omega T}-z_{01})(e^{i\omega T}-z_{02})\ldots(e^{i\omega T}-z_{0H})}{(e^{i\omega T}-z_{\text{п}1})(e^{i\omega T}-z_{\text{п}2})\ldots(e^{i\omega T}-z_{\text{п}M})}. \qquad (12.29)$$

Для определения АЧХ цепи в диапазоне $(0{,}2\,\pi/T)$ следует вычислить модуль выражения (12.29) при изменении ωT от 0 до 2π, т. е. при одном обходе окружности единичного радиуса на z-плоскости. При последующих обходах окружности АЧХ периодически повторяется.

Модули разностей $e^{i\omega T}-z_{0k}$ и $e^{i\omega T}-z_{\text{п}k}$ являются расстояниями от точки на окружности, соответствующей углу ωT, до нуля z_{0k} или полюса $z_{\text{п}k}$. Обозначив эти расстояния через R_{0k} и $R_{\text{п}k}$, получим для АЧХ формулу

$$K_T(\omega)=a_0\frac{R_{01}R_{02}\ldots R_{0H}}{R_{\text{п}1}R_{\text{п}2}\ldots R_{\text{п}M}}, \qquad (12.30)$$

удобную для графических вычислений.

Вычисления особенно упрощаются при построении АЧХ в логарифмическом масштабе:

$$K_T(\omega)_{\text{дБ}} = 20\left[\lg a_0 + \sum_{k=1}^{H} \lg R_{0k} - \sum_{k=1}^{M} \lg R_{\text{п}k}\right]. \quad (12.31)$$

Если заданы нули и полюсы передаточной функции, то коэффициенты a_k и b_k легко определяются с помощью известных из алгебры соотношений. Значительно более сложной (при $M>2$) задачей является определение нулей и полюсов по заданным коэффициентам a_k и b_k.

Передаточная функция может быть определена также как z-преобразование импульсной характеристики фильтра

$$\hat{\mathbf{K}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]\, z^{-k}. \quad (12.32)$$

На окружности единичного радиуса ($z=\text{e}^{-i\omega T}$) выражение (12.32) переходит в

$$\mathbf{K}(\text{e}^{i\omega T}) = \mathbf{K}_T(i\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]\,\text{e}^{-i\omega kT}. \quad (12.33)$$

12.5.4. ОБРАТНОЕ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ДВУСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Отыскание оригинала, т. е. функции $s[k]$, по заданному изображению $\hat{\mathbf{S}}(z)$ [или $g[k]$ по заданной передаточной функции $\hat{\mathbf{K}}(z)$] производится с помощью обратного z-преобразования, которое получается подстановкой $\text{e}^{pT}=z$ в обратное преобразование Лапласа. Основываясь на выражении (2.113) и подставляя в него

$\mathbf{S}_T(p) = \hat{\mathbf{S}}(z)$, $\text{e}^{pkT} = z^k$ и $dp = \frac{1}{Tz}dz$, получаем

$$s[k] = T\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\text{e}^{cT}} \hat{\mathbf{S}}(z)\, z^k \frac{dz}{Tz} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\text{e}^{cT}} \hat{\mathbf{S}}(z)\, z^{(k-1)} dz. \quad (12.34)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $r=\text{e}^{cT}$, в которую преобразуется прямая $\sigma=c$ из плоскости $p=\sigma+i\omega$. Постоянная c определяется из условия, что все полюсы подынтегральной функции находятся внутри круга радиуса $r=\text{e}^{cT}$. Обход контура — в положительном направлении (против часовой стрелки). Изменению частоты от $-\pi/T$ до π/T соответствует один обход окружности.

В тех случаях, когда полюсы функции $\hat{\mathbf{S}}(z)$ расположены на окружности единичного радиуса, постоянная $c>0$ может быть сколь угодно малой. Поэтому контур интегрирования можно

свести к окружности радиуса $r=1$ с обходом полюсов вне круга, подобно тому, как на плоскости $p=\sigma+i\omega$ интегрирование ведется по оси $i\omega$ с обходом полюсов, лежащих на этой оси, справа.

С учетом этого условия выражение (12.34) можно записать в форме

$$s[k]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\hat{\mathbf{S}}(z)\,z^{(k-1)}dz. \tag{12.35}$$

Аналогичное выражение имеет место для $g[k]$ при замене $\hat{\mathbf{S}}(z)$ на $\hat{\mathbf{K}}(z)$.

Интегрирование по окружности $r>1$ из дальнейшего рассмотрения исключается, поскольку положение полюсов функции $\hat{\mathbf{S}}(z)$ вне круга $r=1$ соответствует неограниченно возрастающим временным последовательностям, не имеющим физического смысла (см. также пример 1 в п. 12.5.2).

Заметим, что при интегрировании по окружности $|z|=1$ имеет место равенство $z=\mathrm{e}^{i\omega T}$, что позволяет с помощью соотношения $dz=iT\mathrm{e}^{i\omega T}d\omega$ привести выражение (12.35) к виду

$$s[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\mathbf{S}}(\mathrm{e}^{i\omega T})\,\mathrm{e}^{i\omega kT}d(\omega T). \tag{12.36}$$

Обратимся к двустороннему z-преобразованию. Запишем его в форме, аналогичной (12.20):

$$\hat{\mathbf{S}}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s[k]\,z^{-k}.$$

Можно, очевидно, представить его в виде

$$\hat{\mathbf{S}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s[k]\,z^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}s[k]\,z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}s[k]\,z^{-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}s[-k]\,z^{k}-s[0]. \tag{12.37}$$

Первая сумма является односторонним z-преобразованием, которое сходится при $|z|>r_1$, где $r_1\geqslant|s[k]|^{1/k}$ при любых $k\geqslant0$ [см. комментарий к формуле (2.20)]. Вторая сумма сходится при $|z|<r_2$, где $r_2\leqslant|s[-k]|^{1/k}$, $|k|>0$. Таким образом, область сходимости двустороннего z-преобразования является кольцом с внутренним радиусом r_2 и внешним радиусом r_1; эта область включает в себя окружность единичного радиуса $(z=\mathrm{e}^{i\omega T})$.

Напомним, что область сходимости двустороннего преобразования Лапласа представляет собой вертикальную полосу, включающую ось $i\omega$ (см. рис. 2.22).

Особый интерес представляет двустороннее z-преобразование чётных функций времени, например корреляционных функций действительного сигнала (процесса). Так, для стационарного случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $R_x[0]\exp(-\alpha|\tau|)$ и энергетическим спектром $W_x(\omega)$ после дискретизации $x(t)$ с шагом T корреляционная функция принимает вид последовательности $R_x[0]\exp(-\alpha|m|T)$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$

В соответствии с (12.20), (12.37) и с учетом равенства $R_x[-m]=R_x[m]$ двустороннее z-преобразование принимает вид

$$\hat{W}_x(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]z^{-m}=$$

$$=R_x[0]\left[\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\alpha T}z^{-m}+\sum_{m=0}^{\infty} e^{-|m|\alpha T}z^{m}-1\right]. \qquad (12.38)$$

Первая сумма, как и в п. 12.5.2 [формула (12.22)], равна $1/(1-e^{-\alpha T}z^{-1})=z/(1-e^{-\alpha T})=z/(1-b)$, а вторая сумма $1/(1-e^{-\alpha T})z=z^{-1}/(z^{-1}-b)$, где $b=e^{-\alpha T}$.

После несложных преобразований приходим к следующему результату:

$$\hat{W}_x(z)=R_x[0]\frac{b^{-1}-b}{(b+b^{-1})-(z+z^{-1})}=$$

$$=R_x[0]\frac{e^{\alpha T}-e^{-\alpha T}}{(e^{\alpha T}+e^{-\alpha T})-(z+z^{-1})}, \quad e^{-\alpha T}<z<e^{\alpha T}.$$

Переходя к переменной $z=e^{i\omega T}$ и учитывая, что $\hat{W}_x(e^{i\omega T})$ есть не что иное, как энергетический спектр $W_{xT}(\omega T)$ дискретизованного процесса $x(t)$, получаем

$$W_{xT}(\omega T)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m]e^{-im\omega T}=$$

$$=R_x[0]\frac{b^{-1}-b}{b^{-1}+b-2\cos\omega T}=R_x[0]\frac{(1-b^2)}{1+b^2-2b\cos\omega T}, \qquad (12.39)$$

Итак, дискретизованному случайному процессу $x(t)$ соответствует сплошной энергетический спектр с периодической структурой, с периодом $1/T$.

Исследуем поведение функции $W_{xT}(\omega T)$ в интервале $-\pi<\omega T<\pi$. В точке $\omega T=0$ $W_{xT}(0)=R_x[0]\frac{1+b}{1-b}$, а в точках $\omega T=\pm\pi$ $W_{xT}(\pi)=R_x[0]\frac{1-b}{1+b}$.

Отношение $W_{xT}(\pi)/W_{xT}(0)=\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2$. В частном случае $b=0{,}8$; $\alpha T\approx0{,}2$ это отношение равно 1/81 и перекрытием

парциальных спектров в выражении (2.109) можно пренебречь. При этом

$$W_{xT}(0)=R_x[0]\frac{1,8}{0,2}=\frac{W_x(0)\,\alpha}{2}9=\frac{W_x(0)}{T}\,\frac{\alpha T}{2}9=W_x(0)/T.$$

Таким образом, при незначительном перекрытии спектров можно исходить из простого соотношения

$$W_{xT}(\omega T)\approx W_x(\omega)/T.$$

12.6. ЦИФРОВОЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрим АЧХ рекурсивного фильтра второго порядка, представленного на рис. 12.12. В соответствии с (12.26) передаточная функция подобного фильтра

$$\hat{\mathrm{K}}(z)=\frac{1}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}=\frac{z^2}{(z-z_{п1})(z-z_{п2})}. \qquad (12.40)$$

Рассматриваемая функция $\hat{\mathrm{K}}(z)$ обладает одним нулем (двукратным) в точке $z=0$ и двумя полюсами в точках $z_{п1,2}$, являющихся корнями уравнения

$$z^2-b_1z-b_2=0.$$

Таким образом,

$$z_{п1,2}=b_1/2\pm\sqrt{(b_1/2)^2+b_2}.$$

При $b_2<0$ и, кроме того, $|b_2|>b_1^2/4$ полюсы $z_{п1}$ и $z_{п2}$ — комплексно-сопряженные числа:

$$z_{п1}=b_1/2+i\sqrt{|b_2|-b_1^2/4},\quad z_{п2}=z^*_{п1}. \qquad (12.41)$$

В этом случае

$$(z-z_{п1})(z-z_{п2})=z^2-2\mathrm{Re}(z_{п1,2})z+|z_{п1,2}|^2, \qquad (12.42)$$

откуда вытекают следующие выражения для коэффициентов b_1 и b_2 в знаменателе (12.40):

$$b_1=2\mathrm{Re}(z_{п1,2}),\ b_2=-|z_{п1,2}|^2. \qquad (12.43)$$

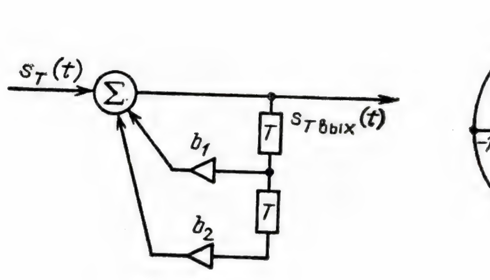


Рис. 12.12

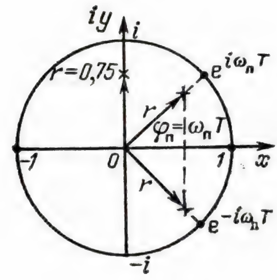


Рис. 12.13

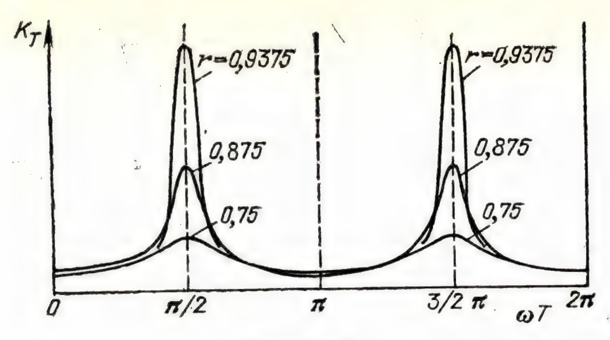


Рис. 12.14

Подставив $z_{п1,2}$ в форме

$$z_{п1,2}=|z_{п1,2}|\,e^{\pm i\omega_п T}=re^{\pm i\varphi_п}, \qquad (12.44)$$

где $r=|z_{п1,2}|$ — расстояние полюса от начала координат, а $\varphi_п=\omega_п T$ — азимут полюса (рис. 12.13), получим

$$b_1=2r\cos\omega_п T,\;\; b_2=-r^2. \qquad (12.45)$$

Для определения АЧХ рассматриваемой цепи подставим в (12.40) $z=e^{i\omega T}$ и возьмем модуль:

$$|\hat{K}(e^{i\omega T})|=K_T(\omega)=1/|(e^{i\omega T}-re^{i\omega_п T})(e^{i\omega T}-re^{-i\omega_п T})|. \qquad (12.46)$$

Видно, что при изменении частоты от $\omega T=0$ до $\omega T=2\pi$ АЧХ достигает максимума при $\omega T=\omega_п T$ и $\omega T=2\pi-\omega_п T$, когда первый или второй множитель обращается в $1/(1-r)$. На рис. 12.14 приведена АЧХ для $\omega_п T=90°$ при значениях $r=0{,}75$; 0,875 и 0,9375.

С приближением r к единице АЧХ фильтра приближается к резонансной кривой высокодобротного колебательного контура. При этом, однако, возникает опасность потери устойчивости режима фильтра из-за накопления ошибки округления (при недостаточно высокой разрядности АЦП).

12.7. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Переход от действительных весовых коэффициентов к комплексным придает фильтрам новые свойства, важные для обработки комплексных сигналов.

Для выяснения сути дела обратимся к простому рекурсивному фильтру первого порядка с передаточной функцией $\hat{K}(z)=1(1-b_1z^{-1})$ и подставим в это выражение вместо b_1 комплексный коэффициент $\dot{b}_1=b_x+ib_y=re^{i\omega_n T}$:

$$\hat{K}(z)=1/(1-\dot{b}_1z^{-1})=1/(1-z_пz^{-1})=z/(z-z_п), \qquad (12.47)$$

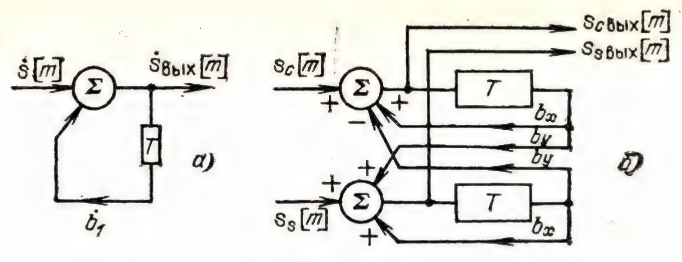


Рис. 12.15

где $z_п = \dot{b}_1 = re^{i\omega_п T}$ — единственный полюс, который может быть расположен в любой точке внутри единичного круга $r<1$ (условие устойчивости). Угол $\omega_п T$ может быть любым в интервале от $-\pi$ до π.

Сигнал на входе фильтра зададим в виде последовательности отсчетов $\{\dot{s}[m]\}$, взятых из соответствующего комплексного континуального сигнала $\dot{s}(t) = s_c(t) + is_s(t)$.

Схема замещения рассматриваемого фильтра показана на рис. 12.15,*а*. Для построения развернутой схемы исходим из разностного уравнения [см. (12.4)]

$$\dot{s}_{вых}[m] = \dot{s}[m] + \dot{b}_1 \dot{s}_{вых}[m-1].$$

Подставляя $\dot{b}_1 = b_x + ib_y$ и $\dot{s}[m] = s_c[m] + is_s[m]$, приходим к алгоритму

$$s_{cвых}[m] + is_{sвых}[m] = s_c[m] + b_x s_{cвых}[m-$$
$$-1] - b_y s_{sвых}[m-1] + i\{s_s[m] +$$
$$+ b_y s_{cвых}[m-1] + b_x s_{cвых}[m-1]\}.$$

Этот алгоритм реализуется схемой, представленной на рис. 12.15, *б*.

Обратимся теперь к выражению (12.47) и подставим $z = e^{i\omega T}$, а также $z_п = re^{i\omega_п T}$. В результате получим

$$\hat{K}(e^{i\omega T}) = \frac{1}{1 - re^{i\omega_п T} e^{-i\omega T}} = \frac{1}{1 - re^{-i(\omega-\omega_п)T}},$$

откуда следует простое выражение для АЧХ фильтра

$$|\hat{K}(e^{i\omega T})| = 1/\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \omega_п)T}.$$

Максимальное значение АЧХ$=1/(1-r)$ соответствует частоте $\omega = \omega_п$. Существенно, что при заданном r значение максимума АЧХ не зависит от резонансной частоты $\omega_п T$.

График АЧХ при показанном на рис. 12.16,*а* положении полюса $z_п$, соответствующем $\omega > 0$, представлен на рис. 12.16,*б*. При изменении знака перед b_x, т. е. при положении полюса ниже оси x, полоса прозрачности фильтра будет в диапазоне

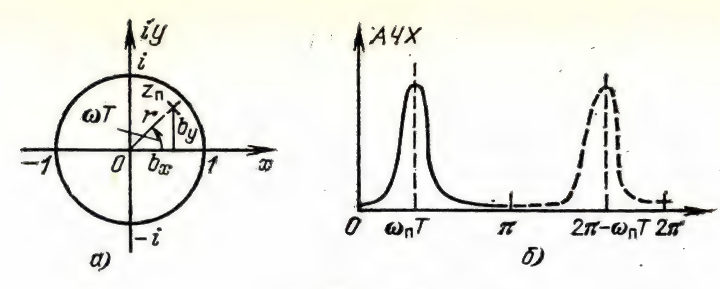


Рис. 12.16

$\omega<0$ или, что то же самое, в диапазоне $\pi\leqslant\omega T\leqslant 2\pi$ (на рис. 12.16,*б* АЧХ обозначена штриховой линией).

Итак, однополюсный резонатор, т. е. рекурсивный фильтр первого порядка с комплексным коэффициентом b_1, позволяет осуществить фильтр, реагирующий либо только на положительную, либо только на отрицательную частоту. С понятием колебания отрицательной частоты как с физическим процессом мы встретимся в § 13.8 при рассмотрении квадратурной обработки сигнала.

12.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛОГ—ЦИФРА. ШУМЫ КВАНТОВАНИЯ

В предыдущих параграфах при изучении дискретных фильтров вопрос о неизбежной погрешности преобразования входного сигнала из аналоговой формы в цифровую не рассматривался. Погрешность возникает при квантовании сигнала на конечное, ограниченное число уровней. Чтобы выявить характер этой погрешности, вернемся к структурной схеме на рис. 12.1 и выделим из нее два устройства: АЦП и ЦАП.

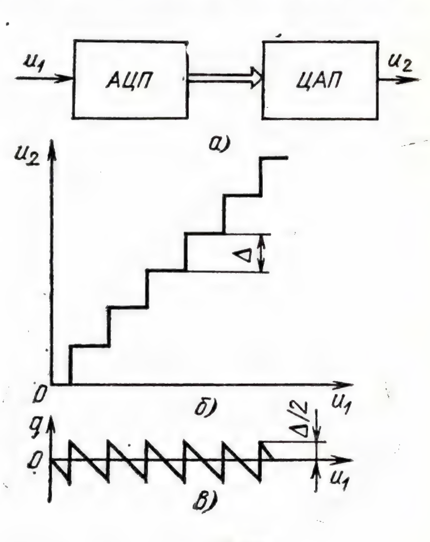


Рис. 12.17

Рассмотрим сначала совместную работу этих устройств без учета цифрового фильтра при подаче на вход АЦП постоянного напряжения различного уровня u_1 (рис. 12.17, *а*). Основным параметром АЦП является число разрядов, используемых для кодирования входного напряжения. При числе двоичных элементов r на выходе АЦП

получается комбинация (кодовое число) из r символов, каждый из которых может принимать одно из двух значений (нуль или единица).

Как указывалось в § 12.1, число возможных различных комбинаций $L=2^r$ и определяет число дискретных уровней, на которое может быть разбит диапазон изменения входного напряжения.

В ЦАП осуществляется обратное преобразование. Каждой комбинации нулей и единиц, поступающих на вход ЦАП, соответствует определенный дискретный уровень выходного напряжения. В результате при равномерном шаге квантования Δ зависимость u_2 от u_1 приобретает вид ломаной линии, показанной на рис. 12.17, *б*.

Устройство, представленное на рис. 12.17, *а* и обладающее подобной характеристикой, должно рассматриваться как нелинейное, а разность $u_2-u_1=q$ — как ошибка, погрешность квантования. Видно, что наибольшая ошибка, по абсолютной величине не превышающая $\Delta/2$, с возрастанием u_1 остается неизменной (рис. 12.17, *в*).

Продолжим это рассмотрение для гармонического входного колебания $s(t)$ (рис. 12.18, *а*). Колебание $s_{вых}(t)$ приобретает ступенчатую форму, отличающуюся от входного колебания $s(t)$ (на рис. 12.18, *б*, показанного тонкой линией), а ошибка квантования определяется функцией

$$q(t)=s_{вых}(t)-s(t),$$

представленной на рис. 12.18, *в*.

При изменении в широких пределах амплитуды и частоты гармонического колебания $s(t)$ изменяется только частота следования зубцов: форма их остается близкой к треугольной при неизменной амплитуде $\Delta/2$. Функцию $q(t)$ можно назвать помехой или ш у м о м к в а н т о в а н и я. Нетрудно вычислить среднюю мощность шума квантования. При треугольной форме зубцов (рис. 12,18, *в*) с амплитудой $\Delta/2$ средняя за длительность одного зубца мощность равна $(1/3)(\Delta/2)^2=\Delta^2/12$. Так как эта величина не зависит от длительности зубца, можно считать, что средняя мощность шума квантования

$$P_q=\Delta^2/12. \qquad (12.48)$$

Этот результат, выведенный для гармонического сигнала, можно распространить на любой другой сигнал, в том числе и случайный. Отличие лишь в том, что функция $q(t)$ будет случайным процессом из-за случайной длительности зубцов.

Нетрудно вычислить и отношение сигнал—помеха при квантовании. При высоте ступени Δ и общем числе ступеней, укладывающихся в пределах характеристики АЦП, равном L, амплитуда гармонического сигнала не должна превышать величину $L\Delta/2$, а средняя мощность сигнала — величину $^1/_2(L\Delta/2)^2$ (во избежание ограничения сигнала). Следовательно, отноше-

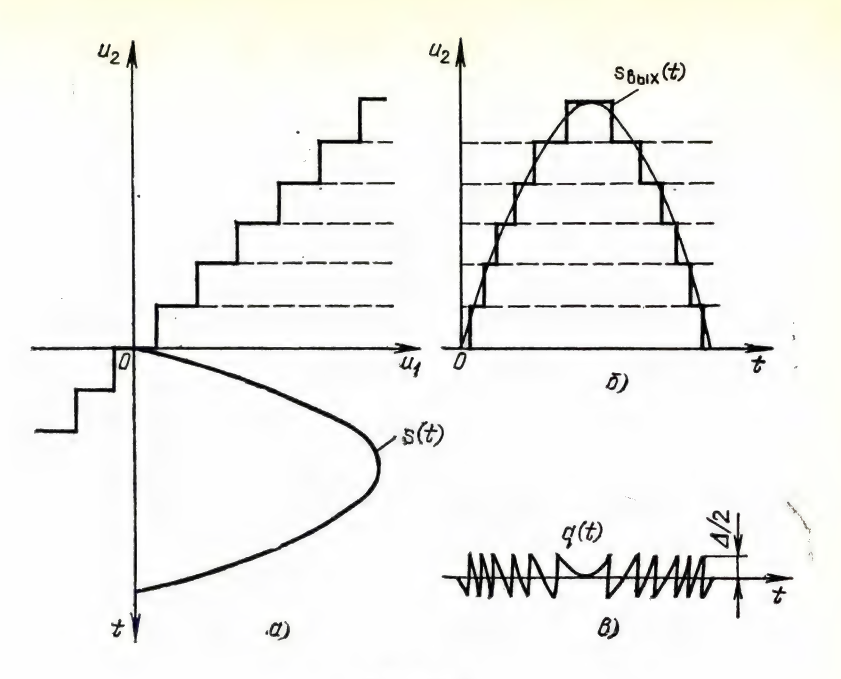


Рис. 12.18

ние сигнал—помеха при квантовании гармонического сигнала

$P_s/P_q \leqslant 3L^2/2.$

Так как число ступеней L связано с числом двоичных разрядов r соотношением $L=2^r$, то последнее выражение можно представить в форме

$$P_s/P_q = (3/2)\,2^{2r}, \qquad (12.49)$$

которую можно рассматривать как частный случай общего выражения

$$P_s/P_q = 3\cdot 2^{2r}/K_{пф}^2, \qquad (12.50)$$

где $K_{пф}$ — пикфактор сигнала, т. е. отношение максимального значения к среднеквадратическому.

При гармоническом колебании $K_{пф}=\sqrt{2}$, что и приводит к выражению (12.49). При случайном сигнале с нормальным законом распределения $K_{пф}$ может быть принят 2,5—3 (см. § 4.2, п. 3); В этом случае $P_s/P_q \approx 2^{2r}/3$, а среднеквадратическое напряжение сигнала не должно превышать $\sim L\Delta/6$. Физический смысл выражения (12.50) очевиден: с увеличением числа разрядов r очень быстро возрастает число дискретных уровней, приходящихся на заданный диапазон изменения $s(t)$, и, следовательно, снижается перепад Δ двух соседних уровней.

При грубой оценке превышения сигнала над шумом кванто-

вания исходят из соотношения $P_s/P_q \approx 2^{2r}$ или, в децибелах,

$$D_{\text{дБ}} = (P_s/P_q)_{\text{дБ}} = 10\lg 2^{2r} = 10 \cdot 2r \lg 2 \approx 6r. \qquad (12.51)$$

В современных АЦП число разрядов достигает десяти и более. При этом величина $D_{\text{дБ}}$, характеризующая динамический диапазон АЦП, равна примерно 60 дБ (6 дБ на один разряд)[1].

Другой важной характеристикой шума квантования является его спектральная плотность. При гармоническом колебании на входе АЦП помеха квантования представляет собой периодическую функцию времени. Спектр ее является линейчатым, содержащим только составляющие с частотами, кратными частоте входного колебания. Из-за зубчатой формы функции $q(t)$ (рис. 12.18, *в*) спектр шума богат высшими гармониками.

При входном воздействии типа случайного процесса с дисперсией σ_s^2 статические характеристики шума квантования зависят не только от характеристик исходного процесса $s(t)$, но и от соотношения между σ_s и Δ. В частности, при $\sigma_s \gg \Delta$ ширина f_q спектра шума квантования $W_q(\omega)$ во много раз больше ширины f_s спектра процесса $s(t)$.

Введем в рассмотрение дискретизацию входного сигнала. На рис. 12.19 представлены одна из реализаций случайного сигнала $s(t)$ и совокупность отсчетов, взятых с шагом T. В АЦП каждый отсчет преобразуется в цифровой код, как было описано в § 12.1 и в начале данного параграфа.

Как это очевидно из предыдущих рассуждений, преобразование осуществляется с ошибкой, заключенной в пределах $\pm\Delta/2$. Если отсчеты берутся из случайного сигнала, и изменение функции $s(t)$ за время T превышает Δ или тем более несколько Δ, то ошибки в различные отсчетные моменты времени nT и $(n+1)T$ можно считать взаимно независимыми и равновероятными. Дисперсия случайной величины q, равновероятной в интервале $(-\Delta/2, \Delta/2)$, равна $(1/3)(\Delta/2)^2$ (см. п. 4.2.1). Этот результат совпадает с выражением (12.48), полученным усреднением мощности шума квантования по времени. Сделанные выше допущения равносильны утверждению, что дискретная последовательность ошибок $q(nT)$ соответствует отсчетам из некоррелированного шума, т. е. шума с равномерным спектром. Этот спектр, как отмечалось выше, во много раз шире спектра исходного

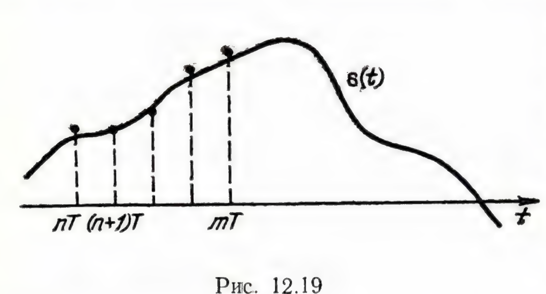


Рис. 12.19

[1] При пикфакторе $K_{\text{пф}} \approx 3$ [(см. 12.50)] $D_{\text{дБ}}$ уменьшается до 5,5 дБ на один разряд.

случайного процесса $s(t)$. В связи с этим шум квантования обычно рассматривают как белый шум, аддитивный по отношению к $s(t)$. Так как квантование осуществляется на входе цифрового фильтра, то шум квантования можно трактовать как собственный шум цифрового фильтра (отнесенный к его входу).

Определим характеристики шума квантования на выходе цифрового фильтра.

Как отмечалось в конце § 12.4, мощность дискретного белого шума в полосе частот $f_1 = 1/T$ равна средней мощности шума на входе, в данном случае $\Delta^2/12$; следовательно, спектральная плотность мощности шума на входе

$$W_q(\omega) = (\Delta^2/12)\,(1/f_1),\ \ 0 < f < f_1. \tag{12.52}$$

При АЧХ цифрового фильтра $K_T(\omega)$ спектр шума квантования на выходе фильтра

$$W_{q\,\text{вых}}(\omega) = (1/12)\,(\Delta^2/f_1)\,K_T{}^2(\omega),\ \ -\omega_1/2 < \omega < \omega_1/2, \tag{12.53}$$

а средняя мощность (дисперсия)

$$\sigma^2_{q\,\text{вых}} = \frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2}{f_1}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} K_T^2(\omega)\,d\omega. \tag{12.54}$$

Для иллюстрации количественной стороны вопроса определим основные параметры шума квантования на выходе режекторного[1] фильтра второго порядка при следующих данных: число разрядов квантования $r=8$; раствор характеристики АЦП 10 В; шаг дискретизации $T = 1/f_1 = 1$ мс; $f_1 = 1000$ Гц.

Шаг квантования Δ найдем, разделив 10 В на число уровней:

$$L = 2^r = 2^8 = 256,\ \ \Delta = 10/256 \approx 0{,}04 = 40\ \text{мВ}.$$

Дисперсия шума на входе

$$\sigma_q{}^2 \approx \Delta^2/12 = (4\cdot 10^{-2})^2/12 \approx 1{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{В}^2,\ \sigma_q \approx 1{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{В} = 11\ \text{мВ}.$$

Основываясь на АЧХ $K_T(\omega) = 4\sin^2(\omega T/2)$, находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} K_T^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} 16\sin^4\frac{\omega T}{2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,16\cdot 2\left(\frac{2}{T}\right)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = \frac{2\cdot 3}{T}.$$

---

[1] Имеется в виду трансверсальный фильтр с передаточной функцией $\mathrm{K}_T(i\omega) = a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T}$ [см. (12.9)]. При $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ и $a_2 = 1$

$$K_T(\omega) = 2\,|\cos\omega T - 1\,| = 4\sin^2(\omega T/2).$$

По формуле (12.54) получаем

$$\sigma_{q\,\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{12}\,\frac{1}{f_1}\,\frac{6}{T} = \frac{\Delta^2}{2}, \quad \sigma_{q\,\text{вых}} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \approx 26\ \text{мВ}.$$

Итак, уровень собственных шумов квантования на выходе рассматриваемого фильтра равен 26 мВ.

Форма спектра этого шума повторяет форму АЧХ во второй степени

$$W_{q\,\text{вых}}(\omega) \approx \frac{\Delta^2}{12}\,16 \sin^4 \frac{\omega T}{2} \approx 2\cdot 10^{-6} \sin^4 \frac{\omega T}{2}\ \text{В}^2/\text{Гц}.$$

В заключение укажем на требования, предъявляемые к АЦП в зависимости от скорости изменения входного сигнала $s(t)$. Длительность отсчета τ_0 задается малой, чтобы изменение $s(t)$ за время τ_0 было пренебрежимо мало. Во всяком случае, это изменение должно быть меньше Δ. В современных АЦП τ_0 уменьшают до единиц наносекунд, а время запоминания отсчета, необходимое для срабатывания АЦП, составляет десятки наносекунд.

12.9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРА—АНАЛОГ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО СИГНАЛА

Обратное преобразование сигнала из цифровой в континуальную форму производится с помощью двух устройств: 1) ЦАП; 2) синтезирующего фильтра (см. схему на рис. 12.1).

В ЦАП имеются набор источников фиксированных напряжений, соответствующих каждому из r разрядов, и устройство для синхронного подключения (или отключения) этих напряжений к сумматору в зависимости от поступающих из АЦП символов (имеется в виду схема на рис. 12.17, *а*). Напряжение на выходе ЦАП максимально, когда со всех элементов поступают единицы,. Пусть, например, число разрядов $r=4$ и, следовательно, число дискретных уровней $L=2^4=16$, а максимальное напряжение сигнала условно равно 1 В. Тогда цена самого младшего разряда 1/16 В, следующего за ним 1/8 В, затем 1/4 и 1/2 В. При кодовом слове, поступающем от АЦП в виде 0,1111, напряжение на выходе ЦАП будет $1/2+1/4+1/8+$ $+1/16=15/16$ В (максимальное значение), а при слове 0,0001 1/16 (минимальное значение). Кодовому слову 0,0010 соответствует напряжение 2/16 В, слову 0,1000 1/2 В и т. д.

Указанные напряжения поддерживаются на выходе ЦАП в течение времени $\tau_0<T$, а иногда вплоть до поступления новой кодовой группы ($\tau_0=T$). В результате при фильтрации сигнала $s(t)$ на выходе ЦАП появляется напряжение в виде импульсной последовательности, представленной на рис. 12.20 (при $\tau_0<T$). Амплитуды прямоугольных импульсов равны соответ-

ствующим отсчетам, поступающим (в закодированном виде) от АЦП.

Спектр такой последовательности имеет сложную структуру. Фильтр на выходе ЦАП с полосой пропускания, меньшей или равной частоте $f_1/2$ (где $f_1=1/T$ — частота повторения импульсов), выделяет основной частотный интервал, в котором содержится вся информация о сигнале $s(t)$ (спектр которого должен быть не шире $f_m=f_1/2$). На этом и заканчивается процедура восстановление континуальной формы профильтрованного сигнала. Следует, однако, иметь в виду, что спектр последовательности «толстых» импульсов, показанных на рис. 12.20, может существенно отличаться от спектра, найденного в § 2.13 для «тонких» импульсов (теоретически дельта-функций).

В данном случае импульсную последовательность (рис. 12.20) нельзя трактовать просто как произведение континуального сигнала $s(t)$ на тактовую последовательность прямоугольных импульсов. Каждый прямоугольный импульс с амплитудой $s(kT)$ можно представить в виде свертки прямоугольного импульса $v_0(t)$, показанного на рис. 12.21, с функцией $s(kT)\delta(t-kT)$.

Действительно,

$$s(kT)\int_{-\infty}^{\infty} v_0(t-\tau)\,\delta(\tau-kT)\,d\tau = s(kT)\,v_0(t-kT) =$$

$$=\begin{cases} s(kT) & \text{при } kT<t<kT+\tau_0, \\ 0 & \text{при } t<kT \text{ и } t>kT+\tau_0. \end{cases}$$

Таким образом, всю последовательность импульсов на выходе ЦАП (в отсутствие ЦФ для схемы, показанной на рис. 12.17, a) можно записать в виде

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\int_{-\infty}^{\infty} v_0(t-\tau)\,\delta(\tau-kT)\,d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} v_0(t-\tau)\left[\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta(\tau-kT)\right]d\tau. \qquad (12.55)$$

Получилась свертка двух функций: $v_0(t)$ и $s_T(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} s(kT)\delta(t-kT)$. Первой соответствует спектральная плотность [см. (2.69) и рис. 2.15]

$$V_0(\omega)=\tau_0\,\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\,e^{-i\omega\tau_0/2},$$

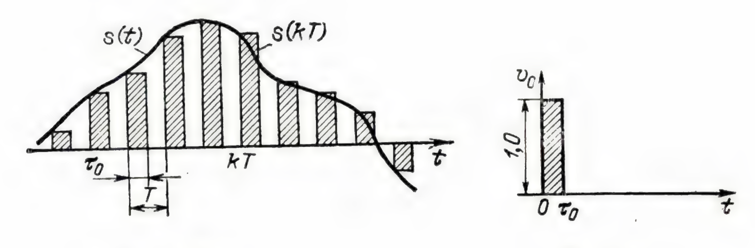


Рис. 12.20 Рис. 12.21

а функции $\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta(\tau - kT)$ — спектральная плотность [см. (2.109)]

$$\mathbf{S}_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right).$$

Следовательно, временно́й свертке (12.55) соответствует спектральная плотность, равная произведению [см. (2.59)]

$$\mathbf{S}'_T(\omega) = \left[\tau_0 \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2} e^{-i\omega\tau_0/2}\right]\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right] =$$

$$= \frac{\tau_0}{T} \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2} e^{-i\omega\tau_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right). \qquad (12.56)$$

Множитель

$$\mathbf{K}_{\text{ЦАП}}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) = \frac{\tau_0}{T} \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2} e^{-i\omega\tau_0/2} \qquad (12.57)$$

можно рассматривать как передаточную функцию преобразователя цифра—аналог. Таким образом, АЧХ преобразователя

$$K_{\text{ЦАП}}(\omega\tau_0/2) = \frac{\tau_0}{T}\left|\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right|. \qquad (12.57')$$

Графики $K_{\text{цап}}$ для значений $\tau_0 < T$ и $\tau_0 = T$ показаны на рис. 12.22 штрих-пунктирной, а графики $S_T'(\omega)$ — сплошной линией. Штриховыми ли-

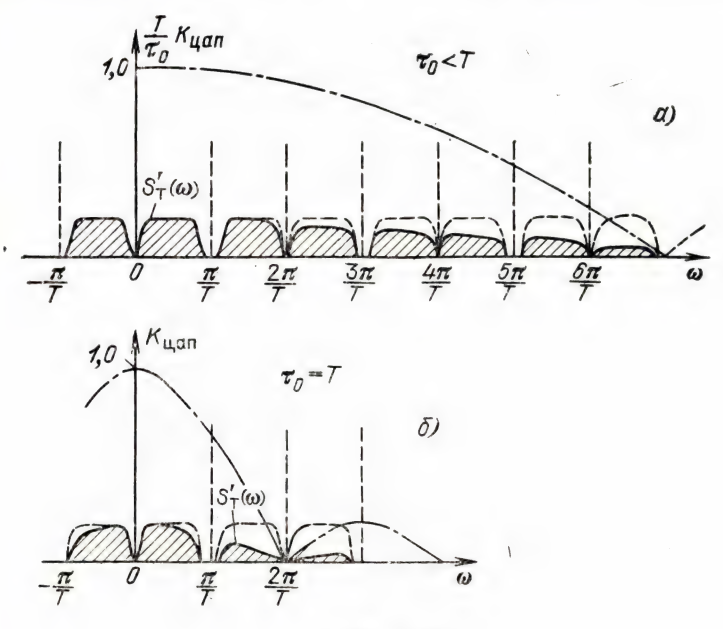


Рис. 12.22

ниями показаны истинные спектры сигнала $s(t)$, которые получились бы при бесконечно тонких выборках.

Видно, что утолщение импульсов приводит к деформации спектра обрабатываемого сигнала, причем эта деформация выражена сильнее для высших частот сигнала.

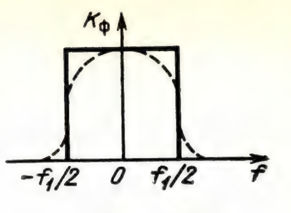


Рис. 12.23

Остановимся в заключение на требованиях к АЧХ синтезирующего фильтра $K_ф(\omega)$. Идеальная характеристика показана на рис. 12.23 сплошной линией. Если спектр полезного сигнала значительно уже частотного интервала $(-f_1/2,\ f_1/2)$, то требования к крутизне скатов характеристики могут быть ослаблены (штриховая линия на рис. 12.23).

12.10. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Структурная схема любого цифрового фильтра содержит элементы памяти T, сумматоры и перемножители. Совокупность этих элементов образует арифметическое устройство фильтра. (Коммутирующие устройства, необходимые для синхронной записи и считывания двоичных символов в элементах памяти, и другие вспомогательные цепи здесь не рассматриваются.)

Элементы памяти T представляют собой набор двоичных элементов, число которых равно числу разрядов r.

Перемножители, реализующие весовые коэффициенты a_0, a_1, $a_2, \ldots$, и b_1, $b_2, \ldots$, работают по принципу поразрядного перемножения всех разрядов входного числа на каждый из разрядов числа, представляющего весовой коэффициент, и последующего суммирования частных произведений. Число двоичных разрядов $r_{a,b}$, используемых для представления весового коэффициента, зависит от требуемой точности вычислений. В больших ЭВМ $r_{a,b}$ достигает 32 и более разрядов, в цифровых фильтрах можно ограничиться 4—16 разрядами. Если входной сигнал $s(t)$ представлен r разрядами, то для полного сохранения содержащейся в нем информации произведение $s(t)a_k$ требует $r+r_a$ разрядов, а произведение $s(t)b_k$ соответственно $r+r_b$ разрядов. На это число разрядов должны быть рассчитаны все последующие элементы цифрового тракта. Для уменьшения объема аппаратуры обычно идут на округление произведения путем отсекания младших разрядов. Это приводит к ошибке, которую называют **ш у м о м о к р у г л е н и я**.

Статистические свойства шума округления в основном совпадают со свойствами шума квантования; дисперсия шума округления приравнивается величине $\Delta^2_{a,b}/12$, где $\Delta_{a,b}$ — пере-

пад уровней, соответствующий отбрасываемому разряду произведения.

Одной из важнейших характеристик арифметического устройства цифрового фильтра является его быстродействие, определяемое числом операций, которые необходимо произвести за время T, и длительностью одной операции. Последняя не может быть меньше времени срабатывания двоичных элементов (триггеров). Быстрое и непрерывное развитие микроэлектронной техники с каждым годом сокращает инерционность электронных приборов, используемых в вычислительной технике. В современных приборах время срабатывания составляет единицы наносекунд.

Определим число операций, которое необходимо совершить за время T при обработке сигнала по заданному алгоритму. В качестве исходного алгоритма возьмем свертку, определяемую выражением (12.3''). Из этого выражения видно, что для определения одного n-го отсчета выходного сигнала требуется совершить n операций перемножения и столько же операций сложения. При числе отсчетов в обрабатываемой реализации сигнала $N \gg 1$ общее число операций умножения $(N/2)N = N^2/2$ (столько же операций сложения).

Как уже отмечалось выше, операция умножения осуществляется многократным сложением, причем число элементарных сложений определяется числом разрядов сомножителей. При длительности одной операции сложения τ_1 и числе разрядов r общая длительность обработки N отсчетов $T_{обр} = (N^2/2)(r+1)\tau_1$. В тех случаях, когда требуется обработка «в реальном времени», т. е. по ходу поступления сигнала $s(t)$, $T_{обр}$ не должно превышать длительность обрабатываемой реализации $T_с = NT$. Отсюда получается условие

$$\frac{N^2}{2}(r+1)\tau_1 \leqslant T_с = NT \quad \text{или} \quad T \geqslant \frac{N}{2}(r+1)\tau_1.$$

Подставляя в это неравенство $T = 1/2f_m$, приходим к следующей грубой оценке наивысшей допустимой частоты сигнала:

$$f_m \leqslant 1/(N(r+1)\tau_1.$$

В частности, при $N = 1000$, $r = 10$ и $\tau_1 = 1$ нс

$$f_m \leqslant 1/10^3 \cdot 11 \cdot 10^{-9} \approx 10^5 \text{ Гц}.$$

При обработке более коротких сигналов, например с базой $N = 50$, частота может быть доведена до 2 МГц.

Как видим, применение цифровых фильтров, работающих в режиме последовательного анализа, ограничивается в настоящее время обработкой относительно низкочастотных сигналов. В § 12.11 будет рассмотрен один из возможных способов повышения быстродействия цифровой обработки.

При переходе к параллельному анализу с помощью нескольких каналов ценой усложнения и удорожания аппаратуры

быстродействие можно существенно повысить. В принципе быстродействие можно довести до величины, близкой к τ_1, т. е. $f_m \leqslant 1/\tau_1$.

Главной особенностью цифрового фильтра является то, что его характеристики — амплитудно- и фазочастотная — определяются всего лишь весовыми коэффициентами в прямых и обратных связях и шагом дискретизации T. Это позволяет строить фильтры с характеристиками, реализация которых с помощью обычных фильтров на индуктивностях и емкостях весьма затруднительна или даже невозможна.

Применением кварцованных источников колебания тактовой частоты можно обеспечить очень высокую стабильность частотных характеристик. Цифровые фильтры надежны в работе, не требуют подстройки и нечувствительны к температурным и иным условиям эксплуатации. Простота осуществления устройств памяти при использовании цифровых сигналов делает цифровые фильтры незаменимыми при обработке, требующей задержку сигнала во времени. Наконец, следует отметить удобство сопряжения цифровых фильтров с ЭВМ.

Благодаря всем этим преимуществам цифровые фильтры, несмотря на сложность схемы и необходимость синхронизации управления электронными ключами, находят все большее распространение.

12.11. АЛГОРИТМ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ

Рассмотренные в предыдущих параграфах данной главы простейшие трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры находят широкое применение при обработке относительно коротких дискретных последовательностей. При сложных сигналах с базой N, достигающей десятков, сотен и даже тысяч, структура фильтра усложняется и возникает проблема сокращения вычислительных затрат.

Как и в аналоговой технике, в зависимости от способа задания фильтра — импульсной характеристикой $\{g[k]\}$ или передаточной функцией $\mathbf{K}_T(i\omega)$ — возможны два подхода: во временной или в частотной области.

Временной подход основан на вычислении круговой свертки (см. п. 12.4.1)

$$s_{\text{вых}}[k]=\sum_{k=0}^{N-1} s[m]\,g[k-m], \quad k=0, 1, \ldots, N-1. \tag{12.58}$$

Частотный (спектральный) подход основан на вычислении ДПФ

$$\mathbf{S}[n]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1, \tag{12.59}$$

ДПФ → $K_T(in)$ → ОДПФ

$\{s[k]\}$, $k=0,1,\ldots,N-1$; $\{S[n]\}$, $n=0,1,\ldots,N-1$; $\{S[n]K_T[in]\}$, $n=0,1,\ldots,N-1$; $\{s_{вых}[k]\}$, $k=0,1,\ldots,N-1$

Рис. 12.24

с последующим применением ОДПФ

$$s_{вых}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{S}[n]\mathbf{K}_T[in]\,e^{i\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=0,1,\ldots,N-1. \quad (12.60)$$

Дискретная передаточная функция $\mathbf{K}_T(in)$ определяется выражением (12.33) при подстановке $\omega T=n\Delta\omega T\to n$.

Функциональная схема определения $s_{вых}[k]$ представлена на рис. 12.24.

Очевидно, что вычисления по алгоритму рис. 12.24 дают результат, эквивалентный вычислению свертки сигнала $\{s[k]\}$ с импульсной характеристикой $\{g[k]\}$ по формуле (12.58).

Первый этап, т. е. вычисление ДПФ, представляет собой спектральный анализ входного сигнала и во многих практических задачах имеет самостоятельное значение. При больших значениях N вычисление ДПФ требует очень большого числа арифметических операций. Из формулы (12.59) следует, что для определения одного спектрального коэффициента $\mathbf{S}[n]$ требуется N умножений $s[k]$ на комплексное число и N сложений, а на все N коэффициентов требуется N^2 умножений и столько же сложений. Так, при $N=2^{10}=1024$ необходимо $\sim 10^6$ умножений и сложений.

При использовании алгоритма свертки (12.58) требуется приблизительно столько же арифметических операций. Это обстоятельство долгое время препятствовало применению цифровой техники к обработке сложных сигналов. Только появление алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволило значительно снизить объем вычислительных затрат, благодаря чему они получили широкое распространение. Алгоритм линейной свертки используется в основном при фильтрации малобазовых сигналов.

12.12. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Суть этого алгоритма заключается в многократном членении заданной последовательности временны́х отсчетов на более короткие последовательности. Поясним достигаемый при этом выигрыш на примере одного первого разбиения.

Пусть задана последовательность отсчетов $\{s[k]\}$, $k=0,1,\ldots,N-1$, причем число N является степенью двойки, т. е. $N=2^r$, где r — целое число. Разобьем эту последовательность на

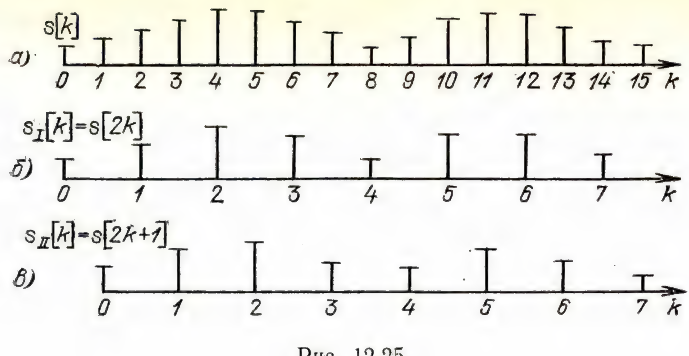


Рис. 12.25

две подпоследовательности, как показано на рис. 12.25. Для первой из них, составленной из четно пронумерованных отсчетов $s[2k]=s_{\text{I}}[k]$ (рис. 12.25, *б*), выражение, аналогичное (12.14), должно быть записано в форме

$$\sum_{k=0}^{N-2} s[k]\,W_N^{kn}=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k]\,W_N^{2kn}=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\text{I}}[k]\,W_N^{2kn},$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2}-1. \qquad (12.61)$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $W_N=e^{-i2\pi/N}$. Для второй (нечетной) подпоследовательности, составленной из отсчетов $s[2k+1]=s_{\text{II}}(k)$ (рис. 12.25, *в*), ДПФ можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{N-1} s[k]\,W_N^{kn}=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k+1]\,W_N^{(2k+1)n}=\sum_{k=0}^{N-1} s_{\text{II}}[k]\,W_N^{(2k+1)n}=$$

$$=W_N^n\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\text{II}}[k]\,W_N^{2kn},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2}-1. \qquad (12.62)$$

С учетом равенств

$$W_N^2=(e^{-i2\pi/N})^2=e^{-i\frac{2\pi}{N/2}}=W_{N/2},\quad W_N^{2kn}=W_{N/2}^{kn} \qquad (12.63)$$

правые части выражений (12.61), (12.62) можно привести к виду

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\text{I}}[k]\,W_{N/2}^{kn}=\text{S}_{\text{I}}[n],\quad W_N^n\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\text{II}}[k]\,W_{N/2}^{kn}=W_N^n\text{S}_{\text{II}}[n].$$

В этих выражениях $\text{S}_{\text{I}}[n]$ и $\text{S}_{\text{II}}[n]$ представляют собой ДПФ соответственно четной и нечетной подпоследовательностей.

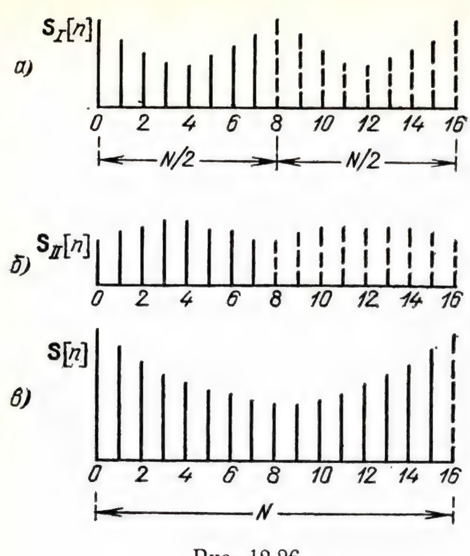


Рис. 12.26

Замена W_N^{2kn} на $W_{N/2}^{kn}$ учитывает, что шаг дискретизации в $\{s_{\rm I}[k]\}$ и $\{s_{\rm II}[k]\}$ вдвое больше, чем в исходной последовательности $\{s[k]\}$.

Фазовый множитель $W_N^n = e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$ перед второй суммой учитывает задержку последовательности $\{s_{\rm II}(k)\}$ на один интервал относительно последовательности $\{s_{\rm I}[k]\}$ (рис. 12.25).

На рис. 12.26, *а* и *б* представлен примерный вид спектров $\mathbf{S}_{\rm I}[n]$ и $\mathbf{S}_{\rm II}[n]$. В соответствии с числом временны́х отсчетов $N/2$ число спектральных коэффициентов также равно $N/2 (n=0,1, \ldots, N/2-1)$. Штриховыми линиями на рисунках показано периодическое продолжение спектра на участок $N/2 \leqslant n \leqslant N-1$.

Результирующее ДПФ $\mathbf{S}[n]$ исходной последовательности $\{s[k]\}$ можно выразить через $\mathbf{S}_{\rm I}[n]$ и $\mathbf{S}_{\rm II}[n]$.

В диапазоне $n=0, 1, \ldots, N/2-1$ имеет место очевидное соотношение

$$\mathbf{S}[n] = \mathbf{S}_{\rm I}[n] + W_N^n \mathbf{S}_{\rm II}[n].$$

В диапазоне $n=N/2, N/2+1, \ldots, N-1$ можно, основываясь на периодичности $\mathbf{S}_{\rm I}[n]$ и $\mathbf{S}_{\rm II}[n]$ (с периодом $N/2$), исходить из равенств

$$\mathbf{S}_{\rm I}[n] = \mathbf{S}_{\rm I}[n-N/2], \quad \mathbf{S}_{\rm II}[n] = \mathbf{S}_{\rm II}[n-N/2]. \qquad (12.64)$$

Кроме того, необходимо учитывать перемену знака перед фазовым множителем при $n \geqslant N/2$:

$$W_N^n = W_N^{N/2+n-N/2} = W_N^{N/2} W_N^{n-N/2} = -W_N^{n-N/2},$$

поскольку $W_N^{N/2} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$.

В результате приходим к следующему выражению для ДПФ всей последовательности:

$$\mathbf{S}[n] = \begin{cases} \mathbf{S}_{\rm I}[n] + W_N^n \mathbf{S}_{\rm II}[n], & 0 \leqslant n \leqslant N/2-1, \\ \mathbf{S}_{\rm I}[n-N/2] - W_N^{n-N/2} \mathbf{S}_{\rm II}[n-N/2, & N/2 \leqslant n \leqslant N-1. \end{cases} \qquad (12.65)$$

Спектр $\mathbf{S}[n]$ содержит N спектральных отсчетов на интервале одного периода (на оси n), как это представлено на рис. 12.26, *в*.

Заметим, что $\mathbf{S}_{\mathrm{I}}[n-N/2]$ и $\mathbf{S}_{\mathrm{II}}[n-N/2]$ совпадают с соответствующими значениями $\mathbf{S}_{\mathrm{I}}[n]$ и $\mathbf{S}_{\mathrm{II}}[n]$.

Выяснив структуру спектров $\mathbf{S}_{\mathrm{I}}[n]$ и $\mathbf{S}_{\mathrm{II}}[n]$, подсчитаем число операций умножения, необходимых для получения N спектральных коэффициентов при использовании алгоритма (12.65). Для отсчетов $s[k]$ на комплексные коэффициенты W_N^n. Кроме того, необходимо N умножений $\mathbf{S}_{\mathrm{II}}[n]$ на коэффициент W_N^n. Всего вычисления функций $\mathbf{S}_{\mathrm{I}}[n]$ и $\mathbf{S}_{\mathrm{II}}[n]$ требуется $(N/2)^2$ умножений требуется $2(N/2)^2+N$ умножений, т. е. почти вдвое меньше, чем при использовании алгоритма (12.58).

Разбиением каждой подпоследовательности можно осуществить дальнейшее уменьшение объема вычислений. Разбиение следует продолжать вплоть до получения простейших двухэлементных последовательностей. Определив ДПФ указанных простейших пар отсчетов, можно найти ДПФ четырехэлементных, восьмиэлементных и т. д. последовательностей. При объединении ДПФ двух подпоследовательностей можно руководствоваться алгоритмом (12.65), подставляя в него соответствующие значения N и n.

В основе алгоритма (12.65) лежит операция сложение-вычитание с умножением одного из слагаемых на коэффициент W_N^n. Указанную операцию, являющуюся базовой для БПФ, можно представить в виде графа, изображенного на рис. 12.27, *а* (так называемая бабочка).

При обозначениях (12.65) базовая операция принимает вид, показанный на рис. 12.27, *б*. Основанный на этой базовой операции сигнальный граф объединения двух ДПФ представлен на рис. 12.27, *в*.

Проиллюстрируем описанный способ построения полного

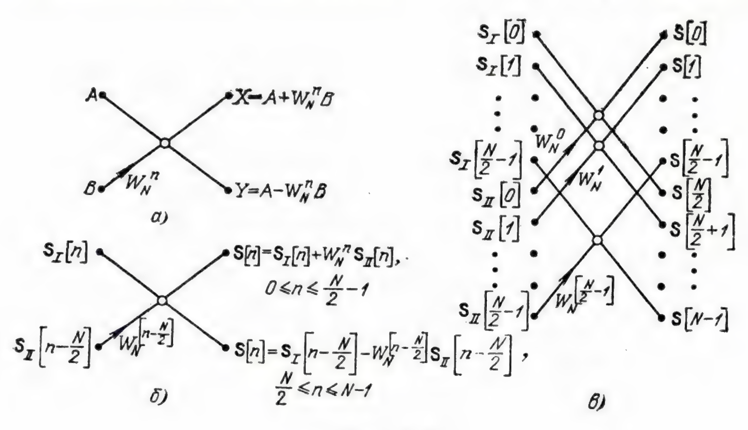


Рис. 12.27

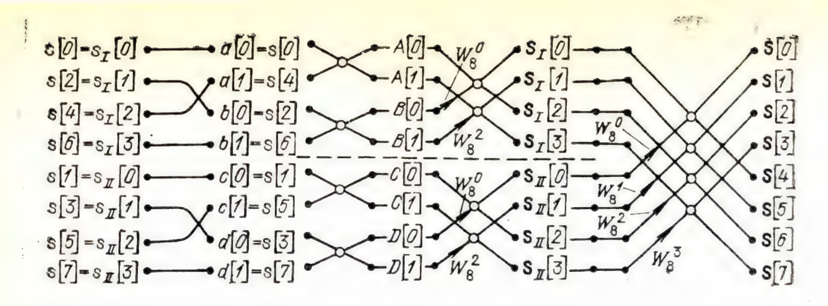


Рис. 12.28

графа БПФ от двухточечных до N-точечных ДПФ на примере $N=8$.

После первого разбиения последовательности $\{s[k]\}$ получаются две четырехэлементные последовательности $\{s_{\text{I}}\}$ и $\{s_{\text{II}}\}$, показанные в левой части рис. 12.28. В первой из них четными считаются $s_{\text{I}}[0]=s[0]$ и $s_{\text{I}}[2]=s[4]$, а нечетными $s_{\text{I}}[1]=s[2]$ и $s_{\text{I}}[3]=s_{\text{I}}[6]$. Поэтому последовательность $\{s_{\text{I}}\}$ распадается на две пары: $a[0]$, $a[1]$, и $b[0]$, $b[1]$ [т. е. $s[0]$, $s[4]$ и $s[2]$, $s[6]$].

Аналогично последовательность $\{s_{\text{II}}\}$ распадается на две пары: $c[0]$, $c[1]$ и $d[0]$, $d[1]$.

Определим ДПФ двухэлементных последовательностей. Для пары $a[0]$, $a[1]$.

$$A[n]=\sum_{k=0}^{1} a[k]\, W_{N/4}^{kn}, \quad n=0,\ 1,$$

откуда

$$A[0]=a[0]+a[1]W^0{}_{N/4}=a[0]+a[1],\ A[1]=a[0]+$$
$$+a[1]W^1{}_{N/4}=a[0]+a[1]W_s{}^4=a[0]-a[1].$$

Как видим, для вычисления $A[0]$ и $A[1]$ не требуется умножений. Нужно лишь образовать сумму $a[0]+a[1]$ и разность $a[0]-a[1]$, т. е. $s[0]+s[4]$ и $s[0]-s[4]$.

На рис. 12.18 для операции сложение-вычитание использована символика, совпадающая с операцией «бабочка» при $W_N^0=1$: верхний вывод соответствует сумме, а нижний — разности.

Аналогичным образом на рис. 12.28 обозначены ДПФ остальных пар: $b[0]$, $b[1]$, $c[0]$, $c[1]$ и $d[0]$, $d[1]$.

Следующий шаг — объединение ДПФ $A[n]$ и $B[n]$. Число спектральных коэффициентов в суммарном ДПФ равно 4: $n=0,\ 1,\ 2$ и 3.

По аналогии с (12.65) можем написать

$$S_{\text{I}}[n]=\begin{cases} A[n]+W_4{}^n B[n], & n=0,\ 1,\\ A[n-2]-W_4^{(n-2)}B[n-2], & n=2,\ 3.\end{cases}$$

Учитывая, что $W_4{}^n = W_8^{2n}$, переписываем последнее выражение в форме

$$\mathbf{S}_\mathrm{I}[n] = \begin{cases} A[n] + W_8^{2n} B[n], & n=0,\ 1, \\ A[n-2] - W_8^{2(n-2)} B[n-2], & n=2,\ 3. \end{cases}$$

Итак,

$$\mathbf{S}_\mathrm{I}[0] = A[0] + W_8{}^0 B[0],\ \mathbf{S}_\mathrm{I}[1] = A[1] + W_8{}^2 B[1].$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{I}[2] = A[0] - W_8{}^0 B[0],\ \mathbf{S}_\mathrm{I}[3] = A[0] - W_8{}^2 B[1].$$

Аналогичные выражения нетрудно составить для ДПФ $\mathbf{S}_\mathrm{II}[n]$, объединяющего ДПФ $C(n)$ и $D(n)$. Базовые операции для $\mathbf{S}_\mathrm{I}[n]$ и $\mathbf{S}_\mathrm{II}[n]$ одинаковы (см. рис. 12.28).

Для определения ДПФ всей последовательности из восьми отсчетов нужно воспользоваться выражением (12.65) и графом, представленным на рис. 12.27, *в* при $N=8$.

Выяснив структуру сигнального графа БПФ, подсчитаем суммарное число операций умножения. При достаточно больших значениях N на каждом этапе вычислений (при каждом разбиении последовательности на две более короткие) требуется порядка N умножений. При числе разбиений $\log N$ общее число операций равно примерно $N \log_2 N$ (приближенность связана с тем, что умножение на W_N^0, $W_N^{N/2}$, $W_N^{N/4}$ $W_N^{3N/4}$ сводится просто к сложениям и вычитаниям комплексных чисел).

Итак, при использовании алгоритма БПФ для вычисления ДПФ N-точечной последовательности требуется примерно $N \log_2 N$ операций умножения. Ранее было показано, что при прямом вычислении ДПФ по выражению (12.59) требуется N^2 умножений. Следовательно, алгоритм БПФ уменьшает число операций в $N^2/N \log_2 N$. При $N=1024$ $(r=10)$ $\log_2 N=10$ и $N/\log_2 N \approx 100$. Столь большое сокращение числа операций резко уменьшает объем аппаратуры и повышает быстродействие цифровых устройств. Из рассмотрения графа следует, что экономия достигается благодаря объединению всех слагаемых, подлежащих умножению на одинаковые множители.

К обоснованию алгоритма БПФ можно также прийти, используя метод факторизации матрицы, описывающей дискретное преобразование [11].

Для большей наглядности все предыдущее рассмотрение проводилось в предположении действительного (вещественного) сигнала. Однако результаты можно распространить и на комплексный сигнал.

Существует большое разнообразие вариантов построения схем БПФ.

12.13. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Обратимся к выражению (12.13) для ДПФ

$$\mathbf{S}[n]=\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm N/2,$$

и к рис. 12.29, иллюстрирующему преобразование исходного сигнала $s(t)$, начиная с его дискретизации с шагом T до выделения спектральных коэффициентов $\mathbf{S}[n]$ на выходе устройства, осуществляющего ДПФ. Это устройство обозначено на рис. 12.29 в виде «черного ящика» ДПФ (БПФ) без раскрытия его внутренней структуры.

Если шаг T выбран достаточно малым для сохранения содержащейся в сигнале $s(t)$ информации, то совокупность N спектральных коэффициентов $\mathbf{S}[n]$ дает полную информацию о всем спектре $\mathbf{S}(\omega)$ континуального сигнала $s(t)$. На рис. 12.29 функция $S(\omega)$ обозначена штриховой линией в виде огибающей дискретного спектра $S[n]$ в пределах центрального участка диапазона частот от $\omega=-\pi/T$ до $\omega=\pi/T$ или, что то же, от $\omega T=0$ до $\omega T=2\pi$ (соответственно от $n=0$ до $n=N-1$, см. нижнюю часть рис. 12.29).

С этой точки зрения устройство, осуществляющее ДПФ, можно трактовать как а н а л и з а т о р с п е к т р а, представляющий собой набор из N узкополосных фильтров, каждый из которых пропускает одну дискретную частоту $n\Delta\omega$.

Поскольку в образовании любого из спектральных коэффициентов $\mathbf{S}[n]$ участвуют все временные отсчеты $s[k]$, то информацию о спектре сигнала $s(t)$ можно получить не ранее чем после ввода в устройство БПФ всех N отсчетов $s[k]$. В этом

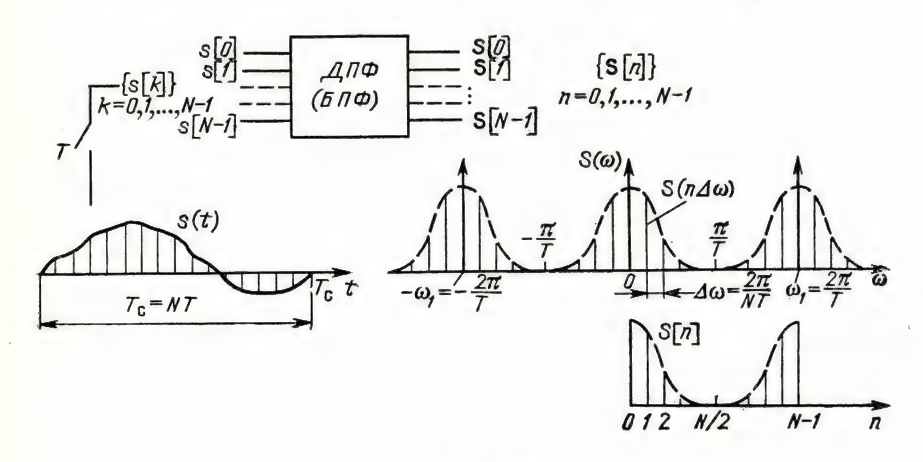


Рис. 12.29

смысле ДПФ не отличается от обычного преобразования Фурье, определяемого выражением

$$\mathbf{S}(\omega)=\int_{0}^{T_c} s(t)\, e^{-i\omega t} dt, \quad t \geqslant T_c.$$

Нетрудно выявить АЧХ любого из N упомянутых выше фильтров, образующих анализатор спектра. С этой целью зададим испытательный сигнал на входе анализатора в виде гармонического колебания с частотой ω, не превышающей π/T, что вытекает из теоремы отсчетов (см. § 2.11).

Для упрощения выкладок удобно исходить из комплексного испытательного сигнала, заданного в одной из двух форм (при $-\infty<t<\infty$):

$$\dot{s}(t)=\cos \omega t+i \sin\omega t=e^{i\omega t}, \tag{12.66}$$

$$\dot{s}(t)=\cos \omega t-i \sin \omega t=e^{-i\omega t}. \tag{12.67}$$

Поддерживая неизменной амплитуду (1 В) входного сигнала, проследим за изменением спектрального коэффициента $\mathbf{S}(n)$ в зависимости от ω.

После дискретизации $\dot{s}[t]$ с шагом T получим временны́е отсчеты вида

$$\dot{s}[k]=e^{i\omega kT},\ k=0, 1, \ldots, N-1,$$

или

$$\dot{s}[k]=e^{-i\omega kT},\ k=0, 1, \ldots, N-1,$$

где $N=T_c/T$.

Рассмотрим сначала случай $\dot{s}(t)=e^{i\omega t}$, когда выражение (12.13) принимает вид

$$\mathbf{S}(n, \omega T)=\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\omega kT} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)},$$

$$n=0, 1, \ldots, N/2, \quad 0\leqslant \omega T\leqslant \pi. \tag{12.68}$$

При отрицательных значениях n коэффициенты $\mathbf{S}(n, \omega T)$ равны нулю, поскольку спектральная плотность аналитического сигнала $e^{i\omega t}$ отлична от нуля только в области частот $\omega>0$ [см. § 3.10 и формулу (3.77)].

Новое обозначение $\mathbf{S}(n, \omega T)$ имеет тот же смысл, что и $\mathbf{S}[n]$, т. е. это спектральный коэффициент на фиксированной частоте $n\Delta\omega$, однако модуль и аргумент этого комплексного коэффициента зависят от частоты ω исходного сигнала $s(t)$, из которого взяты N временны́х отсчетов.

Введем обозначение $x=\omega T-\frac{2\pi}{N}n$ и запишем (12.68) в форме

$$S(n,\omega T)=\sum_{k=0}^{N-1}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{N-1}\cos kx+i\sum_{k=0}^{N-1}\sin kx.$$

Используя известные формулы для суммы косинусов или синусов кратных дуг

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos kx=\frac{\cos\frac{(N-1)x}{2}\sin\frac{Nx}{2}}{\sin x/2},$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin kx=\frac{\sin\frac{(N-1)x}{2}\sin\frac{Nx}{2}}{\sin x/2},$$

приведем (12.68) к виду

$$S(n,\omega T)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}e^{i\frac{(N-1)}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}, & n=0,1,\ldots,N/2,\\ 0, & N/2<n\leqslant N-1.\end{cases} \quad (12.69)$$

Ранее отмечалось, что информация об $S(n,\omega T)$ получается к моменту $t=T_c=(N-1)T$, когда входной сигнал $\dot{s}(t)$ принимает значение $e^{i\omega(N-1)T}$. Поэтому передаточную функцию n-го частотного канала анализатора спектра логично трактовать как отношение

$$\frac{S(n,\omega T)}{e^{i(N-1)\omega T}}=\frac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}e^{-i\frac{(N-1)}{2}\left(\omega T+\frac{2\pi}{N}n\right)},$$

$$0\leqslant\omega T\leqslant\pi,\quad n=0,1,\ldots,N/2. \quad (12.70)$$

При задании испытательного сигнала в форме $\dot{s}(t)=e^{-i\omega t}$ передаточная функция определяется выражением, комплексно-сопряженным с (12.70):

$$\frac{S(n,\omega T)}{e^{-i(N-1)\omega T}}=\frac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\omega T-\frac{2\pi}{N}n\right)}e^{i\frac{(N-1)}{2}\left(\omega T+\frac{2\pi}{N}n\right)},$$

$$-\pi\leqslant\omega T\leqslant 0,\quad n=0,\ -1,\ldots,-N/2. \quad (12.71)$$

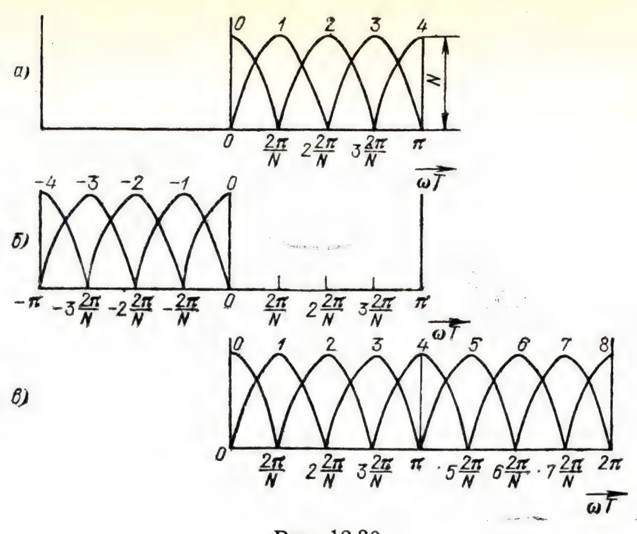


Рис. 12.30

Графики передаточных функций, построенные по формулам (12.70), (12.71) для $N=8$ (без учета фазовых множителей), представлены на рис. 12.30, *а* и *б*. Поскольку вне интервала характеристики повторяются, эти графики можно объединить, как это показано на рис. 12,30, *в*. (Представлены только главные лепестки.)

Итак, на комплексный сигнал $e^{i\omega t}$ откликаются только частотные каналы анализатора с номерами $0 \leqslant n \leqslant N/2$, а на сигнал $e^{-i\omega t}$ — только каналы с номерами $N/2 < n < N-1$. Это означает, что при анализе спектра комплексных сигналов с помощью БПФ можно определить не только абсолютное значение ω, но и знак частоты. Это важное свойство будет проиллюстрировано в § 13.9 на примере квадратурной обработки сигналов.

При подаче на вход БПФ последовательности $\{s[k]\}$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, взятой из сигнала в виде постоянного напряжения ($\omega=0$), на выходе БПФ спектральный коэффициент $\mathbf{S}(0,0)$ равен N, а все остальные равны нулю; при частоте исходного (комплексного) сигнала $\omega=\frac{2\pi}{N}\frac{1}{T}$, один-единственный коэффициент $\mathbf{S}\left(1, \frac{2\pi}{N}\right)$ равен N, а все остальные равны нулю и т. д.

Соотношение между входными и выходными сигналами для БПФ-8 иллюстрируются рис. 12.31.

Основываясь на выражении (12.68), (12.70), (12.71), нетрудно найти отклик рассматриваемого устройства на испытатель-

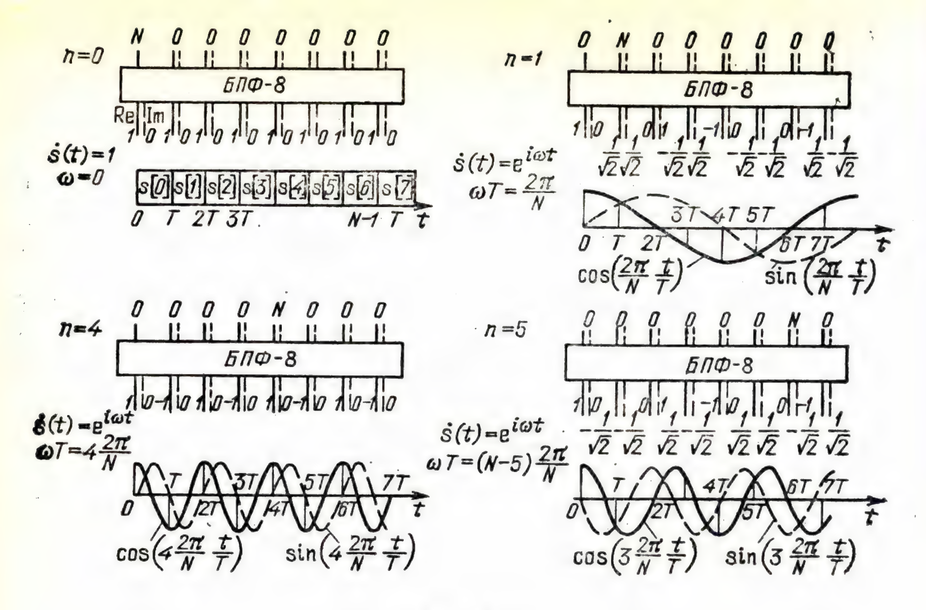


Рис. 12.31

ный сигнал $s(t)=\cos\omega t$, $-\infty<t<\infty$. Представив этот сигнал в виде суммы двух комплексных сигналов

$$s(t)={}^1/_2 e^{i\omega t}+{}^1/_2 e^{-i\omega t},$$

придем к выходному сигналу в виде двух комплексно-сопряженных спектральных коэффициентов $\mathbf{S}(n, \omega T)$ и $\mathbf{S}(N-n, 2\pi-\omega T)$, расположенных симметрично относительно точки π на оси ωT.

Глава 13. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА НА ФОНЕ ПОМЕХ

13.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Центральной проблемой радиотехники была и остается проблема помехоустойчивости связи. Система связи должна быть спроектирована так, чтобы она обладала способностью наилучшим образом противостоять мешающему действию помех.

Проблема помехоустойчивости радиосвязи включает в себя большое число других проблем: генерирование мощных коле-

баний, выбор волн, обеспечивающий благоприятные условия распространения, использование антенн направленного действия, поиски новых видов радиосигналов и новых способов их обработки на фоне помех и т. д.

Особый интерес представляет ослабление вредного действия помехи, основанное на использовании линейных частотных фильтров. На протяжении длительного периода развития радиотехники к подобным фильтрам предъявлялось требование возможно более равномерного пропускания спектра сигнала и более полного подавления частот вне этого спектра. Идеальным считался фильтр с прямоугольной П-образной АЧХ.

С развитием теории информации и статистической теории обнаружения сигналов трактовка функций линейного фильтра, а также подход к его построению существенно изменились. Стало очевидным, что указанная выше трактовка имеет следующие недостатки: не учитываются форма сигнала (которая может быть различной при одной и той же ширине спектра сигнала) и статистические свойства помехи.

Поэтому фильтр с П-образной АЧХ не является оптимальным в тех случаях, когда имеется априорная информация о форме сигнала и характеристиках помехи.

Коренной перелом в теории и практике линейной фильтрации связан с появлением работ Н. Винера, А. Н. Колмогорова, В. А. Котельникова и других ученых, которые поставили и решили задачу синтеза фильтра, оптимального в определенном смысле для приема заданного сигнала, действующего на фоне помехи с заданными статистическими характеристиками.

В зависимости от решаемой задачи — обнаружение сигнала, измерение его параметров или разрешение (различение) сигналов — критерии оптимальности могут быть разными. Для задачи обнаружения сигналов заданной (известной) формы в шумах наибольшее распространение получил критерий максимума отношения сигнал-помеха на выходе фильтра. В § 13.2—13.8 рассматриваются только такие фильтры.

Иной подход требуется при обработке сигналов, представляющих собой случайный процесс. Этому вопросу посвящены § 13.9—13.11.

13.2. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА ЗАДАННОЙ ФОРМЫ. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ФИЛЬТРА

Требования к фильтру, максимизирующему отношение сигнал-помеха, можно сформулировать следующим образом. На вход линейного четырехполюсника с постоянными параметрами и передаточной функцией $\mathbf{K}(i\omega)$ подается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ (рис. 13.1). Сигнал полностью известен; это означает, что заданы его форма и положение на

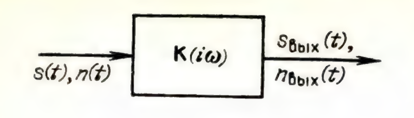


Рис. 13.1

оси времени. Шум представляет собой случайный процесс с заданными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий получение на выходе наибольшего возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению шума. При этом не ставится условие сохранения формы сигнала, так как для обнаружения его в шумах форма значения не имеет.

Под синтезом фильтра будем подразумевать отыскание передаточной функции физически осуществимого фильтра обеспечивающего упомянутую выше максимизацию отношения сигнал-помеха. Передаточную функцию будем представлять в форме $\mathbf{K}(i\omega)=K(\omega)e^{i\varphi_k(\omega)}$.

Таким образом, задача сводится к отысканию АЧХ $K(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_k(\omega)$ оптимального фильтра. Наиболее просто эта задача решается для сигнала, действующего на фоне белого шума с равномерным спектром $W(\omega)=N_0=\text{const}$.

Для отыскания оптимальной (в указанном смысле) передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ составим выражения для сигнала и шума на выходе фильтра сначала порознь, а затем в виде их отношения.

Сигнал в фиксированный момент времени t_0 определяем общим выражением

$$s_{\text{вых}}(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega)\mathbf{K}(i\omega)e^{i\omega t_0}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)K(\omega)e^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}d\omega, \qquad (13.1)$$

а среднеквадратическое значение помехи — выражением

$$\sigma_{\text{вых}}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)K^2(\omega)d\omega\right]^{1/2}=\left[\frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)d\omega\right]^{1/2}. \qquad (13.2)$$

В выражении (13.1) $\mathbf{S}(\omega)=S(\omega)e^{i\theta_s(\omega)}$ — спектральная плотность заданного входного сигнала $s(t)$, а под t_0 подразумевается момент времени (пока еще не определенный), соответствующий максимуму (пику) сигнала на выходе фильтра. Смысл и минимально возможное значение t_0 подробнее рассматриваются в следующем параграфе, однако из простых представлений очевидно, что для образования пика требуется использование всей энергии сигнала, а это возможно не ранее окончания действия входного сигнала. Иными словами, t_0 не может опережать момент окончания сигнала.

Составим отношение

$$\frac{s_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\,K(\omega)\,\mathrm{e}^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}\,d\omega\right|}{\left(\frac{N_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}}. \qquad (13.3)$$

Воспользуемся известным неравенством Шварца

$$\left|\int\limits_a^b F_1(x)F_2(x)\,dx\right|^2\leqslant\int\limits_a^b|F_1(x)|^2\,dx\int\limits_a^b|F_2(x)|^2\,dx, \qquad (13.4)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — в общем случае комплексные функции.

Это неравенство обращается в равенство только при выполнении условия

$$F_2(x)=AF_1^*(x), \qquad (13.5)$$

т. е. когда функция $F_2(x)$ пропорциональна функции, комплексно-сопряженной $F_1(x)$ (A — произвольный постоянный коэффициент).

Приравнивая в (13.4) $F_1(\omega)=S(\omega)\,\mathrm{e}^{i\theta_s(\omega)}$ и $F_2(\omega)=K(\omega)\,\mathrm{e}^{i\varphi_k(\omega)}$ (задержку t_0 пока опускаем), получаем условие

$$K(\omega)\,\mathrm{e}^{i\varphi_k(\omega)}=AS(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\theta_s(\omega)}, \qquad (13.6)$$

которое распадается на два:

$$\varphi_k(\omega)=-\theta_s(\omega),\quad K(\omega)=AS(\omega). \qquad (13.7),\ (13.8)$$

По сути дела, эти условия обеспечивают максимизацию отношения сигнал-помеха

$$\frac{s_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}}=\frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S^2(\omega)\,d\omega\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}}{\left(\frac{N_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{N_0^{1/2}}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}. \qquad (13.9)$$

Учитывая, что интеграл в квадратных скобках правой части последнего выражения есть не что иное, как полная энергия $Э$ входного сигнала [см. (2.58)], приходим к следующему важному результату:

$$\frac{s(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}}=\sqrt{Э/N_0}. \qquad (13.10)$$

Введя в рассмотрение задержку сигнала на время t_0, перепишем (13.7), (13.8) в виде двух условий:

ФЧХ фильтра должна отвечать равенству

$$\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0], \tag{13.11}$$

АЧХ должна отвечать равенству

$$K(\omega) = AS(\omega). \tag{13.12}$$

Функция $\mathbf{K}(i\omega)$, отвечающая условиям (13.11)—(13.12), согласована со спектральными характеристиками сигнала — амплитудной и фазовой. В связи с этим рассматриваемый оптимальный фильтр часто называют согласованным фильтром.

Связь между ФЧХ $\theta_s(\omega)$ входного сигнала, компенсирующей ее частью характеристики фильтра — $\theta_s(\omega)$ и полной ФЧХ фильтра $\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega(t_0)]$ поясняется рис. 13.2.

После прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику

$$\theta_{s\ вых}(\omega) = \theta_s(\omega) + \varphi_k(\omega) = -\omega t_0, \tag{13.13}$$

показанную прямой линией на том же рисунке.

Соотношение (13.12), устанавливающее, что АЧХ фильтра $K(\omega)$ должна по форме совпадать с амплитудным спектром сигнала $S(\omega)$, также легко поддается физическому истолкованию. При АЧХ $K(\omega)$, отвечающей условию (13.12), фильтр пропускает спектральные составляющие шума неравномерно, с тем большим ослаблением, чем меньше модуль $S(\omega)$. Это приводит к существенному уменьшению мощности шума на выходе фильтра. На рис. 13.3, *б* эта мощность определяется площадью (заштрихованной), ограниченной кривой $W_{вых}(\omega) = K^2(\omega) N_0$, характеристики на рис. 13.3 построены в предположении, что $AS(0) = 1$.

Ослабление сигнала из-за неравномерности характеристики $K(\omega)$ выражено в меньшей степени, чем ослабление шума, поскольку $K(\omega)$ уменьшается для спектральных составляющих, вклад которых в пиковое значение сигнала сравнительно мал. В результате получается ослабление шума относительно сиг-

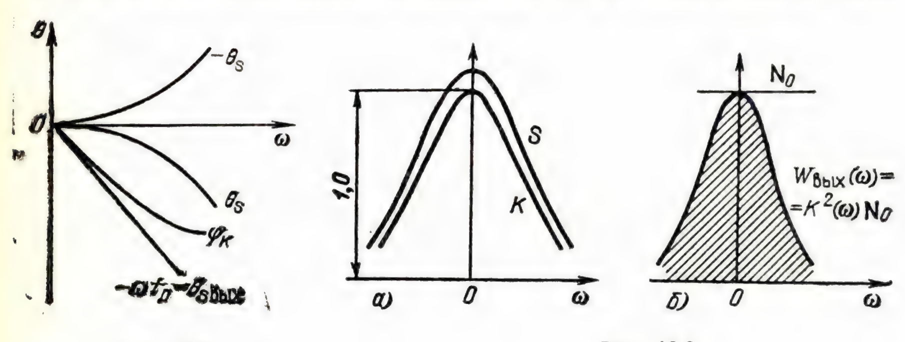


Рис. 13.2   Рис. 13.3

нала. В сочетании с устранением фазовых сдвигов между спектральными составляющими сигнала это и приводит к максимизации отношения сигнал-помеха на выходе фильтра.

Отметим важное свойство согласованной фильтрации сигнала на фоне белого шума: при заданных энергии сигнала $s(t)$ и спектральной плотности мощности N_0 шума отношение сигнал-шум на выходе фильтра, как это видно из (13.10), совершенно не зависит от формы сигнала.

13.3. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА. ФИЗИЧЕСКАЯ ОСУЩЕСТВИМОСТЬ

Тот факт, что коэффициент передачи согласованного фильтра $\mathbf{K}(i\omega)$ является функцией, сопряженной спектру сигнала $\mathbf{S}(\omega)$, указывает на существование тесной связи и между временными характеристиками фильтра и сигнала. Для выявления этой связи найдем импульсную характеристику согласованного фильтра.

Применяя выражение (5.15) и учитывая формулу (13.6), получаем

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}^*(\omega)\,e^{i\omega(t-t_0)}d\omega. \qquad (13.14)$$

Учитывая, что $\mathbf{S}^*(\omega)=\mathbf{S}(-\omega)$ и переходя к новой переменной $\omega_1=-\omega$, переписываем выражение (13.14) следующим образом:

$$g(t)=-\frac{A}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\mathbf{S}(\omega_1)\,e^{-i\omega_1(t-t_0)}d\omega_1=$$

$$=A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{S}(\omega_1)\,e^{i\omega_1(t_0-t)}d\omega_1. \qquad (13.15)$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как произведение $As(t_0-t)$. Следовательно, если задан сигнал $s(t)$, то импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра $g(t)$ определяется как функция

$$g(t)=As(t_0-t), \qquad (13.16)$$

т. е. импульсная характеристика по своей форме должна совпадать с зеркальным отражением сигнала.

Построение графика функции $s(t_0-t)$ показано на рис. 13.4. Кривая $s(-t)$ является зеркальным отражением заданного сигнала $s(t)$ с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция же $s(t_0-t)$, сдвинутая относительно $s(-t)$ на время t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу

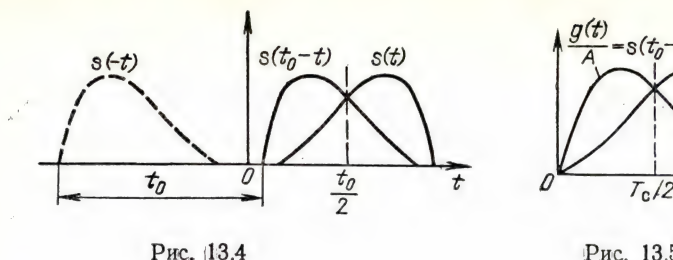


Рис. 13.4

Рис. 13.5

$s(t)$, но с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$ на оси абсцисс. На рис. 13.5 показано аналогичное построение для случая, когда отсчет времени ведется от начала сигнала.

Поскольку импульсная характеристика физической цепи не может начинаться при $t<0$ [отклик фильтра не может опережать воздействие $\delta(t)$], очевидно, что задержка t_0, фигурирующая в (13.11), не может быть меньше T_c. Только при $t_0 \geqslant T_c$ может быть использована вся энергия сигнала для создания наибольшего возможного пика в момент $t=t_0$. Ясно, что увеличение t_0 сверх T_c не влияет на пиковое значение выходного сигнала, а просто сдвигает его вправо (в сторону запаздывания).

Кроме того, условие $t_0 \geqslant T_c$ эквивалентно требованию конечной длительности T_c сигнала $s(t)$; только в этом случае при конечной задержке t_0 можно реализовать пик сигнала. Иными словами, применение согласованной фильтрации для максимизации отношения сигнал-помеха в описанном выше смысле возможно при импульсном сигнале (а также ограниченной по продолжительности пачке импульсов).

Из приведенных замечаний вытекает следующее свойство согласованного фильтра:

АЧХ фильтра удовлетворяет неравенству $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega < \infty$;

это очевидно, так как при конечной энергии сигнала $Э$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega = A^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega = A^2 Э < \infty. \qquad (13.17)$$

Импульсная характеристика $g(t)$, являющаяся Фурье-преобразованием функции $\mathbf{K}(i\omega)$ и отвечающая условию (13.16), удовлетворяет также условию $g(t)=0$ для $t<0$.

Возникает, однако, вопрос, при любой ли структуре спектра сигнала $S(\omega)$ найденная положительная функция $K(\omega) = AS(\omega)$ может являться модулем передаточной функции физически реализуемой (каузальной) электрической цепи. Ответ на этот вопрос дает критерий Пэли—Винера, согласно которо-

му кроме приведенных выше двух условий должно выполняться и неравенство

$$\int_0^\infty \frac{|\ln K(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty \qquad (13.18)$$

(здесь под ω подразумевается нормированная, безразмерная величина).

Можно доказать[1] и обратное утверждение: если выполняется условие (13.18), а также неравенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega < \infty$, то функции $K(\omega)$ можно поставить в соответствие такую фазу $\varphi_k(\omega)$, что передаточная функция $K(\omega) e^{i\varphi_k(\omega)}$ будет определять каузальную цепь (т. е. цепь с импульсной характеристикой $g(t)$, равной нулю для всех $t<0$).

Хотя критерий Пэли—Винера оставляет открытым вопрос о структуре цепи, из него вытекают некоторые полезные следствия о свойствах электрических цепей.

В частности, АЧХ $K(\omega)$ может быть равной нулю только на некоторых дискретных частотах, но не в конечной или бесконечно большой полосе частот. Действительно, если в полосе частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ функция $K(\omega) = 0$ и $|\ln K(\omega)| = \infty$, то интеграл (13.18) расходится. Аналогично рассуждая, можно прийти к выводу, что фильтры со строго П-образной АЧХ нереализуемы. Гауссовский фильтр с АЧХ $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha\omega^2}$ не реализуется, так как $|\ln K(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha\omega^2|$ с увеличением ω растет с такой же скоростью, что и знаменатель $1+\omega^2$ в (13.18), так что интеграл расходится.

Следует, однако, отметить, что известны физические цепи, АЧХ которых с достаточной для практики точностью аппроксимируют идеальные фильтры.

Например, в гл. 15 рассмотрен близкий к П-образному фильтр Баттерворта.

Там же рассматривается важный вопрос о связи между АЧХ и ФЧХ каузального фильтра.

13.4. СИГНАЛ И ПОМЕХА НА ВЫХОДЕ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Для определения формы сигнала на выходе используем общее выражение

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \qquad (13.19)$$

[1] **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем.— М.: Наука, 1970.

Подставив в него (13.6), получим

$$s_{\text{вых}}(t) = A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{S}^*(\omega)\,e^{-i\omega t_0}e^{i\omega t}d\omega =$$

$$= A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,e^{i\omega(t-t_0)}d\omega. \qquad (13.20)$$

Сопоставим это выражение с (2.122). Нетрудно видеть, что интеграл в правой части выражения (13.20) есть не что иное, как *корреляционная функция* входного сигнала $B_s(\tau)$, в которой аргумент τ заменен[1] на $t-t_0$. Таким образом, приходим к важному выводу:

$$s_{\text{вых}}(t) = AB_s(t-t_0) \qquad (13.21)$$

и соответственно

$$s_{\text{вых}}(t_0+\tau) = AB_s(\tau). \qquad (13.22)$$

Итак, сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента A совпадает с корреляционной функцией входного сигнала.

Для построения графика функции $s_{\text{вых}}(t)$ по заданной функции $B_s(\tau)$ достаточно в последней τ заменить на $t-t_0$ и учесть коэффициент A. При $t=t_0$, т. е. при $\tau=0$, величина $B_s(0)$ равна энергии сигнала. Следовательно, пиковое значение сигнала

$$s_{\text{вых}}(t_0) = AB_s(0) = AЭ. \qquad (13.23)$$

Рассмотрим теперь параметры и статистические характеристики шума на выходе согласованного фильтра. При действии белого шума с нормальным законом распределения (именно такой шум и представляет основной интерес для практики) распределение шума на выходе линейного фильтра остается нормальным. Спектр шума на выходе, как это ясно из (7.2) и рис. 13.3, $W_{\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega)N_0$. Следовательно, корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вых}}(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega. \qquad (13.24)$$

Подставляя $K(\omega) = AS(\omega)$ и учитывая выражение (2.122), получаем

$$R_{\text{вых}}(\tau) = A^2N_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega = A^2N_0B_s(\tau). \qquad (13.25)$$

---

[1] **Различие в знаках показателя степени $e^{i\omega\tau}$ не имеет значения вследствие четности функции $S^2(\omega)$.**

Отсюда следует, что корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала (и, следовательно, с самим выходным сигналом).

Приравнивая $\tau=0$, находим дисперсию (среднюю мощность) шума на выходе

$$\sigma^2_{\text{вых}}=R_{\text{вых}}(0)=A^2N_0B_s(0)=A^2N_0Э. \quad (13.26)$$

Составим отношение пикового значения сигнала $s_{\text{вых}}(t)$ к среднеквадратическому значению шума $\sigma_{\text{вых}}$. В соответствии с формулами (13.22) и (13.26) приходим к результату $s_{\text{вых}}(t_0)/\sigma_{\text{вых}}=(Э/N_0)^{1/2}$, который совпадает с (13.10).

Итак, при белом шуме отношение сигнал-шум на выходе фильтра, согласованного с сигналом, зависит только от энергии сигнала и энергетического спектра шума N_0. Из этого заключения следует, что при заданных энергии и ширине спектра сигналу можно придавать различную форму, выгодную для решения конкретной задачи.

Так, для повышения скрытности передачи целесообразно удлинять сигнал при соответствующем уменьшении амплитуды ($A_0^2T_c=\text{const}$). Это приводит к уменьшению отношения сигнал-помеха на входах любых радиоприемных устройств, что затрудняет извлечение информации из смеси сигнал+шум. Лишь в приемнике с фильтром, согласованным с данным сигналом, восстанавливается наибольшее возможное при заданной энергии отношение сигнал-помеха. Следует, конечно, обеспечить неизменную ширину спектра при удлинении сигнала. Это можно осуществить, введя внутриимпульсную модуляцию, например частотную. Пример подобного сигнала — импульс с линейной ЧМ (ЛЧМ импульс) был рассмотрен в § 3.7.

Удлинение радиоимпульса, дополняемое внутриимпульсной модуляцией, позволяет также снизить пиковую мощность генератора в передатчике при заданной энергии сигнала и при сохранении разрешающей способности сигнала (после сжатия в согласованном фильтре). Это преимущество более подробно рассматривается в § 13.5.

Уточним смысл коэффициента A, фигурирующего во многих предыдущих выражениях. При определении отношения сигнал-помеха [см. (13.9)] в уточнении нет необходимости, однако при рассмотрении сигнала и помехи порознь, как, например, в выражениях (13.23) и (13.25), необходимо учитывать, что A — размерный коэффициент. Удобно нормировать A так, чтобы энергии входного и выходного сигналов были одинаковы, тем самым исключая из анализа усиление энергии сигнала.

Энергия входного сигнала $Э=B_s(0)$, а выходного

$$Э_{\text{вых}}=\int_{-\infty}^{\infty} s^2_{\text{вых}}(t)\,dt=A^2\int_{-\infty}^{\infty} B_s{}^2(\tau)\,d\tau. \quad (13.27)$$

Приравнивая $Э_{вых}$ величине $Э$, получаем условие нормирования коэффициента A (если энергии $Э$ и $Э_{вых}$ рассеиваются на одинаковых нагрузках)

$$A=\left[B_s(0)\Big/\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}. \qquad (13.28)$$

Подставив этот результат в (13.23), находим пик сжатого сигнала

$$s_{вых}(t_0)=AB_s(0)=[B_s(0)]^{3/2}\Big/\left[\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}. \qquad (13.29)$$

Таким образом, пик сжатого сигнала (в отсутствие усиления) выражается через корреляционную функцию исходного сигнала $s(t)$.

13.5. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РАДИОИМПУЛЬСА С ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

В качестве иллюстрации согласованной фильтрации рассмотрим оптимальную обработку важного для практики и распространенного в радиолокации сигнала, изображенного на рис. 13.6, *а*. Огибающая этого сигнала имеет прямоугольную форму, а частота заполнения нарастает по линейному закону (рис. 13.6, *б*) со скоростью

$$\beta=2\omega_д/T_с=2\cdot 2\pi f_д/T_с, \qquad (13.30)$$

где $T_с$ — длительность импульса; $2\omega_д$ — полное изменение частоты внутри импульса; $\omega_0=2\pi f_0$ — центральная частота заполнения. В дальнейшем исходим из условия, что $2\omega_д \ll \omega_0$. Таким образом,

$$\omega(t)=\omega_0+\beta t,\ \ -T_с/2\leqslant t\leqslant T_с/2,$$

а мгновенное значение сигнала в интервале $-T_с/2$ до $T_с/2$ определяется выражением

$$s(t)=E_0\cos(\omega_0 t+\beta t^2/2). \qquad (13.31)$$

Спектральная плотность подобного импульса была определена в гл. 3. Было установлено, что модуль и фаза спектральной плотности определяются формулами (3.42) и (3.43) соответственно.

Эти выражения могут быть в принципе положены в основу

синтезирования фильтра, но создание четырехполюсника, точно реализующего столь сложные АЧХ и ФЧХ, представляет собой трудную или вообще невыполнимую задачу. Поэтому приходится прибегать к различным приемам аппроксимации АЧХ и ФЧХ. Делается допущение о том, что огибающая спектра сигнала имеет прямоугольную форму, а ФЧХ — форму квадратичной параболы. Таким образом, точные выражения заменяются приближенными [см. пояснения к формулам (3.42) и (3.43)]:

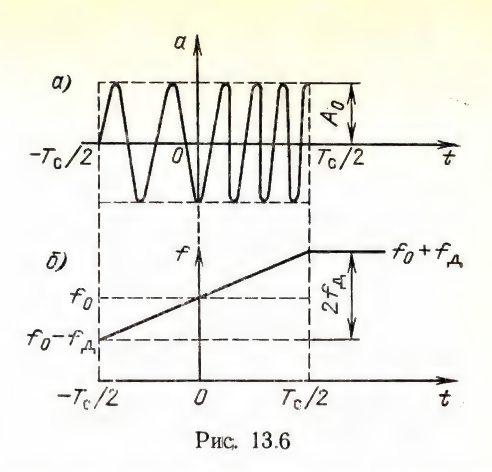


Рис. 13.6

$$S(\omega)\approx A_0T_c/2\sqrt{m}=\text{const},\ \ \omega_0-\omega_д<\omega<\omega_0+\omega_д,$$

$$\theta_s(\omega)\approx-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta}=-\frac{\pi}{4}m\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2},\ \ \omega_0-\omega_д<\omega<\omega_0+\omega_д.$$

В § 3.7 было показано, что такое приближение тем лучше, чем больше $m=2f_дT_c$ (постоянный фазовый сдвиг $\pi/4$ опущен).

При отсчете времени t от начала импульса фазовый спектр сигнала запишем в виде

$$\theta_s(\omega)=-\frac{\pi}{4}m\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2}-\frac{\omega T_c}{2}.$$

Для сигнала с подобными амплитудными и фазовыми спектрами согласованный фильтр должен иметь прямоугольную АЧХ и ФЧХ, определяемую выражением

$$\varphi_K(\omega)=-\theta_s(\omega)-\omega T_c=\left[\frac{\pi}{4}m\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2}+\frac{\omega T_c}{2}\right)-\omega T_c=$$

$$=\frac{\pi}{4}m\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2}-\frac{\omega T_c}{2}. \qquad (13.32)$$

Строго прямоугольная АЧХ также неосуществима. Поэтому дальнейшее упрощение заключается в замене прямоугольной амплитудной характеристики характеристикой реализуемого полосового фильтра. После этого фильтр может быть осуществлен в виде сочетания двух линейных четырехполюсников: полосового резонансного фильтра (обычный усилитель промежуточной частоты приемника) и специального четырехполюсника с равномерной АЧХ и квадратичной ФЧХ.

Заметим, что фазовой характеристике (13.32) соответствует групповое время запаздывания узкополосного сигнала

$$\tau(\omega)=\frac{d\varphi_K(\omega)}{d\omega}=\frac{\pi}{2}m\frac{(\omega-\omega_0)}{\omega_д^2}-\frac{T_c}{2}.$$

В качестве устройства с требуемой ФЧХ может быть использована любая цепь, у которой задержка в некотором частотном диапазоне (вблизи частоты ω_0) линейно зависит от частоты. Такими свойствами обладают, в частности, дисперсионные ультразвуковые линии задержки.

Определим сигнал на выходе фильтра. При этом будем иметь в виду не аппроксимированный, а точно согласованный фильтр, передаточная функция которого отвечает условию (13.6).

Основываясь на соотношении (13.21), воспользуемся выражением (3.96′) для корреляционной функции входного сигнала, выведенным в § 3.11:

$$B_a(\tau) \approx \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin\left[\pi m \frac{\tau}{T_c}\left(1 - \frac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\pi m (\tau/T_c)} \cos \omega_0 \tau.$$

Заменяя в этом выражении τ на $t - T_c$ и ограничиваясь рассмотрением участка вблизи точки $t = T_c$, т. е. в окрестности точки, где выходной сигнал достигает пикового значения, можем считать $\tau/T_c \ll 1$.

Тогда

$$B_a(t - T_c) \approx \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin[(\pi m/T_c)(t - T_c)]}{(\pi m/T_c)(t - T_c)} \cos \omega_0 (t - T_c).$$

Учитывая, что $m = (1/\pi)\, \omega_д T_c$ [см. (3.37)], последнее выражение перепишем в несколько иной форме:

$$B_a(t - T_c) = \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin \omega_д (t - T_c)}{\omega_д (t - T_c)} \cos \omega_0 (t - T_c). \qquad (13.33)$$

Подставляя полученное выражение в (13.21), находим напряжение на выходе согласованного фильтра

$$u_{вых}(t) = A B_a(t - T_c) = \frac{1}{2} A E_0^2 T_c \frac{\sin \omega_д (t - T_c)}{\omega_д (t - T_c)} \cos \omega_0 (t - T_c) =$$

$$= U_{вых}(t) \cos \omega_0 (t - T_c),$$

где огибающая

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2} A E_0^2 T_c \frac{\sin \omega_д (t - T_c)}{\omega_д (t - T_c)}. \qquad (13.34)$$

Заметим, что частота заполнения не модулирована и равна ω_0, т. е. средней частоте входного сигнала.

Определим пик сжатого сигнала при нормировании энергии выходного сигнала к энергии сигнала на входе [см. (13.29)]. В данном случае

$$B_a(0) = Э = \frac{1}{2} E_0^2 T_c, \text{ а } B_a(\tau) \approx \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin \omega_д \tau}{\omega_д \tau} \cos \omega_0 \tau,$$

поэтому

$$s_{\text{вых}}(t_0)=\frac{(^1/_2E_0{}^2T_{\text{c}})^{3/2}}{\left[\frac{1}{2}E_0{}^2T_{\text{c}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega_{\text{д}}\tau}{(\omega_{\text{д}}\tau)^2}\cos^2\omega_0\tau d\tau\right]^{1/2}}.$$

Подставив $\cos^2\omega_0\tau=1/2+{}^1/_2\cos 2\omega_0\tau$ и отбросив интеграл с подынтегральной функцией, содержащей множитель $\cos 2\omega_0\tau$, а также учтя равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\pi$, получим окончательный результат

$$s_{\text{вых}}(t_0)=\frac{(^1/_2E_0{}^2T_{\text{c}})^{1/2}}{\left[\frac{1}{2\omega_{\text{д}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx\right]^{1/2}}=E_0\sqrt{2f_{\text{д}}T_{\text{c}}}=E_0\sqrt{m}.$$

Таким образом, выражение (13.34) можно переписать в форме

$$U_{\text{вых}}(t)=\sqrt{m}E_0\frac{\sin\omega_{\text{д}}(t-T_{\text{c}})}{\omega_{\text{д}}(t-T_{\text{c}})}. \tag{13.35}$$

Сигналы на входе и выходе фильтра изображены на рис. 13.7 (при $E_0=1$). Наибольшая амплитуда выходного сигнала (в момент $t=T_{\text{c}}$) в $\sqrt{m}$ раз больше, чем на входе, а длительность основного лепестка, отсчитываемого между двумя нулями, равна $1/f_{\text{д}}$. Длительность выходного импульса на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимального значения $T_{\text{c вых}}\approx 0{,}89/2f_{\text{д}}$.

Таким образом, отношение

$T_{\text{c}}/T_{\text{c вых}}\approx 1{,}1\cdot 2f_{\text{д}}T_{\text{c}}$,

близкое по значению к параметру модуляции $m=2f_{\text{д}}T_{\text{c}}$, можно назвать коэффициентом сжатия ЛЧМ импульса в согласованном фильтре.

Из (13.35) видно, что компенсация фаз спектра сигнала — основная операция в согласованном фильтре — приводит к сжатию импульса в m раз при одновременном увеличении пика сигнала в $\sqrt{m}$ раз (при нормировании энергий входного и выходного сигналов). Это весьма ценно для практики, так как позволяет удлинять импульс, генерируемый передатчиком, для увеличения энергии сигнала без потери разрешающей способности, которая определяется длительностью импульса на выходе согласованного фильтра. Техническое преимущество этого метода особенно проявляется в тех случаях, когда увеличение амплитуды импульсов в передатчике ограничивается импульсной мощностью электронных приборов, используемых для генерации колебаний. Значительно проще увеличивать энергию сигнала удлинением импульсов при одновременной ЧМ. При этом параметр модуляции m должен расти пропорционально длительно-

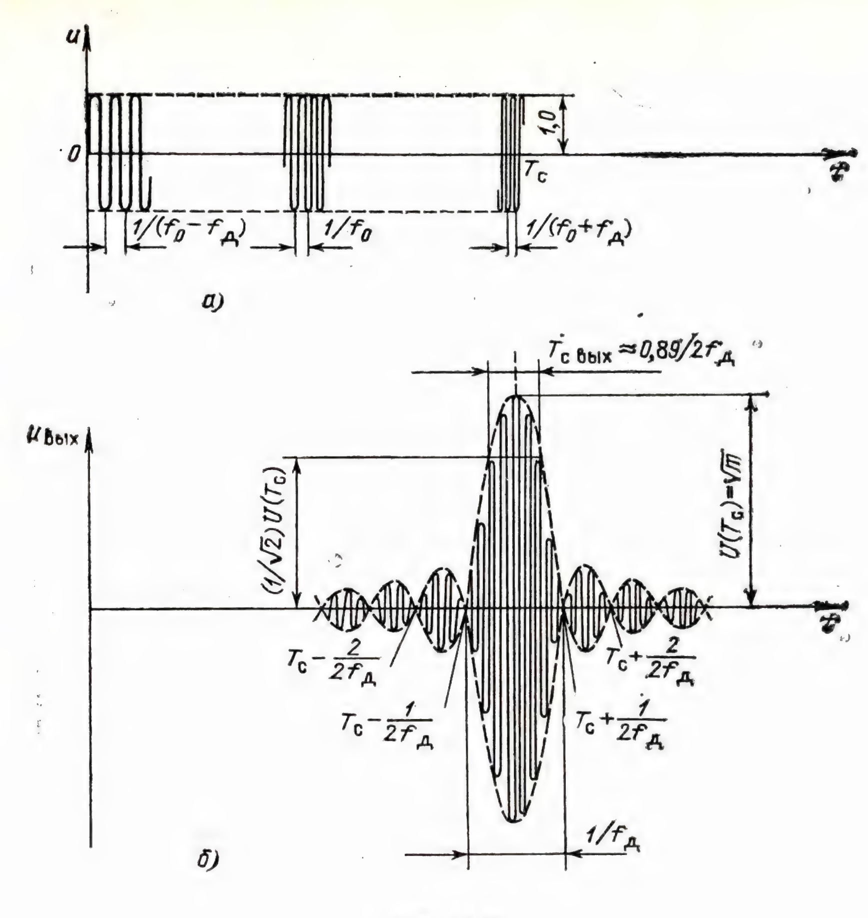


Рис. 13.7

сти T_c излучаемого сигнала (при заданной длительности $T_{c\,вых}$ импульса на выходе согласованного фильтра). Иными словами, девиация частоты должна оставаться неизменной, а скорость изменения частоты β должна быть обратно пропорциональна T_c.

13.6. ФИЛЬТРАЦИЯ ЗАДАННОГО СИГНАЛА ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Пусть на полностью известный сигнал $s(t)$ линейно (аддитивно) накладывается шум с неравномерным энергетическим спектром $W(\omega)$ (небелый шум). Требуется синтезировать фильтр, максимизирующий отношение сигнал-помеха. В отличие от ранее рассмотренных задач в данном случае передаточная функция должна быть согласована не только со спектром сигнала $\mathbf{S}(\omega)$, но и с энергетическим спектром шума $W(\omega)$ [22].

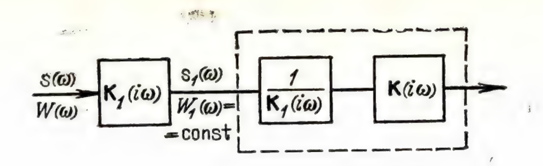


Рис. 13.8

Наиболее простым способом отыскания требуемой передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ является приведение заданного шума к белому. Для выяснения сути этого способа рассмотрим вспомогательную структурную схему, показанную на рис. 13.8. На этой схеме $\mathbf{K}(i\omega)$ обозначает искомую передаточную функцию синтезируемого фильтра, а $\mathbf{K}_1(i\omega)$ и $1/\mathbf{K}_1(i\omega)$ являются передаточными функциями двух вспомогательных условных четырехполюсников, введение которых не оказывает никакого влияния на работу устройства, так как их результирующая передаточная функция равна единице. Поскольку функцию $\mathbf{K}_1(i\omega)$ можно выбирать произвольно, то модуль этой функции зададим в виде

$$K_1(\omega)=\sqrt{N_0/W(\omega)}, \tag{13.36}$$

где N_0 — постоянная величина.

Тогда на выходе первого четырехполюсника будет действовать шум с равномерным энергетическим спектром

$$W_1(\omega)=W(\omega)[K_1(\omega)]^2=N_0=\text{const},$$

т. е. *белый шум*.

Само собой разумеется, сигнал на выходе этого четырехполюсника отличается от входного сигнала, так как спектральная плотность

$$\mathbf{S}_1(\omega)=\mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega) \tag{13.37}$$

отличается от $S(\omega)$. Однако это обстоятельство несущественно; основной задачей является максимизация отношения сигнал-помеха на выходе всего устройства. Поэтому важно отношение энергии сигнала к энергетическому спектру шума, а форма сигнала при этом роли не играет.

Так как в рассматриваемом сечении схемы шум является белым, то для получения на выходе максимума отношения сигнал-помеха вся последующая часть устройства должна иметь передаточную функцию, отвечающую условию (13.9). Таким образом.

$$\frac{1}{\mathbf{K}_1(i\omega)}\,\mathbf{K}(i\omega)=A\mathbf{S}_1^*(\omega)\,e^{-i\omega t_0}. \tag{13.38}$$

Левая часть этого выражения является результирущей передаточной функцией четырехполюсника, обведенного на рис. 13.8 штриховой линией, а правая часть — функцией, комплексно-сопряженной спектру $\mathbf{S}_1(\omega)$ и дополненной множителем $e^{-i\omega t}$.

Из выражения (13.38) получаем

$$\mathbf{K}(i\omega)=A\mathbf{S}_1^*(\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t_0}\,. \qquad (13.39)$$

Но из (13.37) следует, что $\mathbf{S}_1^*(\omega)=\mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{K}_1^*(i\omega)$.

Таким образом,

$$\mathbf{K}(i\omega)=A\mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{K}_1^*(i\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t_0}=A\mathbf{S}^*(\omega)\,[K_1(\omega)]^2\mathrm{e}^{-i\omega t_0}.$$

Подставляя сюда (13.36), окончательно получаем

$$\mathbf{K}(i\omega)=AN_0\,\frac{\mathbf{S}^*(\omega)}{W(\omega)}\,\mathrm{e}^{-i\omega t_0}. \qquad (13.40)$$

Нетрудно истолковать физический смысл этого соотношения. Как и в случае белого шума, для максимизации отношения сигнал-помеха в фильтре должна осуществляться компенсация начальных фаз спектра входного сигнала $\mathbf{S}(\omega)$. Поэтому в правую часть (13.40) входит комплексно-сопряженная функция $\mathbf{S}^*(\omega)$. Однако модуль передаточной функции должен быть, во-первых, пропорционален модулю $\mathbf{S}(\omega)$ (как и в случае белого шума) и, во-вторых, обратно пропорционален энергетическому спектру шума на входе фильтра. Тем самым обеспечивается подчеркивание тех компонентов спектра сигнала, при которых интенсивность шума меньше.

13.7. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

При обработке сложных сигналов с внутриимпульсной модуляцией начальная фаза θ_0 высокочастотного заполнения в выражении

$$a(t,\theta_0)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0] \qquad (13.41)$$

обычно является неизвестной величиной.

Если фильтр согласован с сигналом $a(t,0)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$ без учета θ_0, то при наличии фазового сдвига θ_0 фильтр оказывается рассогласованным. Выясним влияние этого рассогласования на выходное колебание.

При точном согласовании сигнал на выходе фильтра совпадает по форме с корреляционной функцией входного сигнала, поэтому в случае узкополосного сигнала (13.41) целесообразно перейти к аналитическому сигналу, что позволяет воспользоваться соотношением

$$a_{\text{вых}}(t,\;0)=\frac{1}{2}C\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(x)\,A^*(x+t)\,dx\right]. \qquad (13.42)$$

Это выражение получается из (3.87′) заменой τ на $t-t_0$ (при $t_0=0$), а также переменной интегрирования t на x. Интеграл в (13.42) имеет смысл корреляционной функции $B_A(t)$ комплексной огибающей $A(t)$.

Указанную функцию удобно записать в форме

$$B_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, A^*(x-t)\, dx,$$

что равносильно изменению знака сдвига t. Тогда (13.42) переходит в

$$a_{\text{вых}}(t,\ 0) = {}^1/_2 C\, \mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{A}^*(x-t)\, dx \right] =$$

$$= {}^1/_2 C\, \mathrm{Re}\,[e^{i\omega_0 t} B_A(t)]. \qquad (13.42')$$

Введем в рассмотрение начальную фазу θ_0 входного сигнала. Для этого достаточно домножить функцию $\mathbf{A}(x)$ на $e^{i\theta_0}$.

Новый интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, e^{i\theta_0} \mathbf{A}^*(x-t)\, dx$ определяет взаимную корреляцию между функциями $\mathbf{A}(x)\, e^{i\theta_0}$ и $\mathbf{A}^*(x-t)$, однако после вынесения множителя $e^{i\theta_0}$ за знак интеграла получается произведение $e^{i\theta_0} B_A(t)$. Таким образом, приходим к следующему выражению для сигнала на выходе рассогласованного фильтра:

$$a_{\text{вых}}(t,\ \theta_0) = {}^1/_2 C\, \mathrm{Re}\,[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}]\, B_A(t). \qquad (13.43)$$

Из сравнения этого выражения с (13.42′) следует, что для учета начальной фазы достаточно прибавить θ_0 к слагаемому $\omega_0 t$, сохранив огибающую выходного сигнала.

Проиллюстрируем этот результат на примере ЛЧМ импульса, рассмотренного в примерах § 3.11 и 13.5.

Из соотношений (3.93) и (3.96) после замены в них τ на t (задержка сигнала не учитывается) вытекает следующее выражение для корреляционной функции огибающей:

$$B_A(t) = T_c \frac{\sin\left[\pi m \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]}{\pi m\,(t/T_c)}.$$

Таким образом,

$$a_{\text{вых}}(t,\ \theta_0) = A T_c \frac{\sin\left[\pi m \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]}{\pi m\,(t/T_c)} \cos(\omega_0 t + \theta_0). \qquad (13.44)$$

На рис. 13.9 изображено выходное колебание на отрезке времени вблизи пика при $\theta_0 = 90°$ для фильтра, согласованного с ЛЧМ сигналом. Параметры входного сигнала соответствуют приведенным на рис. 13.6. В зависимости от θ_0 положение пика сжатого сигнала на оси времени может изменяться в пределах $\pm\pi/\omega_0$, т. е. половины периода высокочастотного заполнения. Из этого примера видно, что при достаточно большом числе периодов, приходящихся на длительность сжатого сигнала, влияние θ_0 на пи-

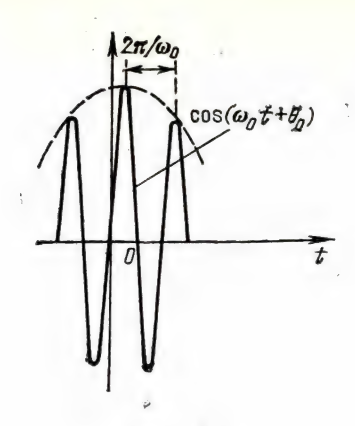


Рис. 13.9

жовое значение невелико. Если дальнейшая обработка сигнала ведется по огибающей, то при выполнении указанного условия относительно высокочастотного заполнения влияние θ_0 исключается.

13.8. СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО СИГНАЛА. КВАДРАТУРНАЯ ОБРАБОТКА

В гл. 3 и 6 отмечалось, что комплексная огибающая $\mathbf{A}(t)$ узкополосного сигнала $a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$ содержит в себе всю информацию, обусловленную как амплитудной, так и угловой модуляцией. Во многих практических задачах радиотехники обработку сигнала целесообразно проводить непосредственно по огибающей $\mathbf{A}(t)$ с исключением несущей частоты ω_0. Такой подход особенно актуален при цифровой обработке сигналов. Осуществление цифровой обработки на частотах радиотехнического диапазона усложняется из-за требования чрезвычайно высокого быстродействия АЦП и арифметических устройств цифрового фильтра. В связи с этим цифровая обработка, как правило, проводится в тракте видеочастоты приемного устройства.

Сигнал на выходе усилителя промежуточной частоты приемного устройства представим в форме

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)+\theta_0],\quad 0\leqslant t<T_s. \tag{13.45}$$

После гетеродинирования на выходе двух фазовых детекторов (ФД на рис. 13.10) образуется комплексный сигнал

$$\dot{S}(t)=s_c(t)+is_s(t)=A(t)\cos[\theta(t)+\theta_0]+$$
$$+iA(t)\sin[\theta(t)+\theta_0]=A(t), \tag{13.46}$$

где

$$\mathbf{A}(t)=A(t)^{i[\theta(t)+\theta_0]}$$

— комплексная огибающая исходного сигнала $a(t)$.

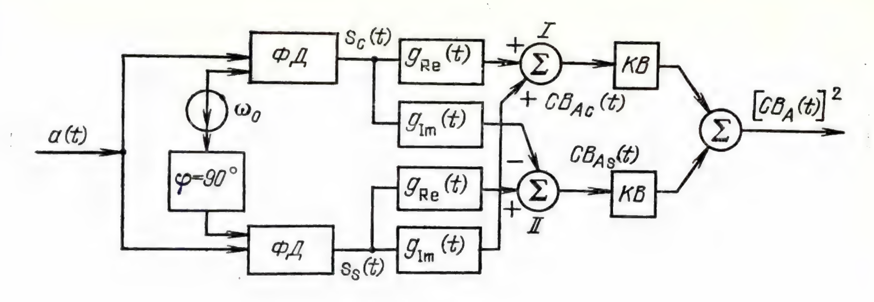


Рис. 13.10

Свойства согласованной фильтрации, изложенные в § 13.1—13.4 для действительных сигналов, полностью распространяются и на комплексные сигналы. Поэтому импульсная характеристика оптимального фильтра в соответствии с (13.16) должна иметь вид

$$\dot{g}(t)=C\dot{s}(T_s-t)=C\{A(T_s-t)\cos[\theta(T_s-t)+\theta_0]+ \\ +iA(T_s-t)\sin[\theta(T_s-t)+\theta_0]\}=g_{\mathrm{Re}}(t)+ig_{\mathrm{Im}}(t), \qquad (13.47)$$

где $g_{\mathrm{Re}}(t)$ и $g_{\mathrm{Im}}(t)$ — действительная и мнимая части импульсной характеристики фильтра.

Сигнал на выходе согласованного фильтра определим с помощью интегральной свертки:

$$\dot{s}_{\text{вых}}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{s}(x)\,\dot{g}(t-x)\,dx. \qquad (13.48)$$

Подставив (13.47) в (13.48), придем к следующему результату:

$$\dot{s}_{\text{вых}}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[s_{\mathrm{c}}(x)+is_{\mathrm{s}}(x)]\,[g_{\mathrm{Re}}(t-x)-ig_{\mathrm{Im}}(t-x)]\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_{\mathrm{c}}(x)\,g_{\mathrm{Re}}(t-x)\,dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_{\mathrm{s}}(x)\,g_{\mathrm{Im}}(t-x)\,dx+$$

$$+i\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_{\mathrm{s}}(x)\,g_{\mathrm{Re}}(t-x)\,dx-\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_{\mathrm{c}}(x)\,g_{\mathrm{Im}}(t-x)\right]dx=$$

$$=s_{\mathrm{c\,вых}}(t)+is_{\mathrm{s\,вых}}(t). \qquad (13.49)$$

Алгоритм (13.49) реализуется схемой, показанной на рис. 13.10. Первый интеграл определяет отклик физической цепи с импульсной характеристикой $g_{\mathrm{Re}}(t)$ на воздействие $s_{\mathrm{c}}(t)$, второй интеграл — отклик цепи с импульсной характеристикой $g_{\mathrm{Im}}(t)$ на воздействие $s_{\mathrm{s}}(t)$ и т. д.

Сопоставление выражений (13.42′) и (13.49) показывает, что $A_{\text{вых}}(t)=CB_A(t)=CB_{A_c}(t)+iCB_{A_s}(t)$ совпадает по форме с корреляционной функцией (комплексной) суммарного сигнала $A_{\text{вых}}(t)$, сигнал на выходе сумматора I соответствует функции $CB_{A_c}(t)$, а на выходе сумматора II — функции $CB_{A_s}(t)$. Постоянная задержка T_s опущена.

После дополнительной обработки (квадрирование и суммирование), показанной в правой части структурной схемы (рис. 13.10), получаем окончательно

$$[s_{\text{вых}}(t)]^2=C^2\left[B_{A_c}^2(t)+B_{A_s}^2(t)\right]=C^2\left[B_A^2(t)\right]. \qquad (13.50)$$

Отметим, что операция квадрирования исключает влияние начальной фазы θ_0. Поскольку эта операция осуществляется после максимизации отношения сигнал-помеха в линейной части устройства, потери, связанные с введением нелинейного преобразования, выражены незначительно.

13.9. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

В данном параграфе не только помеха, но и полезный сигнал является случайным процессом.

Пусть на входе линейного фильтра с постоянными параметрами действует аддитивная сумма сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$:

$$x(t)=s(t)+n(t). \qquad (13.51)$$

Оба случайных процесса стационарны, взаимно независимы, с нулевыми средними: $\overline{s(t)}=\overline{n(t)}=0$.

Энергетические спектры $W_s(\omega)$ и $W_n(\omega)$ предполагаются известными.

Отклик фильтра на воздействие $x(t)$ определим выражением (5.24) или в эквивалентной форме (5.26):

$$\check{s}(t)\int_{-\infty}^{t}x(\xi)\,g(t-\xi)\,d\xi, \qquad (13.52)$$

$$\check{s}(t)=\int_{0}^{\infty}x(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi \qquad (13.53)$$

($\check{s}(t)$ обозначает не истинный сигнал $s(t)$, а лишь его «оценку», поскольку на вход фильтра поступает смесь сигнала и помехи).

Бесконечный нижний предел в интеграле (13.52) указывает на то, что для получения в момент t на выходе фильтра оценки $s(t)$ требуется знание $x(t)$ за все предшествующее время. Подобный фильтр иногда называют каузальным (причинным).

Разность

$$\varepsilon(t)=s(t)-\check{s}(t) \qquad (13.54)$$

называется ошибкой, погрешностью оценки.

Проблема заключается в отыскании импульсной характеристики $g(t)$, при которой среднеквадратическое значение ошибки

$$\overline{\varepsilon^2(t)}=\overline{[s(t)-\check{s}(t)]^2} \qquad (13.55)$$

оказывается минимальным, т. е. передаваемый сигнал воспроизводится с минимальными отклонениями от истинной величины $s(t)$.

Фильтр с такой импульсной характеристикой называется *оптимальным по критерию минимальной среднеквадратической ошибки*. Область применения: определение статистических характеристик передаваемого процесса (корреляционной функции, спектральной интенсивности, параметров распределения).

Определенный выше фильтр оптимален в классе линейных цепей при гауссовском распределении процессов. При негауссовском распределении возможны, в принципе, нелинейные цепи, дающие меньшую ошибку.

В основу анализа положим уравнение (13.53). Подставив $\check{s}(t)$ в (13.55), получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)}=\overline{\left[s(t)-\int_0^\infty x(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi\right]^2}. \qquad (13.56)$$

Можно показать, что $\overline{\varepsilon^2(t)}$ минимально, если ошибка $\varepsilon(t)$ ортогональна по отношению к функции $x(t-\xi)$.

Для детерминированного сигнала аналогичное утверждение было обосновано в § 2.1 при определении коэффициентов обобщенного ряда Фурье, обеспечивающих минимизацию среднеквадратической ошибки аппроксимации.

Применительно к выражениям (13.54) и (13.56) можно дать следующую геометрическую трактовку принципа ортогональности функций $\varepsilon(t)$ и $x(t-\tau)$.

Рассмотрим трехмерное пространство сигналов V с взаимно перпендикулярными координатными осями y_1, y_2, y_3 (рис. 13.11). Вектор сигнала $\mathbf{S}$, расположенный над плоскостью y_1, y_2, аппроксимируется вектором $\check{\mathbf{S}}$, лежащим в указанной плоскости. Каков должен быть этот вектор, чтобы длина вектора ошибки $\mathbf{S}-\hat{\mathbf{S}}$, т. е. норма $\|\mathbf{S}-\check{\mathbf{S}}\|$, была минимальной? Очевидно, что вектор $\mathbf{S}$ нужно спроектировать на плоскость y_1, y_2 в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Иными словами, вектор ошибки должен быть ортогональным по отношению к вектору $\check{\mathbf{S}}$. Но направление вектора $\check{\mathbf{S}}$, соответствующего интегралу $\int^\infty x(t-\xi)g(\xi)d\xi$, определяется про-

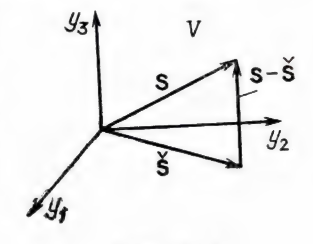


Рис. 13.11

цессом $x(t-\xi)$. Таким образом, условие ортогональности функций $\varepsilon(t)$ и $\check{s}(t)$ сводится к уравнению

$$\overline{\left[s(t)-\int_0^\infty x(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi\right]x(t-\tau)}=0, \quad \tau>0. \tag{13.57}$$

Учитывая, что $\overline{s(t)x(t-\tau)}=R_{sx}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция процессов $s(t)$ и $x(t)$, а $\overline{x(t-\xi)x(t-\tau)}=R_x(\tau-\xi)$ — корреляционная функция процесса $x(t)$, приходим к интегральному уравнению

$$R_{sx}(\tau)-\int_0^\infty R_x(\tau-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=0, \quad \tau>0 \tag{13.58}$$

(уравнение Винера—Хопфа).

В частном случае статистически независимых процессов $s(t)$ $n(t)$ взаимная корреляционная функция $R_{sn}(\tau)=0$ и $R_{sx}(\tau)=$ $=R_{s(s+n)}(\tau)=R_s(\tau)$ есть корреляционная функция полезного сигнала. В этом случае уравнение (13.58) принимает вид

$$R_s(\tau)-\int_0^\infty R_x(\tau-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=0, \quad \tau>0. \tag{13.58$'$}$$

Функция $g(\xi)$, удовлетворяющая уравнению (13.58), а также условию $g(\xi)=0$ при $\xi<0$, и является импульсной характеристикой фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку аппроксимации.

В уравнении (13.58′) функция $R_s(\tau)$ четная, а $\int_0^\infty R_x(\tau-$ $-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$ — функция общего вида, поскольку $g(\xi)$ существует только при $\xi>0$. Следовательно, эта функция может компенсировать $R_s(\tau)$ только при $\tau>0$.

Перепишем поэтому уравнение (13.58′) в следующей эквивалентной форме:

$$R_s(\tau)-\int_0^\infty R_x(\tau-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=y(\tau), \tag{13.59}$$

где $y(\tau)=0$ при $\tau>0$, а при $\tau<0$ $y(\tau)$ учитывает нескомпенсированную часть $R_s(\tau)$.

Для решения уравнения (13.59) целесообразно перейти к спектральным интенсивностям $W_s(\omega)$ и $W_x(\omega)$, воспользовавшись соответствиями $R_s(\tau)\div W_s(\omega)$, $R_x(\tau)\div W_x(\omega)$, вытекающими из теоремы Винера—Хинчина. С учетом особенности уравнения (13.58′) — сочетания четной функции с функцией общего вида — целесообразен переход к преобразованиям Лапласа, двусторонним по отношению к $R_s(\tau)$, $R_x(\tau)$ и односторонним

к $g(\tau)$ и $y(\tau)$. Для этого достаточно переменную ω представить в виде $\omega = p/i$:

$$\mathscr{L}[R_s(\tau)] = W_s(p/i), \mathscr{L}[R_x(\tau)] = W_x(p/i).$$

Преобразование Лапласа (одностороннее) функции $g(\tau)$

$$\mathscr{L}[g(\tau)] = \int_0^\infty g(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau = \mathbf{K}(p)$$

имеет смысл передаточной функции фильтра, а для функции $y(\tau)$, существующей только в области $\tau < 0$,

$$\mathscr{L}[y(\tau)] = \int_0^\infty y(-\tau)\, e^{p\tau} d\tau = \mathbf{Y}(p).$$

Наконец, интегральной свертке в выражении (13.57) соответствует произведение $W_x(p/i)\mathbf{K}(p)$.

В результате приходим к новому уравнению

$$W_s(p/i) - W_x(p/i)\mathbf{K}(p) = \mathbf{Y}(p). \qquad (13.60)$$

Передаточная функция $\mathbf{K}(p)$, удовлетворяющая этому уравнению, и является оптимальной. Обозначим ее $\mathbf{K}_{opt}(p)$.

По этой функции нетрудно найти и импульсную характеристику [см. (5.15)]

$$g_{opt}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{K}_{opt}(p)\, e^{p\tau} dp. \qquad (13.61)$$

Решение уравнения (13.60) основывается на методе факторизации функции [15] $W_x(p/i)$, т. е. представлении ее в виде произведения

$$W_x(p/i) = A^+(p)\, A^-(p), \qquad (13.62)$$

у которого сомножитель $A^+(p)$ имеет полюсы и нули только в левой p-полуплоскости, а $A^-(p)$ — только в правой p-полуплоскости. Для этого требуется, чтобы энергетический спектр $W_x(p/i)$ являлся рациональной функцией комплексной переменной p.

Кроме того, первое слагаемое в (13.60) необходимо представить в форме

$$W_s(p/i) = \frac{W_s(p/i)}{A^-(p)} A^-(p) = [B^+(p) + B^-(p)]\, A^-(p), \qquad (13.63)$$

где $B^+(p)$ — функция, аналитическая в области $\mathrm{Re}\,p \geqslant 0$, а $B^-(p)$ — в области $\mathrm{Re}\,p < 0$ [т. е. $B^+(p)$ не имеет полюсов в правой, а $B^-(p)$ — в левой p-полуплоскости].

Как и в предыдущем случае, полюсы в левой полуплоско-

сти относим к $B^+(p)$, а полюсы правой — к $B^-(p)$. Подставив (13.62) и (13.63) в (13.60), получим

$$[B^+(p)+B^-(p)]A^-(p)-A^+(p)A^-(p)\mathbf{K}(p)=\mathbf{Y}(p). \qquad (13.64)$$

Но изображение по Лапласу $\mathbf{Y}(p)$ функции $y(\tau)$, существующей только при $\tau<0$, не может иметь полюсов в левой p-полуплоскости. Следовательно, и левая часть уравнения (13.64) должна быть выражена через функции, у которых полюсы только в правой полуплоскости, что возможно при выполнении равенства

$$B^+(p)A^-(p)-A^+(p)A^-(p)\mathbf{K}(p)=0.$$

Итак, искомая передаточная функция фильтра

$$\mathbf{K}_{\text{opt}}(p)=B^+(p)/A^+(p). \qquad (13.65)$$

Функции $B^+(p)$ и $A^+(p)$, определяемые видом энергетических спектров $W_s(\omega)$ и $W_x(\omega)$, будут далее проиллюстрированы примером.

Составим в заключение выражение для среднеквадратической ошибки на выходе оптимального фильтра. В соответствии в (13.54) и (13.53) случайная ошибка

$$\varepsilon(t)=s(t)-\int_0^\infty x(t-\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi.$$

Образуем произведение

$$\varepsilon(t)\,\varepsilon(t)=\left[s(t)-\int_0^\infty x(t-\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi\right]\left[s(t)-\check{s}(t)\right]=$$

$$=s^2(t)-\int_0^\infty s(t)\,x(t-\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi-\varepsilon(t)\,\check{s}(t).$$

Функции $\varepsilon(t)$ и $\check{s}(t)$ по условию ортогональны, следовательно, усреднение последнего выражения приводит к уравнению

$$\overline{\varepsilon^2(t)}_{\min}=R_s(0)-\int_0^\infty R_{sx}(\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi. \qquad (13.66)$$

Основываясь на независимости процессов $s(t)$ и $n(t)$, полагаем $R_{sx}(\tau)=R_s(\tau)$ [см. комментарий к (13.58)].

Тогда окончательно

$$\overline{\varepsilon^2(t)}=R_s(0)-\int_0^\infty R_s(\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi. \qquad (13.67)$$

Пример, иллюстрирующий изложенный выше метод, приводится в следующем параграфе.

13.10. УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРА

Анализ характеристик оптимального фильтра существенно упрощается, когда исследуемый процесс $x(t)$ можно «записать», т. е. ввести в устройство памяти для последующей его обработки. Если время наблюдения достаточно велико (теоретически $-\infty<t<\infty$) то при вычислении оценки $\check{s}(t)$ можно использовать значения $x(t)$ при всех t', как $t'<t$ (предшествующие значения), так и $t'>t$ (будущие значения)[1]. Фильтр, работающий в подобном режиме, называется некаузальным. При этом исходное выражение (13.53) должно быть заменено выражением

$$\check{s}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi)\, g(\xi)\, d\xi, \tag{13.68}$$

отличающимся от (13.53) только нижним пределом интеграла.

Повторив рассуждения, приведшие к (13.58), получим новое уравнение

$$R_{sx}(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-\xi)\, g(\xi)\, d\xi=0, \quad -\infty<\tau<\infty. \tag{13.69}$$

В случае статистически независимых $s(t)$ и $n(t)$

$$R_s(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-\xi)\, g(\tau)\, d\xi=0, \quad -\infty<\tau<\infty. \tag{13.69$'$}$$

Перейдя к спектральным интенсивностям $W_s(\omega)$, $W_x(\omega)$ процессов $s(t)$ и $x(t)$, первое слагаемое в (13.69′) представим в форме

$$R_s(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega,$$

а второе слагаемое в соответствии с теоремой о свертке [см. (2.59)] — в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-\xi)\, g(\xi)\, d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, K(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega.$$

---

[1] **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех.— М.: Сов. радио, 1960.

Тогда уравнение (13.69′) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[W_s(\omega)-W_x(\omega)K(\omega)]\,e^{i\omega\tau}d\omega=0.$$

из которого непосредственно определяется оптимальная передаточная функция

$$K_{\text{opt}}(\omega)=\frac{W_s(\omega)}{W_x(\omega)}=\frac{W_s(\omega)}{W_s(\omega)+W_n(\omega)}. \tag{13.70}$$

Смысл этого результата очевиден: на частотах, при которых спектр сигнала существует, а спектр помехи равен нулю, $K_{\text{opt}}(\omega)=1$. В противоположном случае $K_{\text{opt}}(\omega)=0$. Если спектры сигнала и помехи не перекрываются, то помеха полностью подавляется, а функциональный вид сигнала не меняется.

Среднеквадратическая ошибка, по аналогии с (13.67)

$$\overline{\varepsilon^2(t)}=R_s(0)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_s(\xi)\,g_{\text{opt}}(\xi)\,d\xi. \tag{13.71}$$

Переходя, как и в (13.69′), к спектральным интенсивностям и учитывая (13.70), получаем

$$\overline{\varepsilon^2(t)}_{\min}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[W_s(\omega)-W_s(\omega)\frac{W_s(\omega)}{W_s(\omega)+W_n(\omega)}\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{W_n(\omega)\,W_s(\omega)}{W_s(\omega)+W_n(\omega)}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_n(\omega)\,K_{\text{opt}}(\omega)\,d\omega. \tag{13.72}$$

Остановимся на вопросе об импульсной характеристике некаузального фильтра. В случае действительных функций $s(t)$ и $n(t)$ функции $W_s(\omega)$, $W_x(\omega)$, а следовательно, и $K_{\text{opt}}(\omega)$ являются функциями действительными и четными относительно ω. Очевидно, что при этом импульсная характеристика фильтра является функцией четной относительно t. В этом и проявляется нарушение причинности фильтра. Физическая цепь с подобной импульсной характеристикой нереализуема. Можно лишь, как указывалось ранее, осуществить математическую обработку процесса, записанного в устройство памяти.

Проиллюстрируем изложенный метод на примерах каузального и некаузального фильтров при следующих характеристиках полезного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$:

— сигнал в виде стационарного случайного процесса с корреляционной функцией

$$R_s(\tau)=R_s(0)\,e^{-\alpha|\tau|} \qquad (13.73)$$

и с энергетическим спектром

$$W_s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau=2\int_0^{\infty} R_s(\tau)\cos\omega\tau d\tau=$$

$$=2R_s(0)\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau d\tau=W_s(0)\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}, \qquad (13.74)$$

где $W_s(0)=2R_s(0)/\alpha$;

— помеха в виде белого шума с корреляционной функцией $R_n(\tau)=N\delta(\tau)$ [см. (4.40)] и энергетическим спектром $W_n(\omega)=N=\text{const}$.

Графики спектров $W_s(\omega)$ и $W_n(\omega)$ представлены на рис. 13.12.

При независимости процессов $s(t)$ и $n(t)$ энергетический спектр суммы $x(t)=s(t)+n(t)$

$$W_x(\varphi)=W_s(\omega)+N=W_s(0)\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}+N=N\frac{\beta^2+\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}, \qquad (13.75)$$

где

$$\beta^2=\alpha^2(1+m), \quad m=W_s(0)/N. \qquad (13.76)$$

Коэффициент m характеризует соотношение уровней спектров сигнала и помехи (рис. 13.12).

Представив ω в форме p/i, приведем (13.74) и (13.75) к следующим функциям:

$$W_s(\omega)=W_s(p/i)=W_s(0)\frac{\alpha^2}{\alpha^2-p^2},$$

$$W_x(\omega)=W_x(p/i)=N\frac{\beta^2-p^2}{\alpha^2-p^2}=N\frac{(\beta+p)(\beta-p)}{(\alpha+p)(\alpha-p)}.$$

Обратимся сначала к каузальному фильтру.

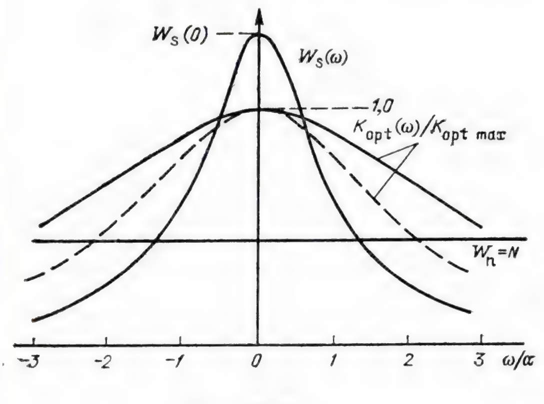


Рис. 13.12

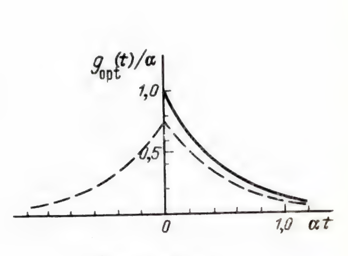


Рис. 13.13

Из последнего выражения очевидно, что входящие в (13.62) множители $A^+(p)$ и $A^-(p)$ имеют следующий смысл:

$$A^+(p)=\sqrt{N}\,\frac{\beta+p}{\alpha+p}\quad A^-(p)=\sqrt{N}\,\frac{\beta-p}{\alpha-p}.$$

Далее из (13.63) следует соотношение

$$B^+(p)+B^-(p)=\frac{W_s(p/i)}{A^-(p)}=\frac{W_s(0)}{\sqrt{N}}\,\frac{\alpha^2}{(\alpha+p)(\beta-p)}.$$

С помощью равенств (13.76) нетрудно получить слагаемые

$$B^+(p)=\frac{\beta-\alpha}{\alpha+p}\sqrt{N},\quad B^-(p)=\frac{\beta+\alpha}{\beta-p}\sqrt{N}.$$

Тогда оптимальная передаточная функция фильтра

$$\mathrm{K}_{\mathrm{opt}}(p)=B^+(p)/A^+(p)=(\beta-\alpha)/(\beta+p) \qquad (13.77)$$

и соответствующая ей импульсная характеристика [см. (13.61)]

$$g_{\mathrm{opt}}(t)=(\beta-\alpha)\,\mathrm{e}^{-\beta t},\ t\geqslant 0. \qquad (13.78)$$

Непосредственно из (13.77) и (13.78) следует, что при спектрах сигнала и помехи, представленных на рис. 13.12, оптимальный фильтр реализуется простейшим интегрирующим RC-звеном. Постоянная времени цепи должна быть $\tau_{\text{ф}}=RC=1/\beta$.

С учетом (13.76) приведенные выше характеристики фильтра приводятся к следующему виду:

$$|\,\mathrm{K}_{\mathrm{opt}}(i\omega)\,|=\frac{\sqrt{1+m}-1}{\sqrt{1+m+(\omega/\alpha)^2}},\quad g_{\mathrm{opt}}(t)=(\sqrt{1+m}-1)\,\alpha\mathrm{e}^{-\sqrt{1+m}\alpha t}.$$

Наконец, среднеквадратическая ошибка в соответствии с (13.67)

$$\varepsilon^2(t)_{\min}=R_s(0)-\int_0^\infty R_s(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha\xi}\,(\sqrt{1+m}-1)\,\alpha\mathrm{e}^{-\sqrt{1+m}\alpha\xi}d\xi=$$

$$=R_s(0)\left[1-\frac{\sqrt{1+m}-1}{\sqrt{1+m}+1}\right]. \qquad (13.79)$$

Результаты вычисления $K_{\mathrm{opt}}(\omega)$, $g_{\mathrm{opt}}(t)$ и $\overline{\varepsilon^2(t)}$ для трех частных случаев приведены в следующей таблице:

Сигнал	$K_{\mathrm{opt}}(\omega)$	$g_{\mathrm{opt}}(t)$	$\overline{\varepsilon^2(t)}_{\min}$
Сильный $m\gg 1$	$\dfrac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{1+m+(\omega/\alpha)^2}}$	$(\sqrt{m}-1)\,\alpha\mathrm{e}^{-\sqrt{m}\alpha t}$, $t\geqslant 0$	$R_s(0)\,\dfrac{2}{m}$
$m=3$	$\dfrac{1}{\sqrt{4+(\omega/\alpha)^2}}$	$\alpha\mathrm{e}^{-2\alpha t}$, $t\geqslant 0$	$R_s(0)\,2/3$
Слабый $m\ll 1$	$\dfrac{m/2}{\sqrt{1+m+(\omega/\alpha)^2}}$	$\dfrac{m\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $t\geqslant 0$	$\to R_s(0)$

Из нижней строки таблицы следует, что при $m \ll 1$ ошибка $\overline{\varepsilon_2(t)}$ достигает полной мощности сигнала, т. е. при относительно слабом сигнале фильтрация по критерию минимальной ошибки неэффективна.

Графики $W_s(\omega)$, N и $K_{opt}(\omega)/K_{opt\,max}$ для $m=3$ представлены на рис. 13.12. Отметим, что при $m=3$ параметр $\beta=2\alpha$ [см. (13.76)] и постоянная времени интегрирующего звена должна быть $\tau_ф=1/2\alpha$.

Определим аналогичные характеристики для некаузального фильтра.

В соответствии с (13.70)

$$K_{opt}(\omega)=\frac{W_s(\omega)}{W_s(\omega)+N}=\frac{W_s(0)\,\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\,\frac{1}{\dfrac{W_s(0)\,\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}+N}=\frac{m}{(1+m)+(\omega/\alpha)^2}.$$

Импульсная характеристика

$$g_{opt}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{opt}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{(1+m)+(\omega/\alpha)^2}=$$

$$=\frac{m}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t\,d\omega}{(1+m)+(\omega/\alpha)^2}=\frac{m\alpha}{2\sqrt{1+m}}\,e^{-\sqrt{1+m}\,\alpha|t|}.$$

Среднеквадратическая ошибка

$$\overline{\varepsilon^2(t)_{\min}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}N\,\frac{m\,d\omega}{(1+m)+(\omega/\alpha)^2}=$$

$$=\frac{Nm\alpha}{\sqrt{1+m}}\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=R_s(0)/\sqrt{1+m}.$$

При $m=3$

$$K_{opt}(\omega)=\frac{3}{4+(\omega/\alpha)^2},\quad g_{opt}(t)=\frac{3}{4}\,\alpha e^{-2\alpha|t|},\quad \overline{\varepsilon^2(t)_{\min}}=R_s(0)/2.$$

Сопоставим каузальный и некаузальный фильтры при одних и тех же спектрах сигнала и помехи. Частотные характеристики $K_{opt}(\omega)$ этих фильтров при $m=3$ представлены на рис. 13.12, а импульсные характеристики $g_{opt}(t)$ — на рис. 13.13. Правая ветвь характеристики $g(t)$ определяет отклик фильтра на предыдущие значения $x(t)$, а левая ветвь — на «будущие».

Отметим, что полоса пропускания некаузального фильтра меньше, чем каузального. Этим и обусловлено некоторое снижение ошибки [$\overline{\varepsilon^2(t)}=1/2R_s(0)$ вместо $2/3R(0)$]. Сужение полосы пропускания допустимо вследствие увеличения времени, отводимого на обработку наблюдаемого процесса (например, в сейсмологии).

13.11. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Изложенный в предыдущем параграфе метод нетрудно распространить на дискретные функции $s[k]$, $n[k]$ и $x[k]=s[k]+$ $+n[k]$. С этой целью обратимся к уравнению (13.59) и подвергнем его z-преобразованию.

Стационарному случайному процессу $s(t)$ с характеристиками $R_s(\tau)$ и $W_s(\omega)$, дискретизованному с шагом T, соответствует двустороннее z-преобразование [см. (12.37)]

$$\zeta[R_s(\tau)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_s[m]\,z^{-m}=\hat{W}_s(z).$$

Аналогично процессу $x(t)$ соответствует

$$\zeta[R_x(\tau)]=\hat{W}_x(z).$$

Функции $g(\tau)$ соответствует одностороннее z-преобразование, равное $\hat{\mathbf{K}}(z)$, а интегральной свертке $R_x(\tau)*g(\tau)$ — произведение $\hat{W}_x(z)\hat{\mathbf{K}}(z)$. Наконец, функции $y(\tau)$, отличной от нуля только в области $\tau<0$, соответствует одностороннее преобразование $\mathbf{Y}(z)$.

Таким образом, дискретный эквивалент уравнения (13.60) принимает следующий вид:

$$\hat{W}_s(z)-\hat{W}_x(z)\,\hat{\mathbf{K}}(z)=\mathbf{Y}(z). \qquad (13.80)$$

Подставив $\hat{W}_x(z)=A^+(z)\,A^-(z)$, $\hat{W}_s(z)=[B^+(z)+B^-(z)]\,A^-(z)$ и повторив рассуждения, приведенные в § 13.9, придем к выражению

$$\mathbf{K}_{\mathrm{opt}}(z)=B^+(z)/A^+(z). \qquad (13.81)$$

Использованное в § 13.9 условие аналитичности функций $A^+(p)$ и $B^+(p)$ в правой p-полуплоскости ($\mathrm{Re}\,p>0$) в данном случае должно быть заменено условием аналитичности во всей плоскости z вне круга единичного радиуса ($|z|>1$).

Среднеквадратическая ошибка при взаимной независимости $s(t)$ и $n(t)$ по аналогии с (13.67)

$$\overline{\varepsilon^2[k]}_{\min}=R_s[0]-\sum_{m=0}^{\infty} R_s[m]\,g[m]. \qquad (13.82)$$

Опустив выкладки[1], приведем формулы, которые можно получить на основе выражения (13.81) для передаточной функции и импульсной характеристики оптимального дискретного фильтра, а также для среднеквадратической ошибки. Характеристики случайного процесса $s(t)$ и шума $n(t)$ такие же, что и

---

[1] См. ссылку на с. 381.

в примере предыдущего параграфа $[R_s[m]=R_s[0]e^{-\alpha T|m|}$, см. (13.73)]:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{opt}}(z)=\frac{cz}{z-b}, \quad g_{\text{opt}}[k]=cb^k, \tag{13.83}$$

$$\overline{\varepsilon^2[k]}_{\min}=\frac{a^{-1}-a}{b^{-1}-a}R_s[0]. \tag{13.84}$$

Как видим, в рассматриваемой задаче оптимальный фильтр реализуется рекурсивным звеном первого порядка с весовым коэффициентом b в цепи обратной связи (рис. 13.14). Это устройство является дискретным эквивалентом аналогового интегрирующего RC-звена, упомянутого в задаче предыдущего параграфа.

В приведенных формулах постоянная $a=e^{-\alpha T}$, постоянная b определяется из уравнения

$$b+b^{-1}=(a^{-1}-a)\frac{R_s[0]}{N/T}+(a+a^{-1}),$$

постоянная $c=1-b/a$.

Коэффициент

$$\frac{R_s[0]\,T}{N}=\frac{W_s(0)\,\alpha}{2}\frac{T}{N}=m\frac{\alpha T}{2},$$

где $m=W_s(0)/N$ см. (13.76)].

Для сопоставления с аналоговым фильтром, рассмотренным в § 13.9, положим $a=e^{-\alpha T}=0{,}8$, $\alpha T\approx 0{,}22$, $m=3$. Тогда $\frac{R_s[0]\,T}{N}=0{,}33$, $b+b^{-1}=0{,}45\cdot 0{,}33+2{,}05=2{,}2$. Из уравнения $b+b^{-1}=2{,}2$ находим два значения $b_{1,2}=1{,}1\pm 0{,}456$. Для устойчивости рекурсивного фильтра требуется $b<1$. Следовательно, $b=0{,}64$ и $c=1-b/a=0{,}8$.

Наконец, $\frac{a^{-1}-a}{b^{-1}-a}\approx 0{,}6$ и $\overline{\varepsilon^2[k]}\approx 0{,}6\ R_s[0]\approx 0{,}2N/T$.

Этот результат близок к ошибке, вычисленной в § 13.9 для аналогового фильтра $[0{,}66R_s(0)]$.

Некоторое уменьшение ошибки обусловлено тем, что при дискретизации сигнала и помехи внутри частотного интервала $1/T$ сокращается относительная протяженность участка, на котором $W_s(\omega)/N\ll 1$ (на хвостах спектра, см. рис. 13.12).

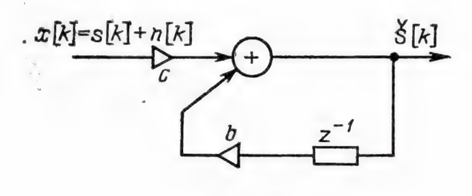


Рис. 13.14

13.12. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ЭКСТРАПОЛИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР

В предыдущих параграфах принципы оптимальной фильтрации изучались с позиций обнаружения сигналов на фоне помех при достаточно полной информации как о сигналах, так и о помехах.

Успехи в развитии цифровой техники обработки сигналов открыли путь к решению более сложных задач в области радиосвязи, локации, управления и ряда других отраслей радиоэлектроники. К таким задачам относятся, в частности, обработка случайных процессов при неполной информации об их характеристиках, спектральное оценивание процессов, адаптивная фильтрация, когда параметры системы перестраиваются на основе дополнительной информации, извлекаемой из наблюдаемого сигнала в процессе его обработки.

Решение подобных задач, как правило, требует экстраполяции обрабатываемых процессов. В данной книге рассматриваются лишь некоторые понятия, необходимые для дальнейшего, более детального и систематического изучения новых методов обработки сигналов.

Экстраполяция случайного процесса $\{s[k]\}$ основана на заданной корреляционной функции $R_s(\tau)$. Поясним суть экстраполяции сначала на простейшей задаче: известно значение отсчета $s[k-1]$ стационарного процесса и требуется прогнозировать отсчет $s[k]$. Оценку ожидаемого отсчета обозначим $\check{s}[k]$. Связь между $\check{s}[k]$ и $s[k-1]$ представим в форме

$$\check{s}[k]=a_1(1)s[k-1], \tag{13.85}$$

где коэффициент $a_1(1)$, характеризующий фильтр, подлежит определению. Здесь и в дальнейшем $s(t)$ — процесс с нулевым средним.

Случайная величина

$$\varepsilon[k]=s[k]-\check{s}[k]=s[k]-a_1(1)s[k-1] \tag{13.86}$$

называется ошибкой предсказания.

Дисперсия ошибки при действительных $s[k]$

$$\overline{\varepsilon^2[k]}=\overline{s^2[k]}-2a_1(1)\overline{s[k]s[k-1]}+a_1^2(1)\overline{s^2[k-1]}=$$

$$=R_s[0]-2a_1(1)R_s[1]+a_1^2[1]R_s[0]. \tag{13.87}$$

(Для стационарного процесса $\overline{s^2[k-1]}=\overline{s^2[k]}=R_s[0]$.)

Коэффициент $a_1(1)$ должен быть выбран так, чтобы диспер-

сия $\overline{\varepsilon^2[k]}$ была минимальна. Продифференцировав выражение (13.87) по $a_1(1)$ и приравняв производную нулю

$$d[\overline{\varepsilon^2[k]}]/da_1(1) = -2R_s[1] + 2a_1(1)R_s[0] = 0, \tag{13.88}$$

получим условие оптимальности фильтра

$$a_1(1) = R_s[1]/R_s[0]. \tag{13.89}$$

Подставив найденное значение оптимального коэффициента $a_1(1)$ в (13.87), определим минимально возможную дисперсию ошибки

$$\overline{\varepsilon^2[k]_{\min}} = R_s[0](1 - 2R_s^2[1]/R_s^2[0] + R_s^2[1]/R_s^2[0]) =$$

$$= R_s[0](1 - R_s^2[1]/R_s^2[0]). \tag{13.90}$$

В частном случае корреляционной функции вида $R_s(\tau) = R_s[0]e^{-\alpha\tau}$ оптимальный коэффициент $a_1(1) = e^{-\alpha T}$ и

$$\frac{\overline{\varepsilon^2[k]_{\min}}}{R_s[0]} = 1 - a_1(1) = 1 - e^{-\alpha T}. \tag{13.90'}$$

Если шаг T дискретизации процесса $s(t)$ достаточно мал по сравнению с интервалом корреляции τ_k процесса $s(t)$, то $R_s[1]/R_s[0] \to 1$ и $\overline{\varepsilon^2[k]} \to 0$. В этих условиях оценка отсчета $\hat{s}[k]$ почти достоверно совпадает с $s[k-1]$.

Следует еще отметить важное свойство оптимального экстраполирующего фильтра. Случайная последовательность $\varepsilon[k]$, т. е. ошибка экстраполяции, является некоррелированным процессом:

$$R_\varepsilon[m] = \overline{\varepsilon[k]\varepsilon[k-m]} = \overline{\varepsilon^2[k]}\,\delta[m],$$

где $\delta[m] = 1$ при $m = 0$ и $\delta[m] = 0$ при $m \neq 0$ [см. (12.1)].

Это очевидно, так как если бы последовательность $\varepsilon[k]$ была коррелированной, то это открывало бы путь для дальнейшего снижения ошибки экстраполяции и данный фильтр не был бы оптимальным.

Если экстраполяция осуществляется на основе M предыдущих отсчетов сигнала, то оценку k-го отсчета можно определить выражением

$$\check{s}_M[k] = a_M(1)s[k-1] + a_M(2)s[k-2] + \ldots$$

$$\ldots + a_M(M)s[k-M] = \sum_{m=1}^{M} a_M(m)s[k-m]. \tag{13.91}$$

В символе $a_M(m)$ M обозначает порядок фильтра, а m — номер коэффициента.

Ошибку предсказания обозначим, как и в (13.86),

$$\varepsilon_M[k] = s[k] - \check{s}_M[k] = s[k] - \sum_{m=1}^{M} a_M(m)\, s[k-m]. \qquad (13.92)$$

Это выражение можно записать в форме

$$\varepsilon_M[k] = \sum_{m=0}^{M} a'_M(m)\, s[k-m], \qquad (13.93)$$

где $a_M'(0) = 1$, $a_M'(m) = -a_M(m)$.

Как и в предыдущем случае, $\varepsilon_M[k]$ — некоррелированная случайная функция.

Структура фильтра предсказания оценки сигнала $\check{s}[k]$, а также ошибки $\varepsilon_M[k]$, соответствующая алгоритмам (13.91) и (13.92), представлена на рис. 13.15 (верхняя часть). Это фильтр трансверсального вида, с отводами через T.

Дисперсия ошибки в соответствии с (13.93)

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{M} a'_M(m)\, s[k-m]\right)^2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} a'_M(m)\, a'_M(j)\, \overline{s[k-m]\, s[k-j]} =$$

$$= \sum_{m=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} a'_M(m)\, a'_M(j)\, R_s[j-m]. \qquad (13.94)$$

Для определения оптимальных коэффициентов $a_M'(m)$, минимизирующих дисперсию ошибки, продифференцируем выра-

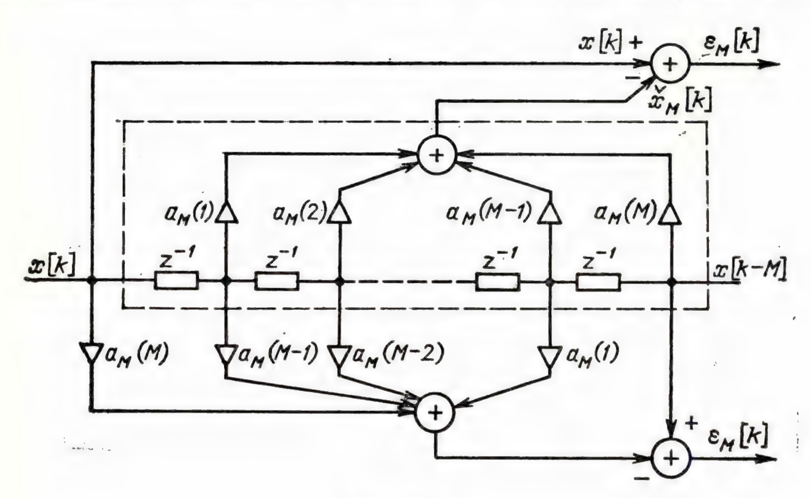


Рис. 13.15

жение (13.94) по какому-либо из коэффициентов, например $a_M'(j)$ при $j=l$. Производная внутренней суммы равна

$a_M'(m)R_s[l-m],\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ M.$

(При $l=0$ $a_M'(0)=1=\text{const}$ и производная по $a_M'(0)$ обращается в нуль.) После суммирования по m получаем следующее выражение для производной:

$$d\overline{\varepsilon_M^2[k]}/da_M'(l)=\sum_{m=0}^{M}a_M'(m)R_s[l-m],\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ M.$$

Приравнивая производную нулю и учитывая, что $a_M'(0)=1$ и $a_M'(m)=-a_M(m)$, приходим к следующему условию:

$$R_s[l]-\sum_{m=0}^{M}a_M(m)R_s[l-m]=0,\quad l=1,2,\ \ldots,\ M. \qquad (13.95)$$

Таким образом, для определения M оптимальных коэффициентов получается система уравнений

$$a_M(1)R_s[0]+a_M(2)R_s[1]+\ldots+a_M(M)R_s[M-1]=R_s[1],$$

$$\ldots \qquad (13.96)$$

$$a_M(1)R_s[M-1]+a_M(2)R_s[M-2]+\ldots+a_M(M)R_s[0]=R_s[M].$$

При коэффициентах $a_M(m)$, удовлетворяющих этой системе, дисперсия $\overline{\varepsilon^2[k]}$ минимальна. Обращаясь к (13.94), замечаем, что при любых $j\neq0$ внутренняя сумма в соответствии с (13.95) равна нулю. Следовательно, эта сумма при $j=0$ отлична от нуля и равна $a_M'(m)a_M'(0)R_s[-m]$. Учитывая, что $a_M'(0)=1$ и $a_M'(m)=-a_M(m)$, окончательно получаем

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]_{\min}}=\sum_{m=0}^{M}a_M'(m)R_s[-m]=R_s[0]-$$

$$-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)R_s[m]. \qquad (13.97)$$

Для фильтра первого порядка ($M=1$)

$$\overline{\varepsilon_1^2[k]_{\min}}=R_x[0]-a_1(1)R_s[1],$$

что совпадает с (13.90).

При значительном M определение весовых коэффициентов $a_M(m)$ является сложной процедурой. Приведем один из распространенных алгоритмов вычисления этих коэффициентов (алгоритм Левинсона[1]):

$$a_M(m)=a_{M-1}(m)+a_M(M)[a_{M-1}(M-m)]^*, \qquad (13.98)$$

$$1\leqslant m\leqslant M-1,\quad M>1,$$

где M — порядок (длина) фильтра, m — номер коэффициента.

---

[1] ТИИЭР.— 1982.— Т. 70, № 9. Спектральное оценивание: Тем. выпуск.

Для коэффициентов $a_M(M)$, которые обозначим K_M, существует равенство

$$K_M=a_M(M)=$$
$$=-\left(r_s[M]+\sum_{m=1}^{M-1}a_{M-1}(m)r_s[M-m]\right)1/E_{M-1}, \qquad (13.99)$$

где $r_s[m]=\frac{R_s[m]}{R_s[0]}$ — нормированный коэффициент корреляции и $E_0=r_s[0]=1$,

$$E_1=[1-a_1^2(1)]E_0=[1-a_1^2(1)],$$
$$E_2=[1-a_2^2(2)]E_1=[1-a_2^2(2)][1-a_1^2(1)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_M=[1-a_M^2(M)]E_{M-1}.$$

Вычисления начинаются с фильтра первого порядка. При $M=1$ единственный весовой коэффициент $a_1(1)$ определяется из выражения (13.99):

$$a_1(1)=K_1=r_s[1]/E_0=r_s[1],$$

что совпадает с (13.89).

Увеличив порядок фильтра на единицу, найдем для фильтра второго порядка ($M=2$) по формуле (13.98) при $m=1$

$$a_2(1)=a_1(1)+a_2(2)a_1(1)=a_1(1)(1+K_2).$$

В соответствии с (13.99)

$$K_2=-(r_s[2]+a_1(1)r_s[1])/E_1=$$
$$=-\frac{r_s[2]-r_s[1]r_s[2]}{1-a_1^2(1)}=-\frac{r_s[2]-a_1^2(1)}{1-a_1^2(1)}. \qquad (13.100)$$

Это выражение определяет коэффициент $a_2(2)=K_2$, откуда

$$a_2(1)=a_1(1)(1+K_2)=a_1(1)\frac{1-r_s[2]}{1-a_1^2(1)}. \qquad (13.101)$$

Продолжая итерации до заданного порядка M, найдем все весовые коэффициенты $\{a_M(m)\}$, $m=1, 2, \ldots, M$.

Оптимальная длина (порядок M) фильтра зависит от корреляционной функции анализируемого процесса $s(t)$. Чем сложнее эта функция, тем больше должно быть M.

Вернемся к рассмотренному в начале настоящего параграфа фильтру первого порядка ($M=1$) с весовым коэффициентом $a_1(1)=R_s[1]/R[0]=r_s[1]$ и допустим, что корреляционная функция имеет вид $R_s(\tau)=R_s[0]e^{-\alpha|\tau|}$, так что $r_s[1]=e^{-\alpha T}$ и $r_s[2]=$ $=e^{-2\alpha T}$. Выясним, можно ли улучшить экстраполяцию повышением порядка фильтра. Положим $M=2$ и вычислим новые весовые коэффициенты фильтра $a_2(1)$ и $a_2(2)$.

Подставив в (13.100) и (13.101) $r_s[2]=e^{-2\alpha T}=a^2{}_1(1)$, получим

$$a_2(1)=a_1(1)\,\frac{1-a^2{}_1(1)}{1-a^2{}_1(1)}=a_1(1),$$

$$a_2(2)=-\frac{a^2{}_1(1)-a^2{}_1(1)}{1-a^2{}_1(1)}=0.$$

Это означает, что для процесса $s(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией фильтр первого порядка является оптимальным. В § 13.14 будет приведен пример с более сложной корреляционной функцией.

Остановимся на рассмотрении некоторой особенности передаточной функции фильтра предсказания ошибки $\varepsilon_M[k]$. Из рис. 13.15 следует, что передаточная функция данного трансверсального фильтра определяется выражением [см. (12.9)]

$$\mathbf{K}_\varepsilon(i\omega)=1-\sum_{m=1}^{M} a_M(m)\,e^{-im\omega T}. \qquad (13.102)$$

На входе этого фильтра действует случайная последовательность $s[k]$ с энергетическим спектром $W_s(\omega)$, а на выходе выделяется последовательность $\varepsilon_M[k]$, энергетический спектр которой $W_\varepsilon(\omega)=W_s(\omega)\,|\mathbf{K}_\varepsilon(i\omega)|^2$.

Но, как ранее было показано, функция $\varepsilon_M[k]$ представляет собой некоррелированный шум. Следовательно, $W_\varepsilon(\omega)=\mathrm{const}$ (в полосе частот $1/T$) и

$$|\mathbf{K}_s(i\omega)|^2=c/W_s(\omega), \qquad (13.103)$$

где c — постоянный коэффициент.

Смысл этого равенства в том, что по отношению к процессу $s[k]$ с энергетическим спектром $W_s(\omega)$ оптимальный экстраполирующий фильтр с передаточной функцией (13.103) является «отбеливающим».

В современных устройствах обработки случайных процессов наряду с экстраполяцией вперед применяется экстраполяция в обратном направлении, т. е. оценка отсчета $\check{s}_M[k-1]$ по M заданным последующим отсчетам:

$$\check{s}_M[k-M]=\underset{\leftarrow}{a_M}(1)\,s[k-M+1]+\underset{\leftarrow}{a_M}(2)\,s[k-M+2]+\ldots$$

$$\ldots+\underset{\leftarrow}{a_M}(M)\,s[k]=\sum_{m=1}^{M}\underset{\leftarrow}{a_M}(m)\,s[k-M+m]. \qquad (13.104)$$

Здесь $\underset{\leftarrow}{a_M}(m)$ обозначают параметры фильтра обратной экстраполяции. Структурная схема подобного фильтра на рис. 13.15 объединена с фильтром прямой экстраполяции.

Применив к (13.104) рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при анализе выражения (13.91), при-

дем к следующим соотношениям между коэффициентами фильтров прямой и обратной экстраполяции:

$$\underset{\leftarrow}{a_M}(m)=a^*_M(m). \qquad (13.105)$$

Для действительных чисел $s[k]$ $\underset{\leftarrow}{a_M}(m)=a_M(m)$. Как и $\varepsilon_M[k]$, функция $\underset{\leftarrow}{\varepsilon_M}[k]$ — случайная, некоррелированная. Очевидно, что и дисперсии $\overline{\underset{\leftarrow}{\varepsilon^2_M}[k]}$, $\overline{\varepsilon^2_M[k]}$ одинаковы.

Сочетание прямой и обратной экстраполяции открывает путь к построению различных вариантов адаптивной обработки случайных процессов (метод максимальной энтропии, метод максимального отношения правдоподобия и др.). Кроме того, это сочетание позволяет устранить некоторый недостаток, присущий осуществлению экстраполяции на базе трансверсального фильтра. Выше было показано, что для перехода от фильтра $M=1$ к фильтру $M=2$ потребовалось не только добавление весового коэффициента $a_2(2)=K_2$, но и изменение первого коэффициента $a_1(1)$ на $a_2(1)$ [сопоставить выражения (13.89) и (13.101)]. При каждом удлинении фильтра требуется изменение всех предыдущих параметров. От этого недостатка свободен «решетчатый» фильтр, получающийся из схемы, представленной на рис. 13.15, путем объединения операций прямого и обратного предсказания ошибки[1]. Новый фильтр является последовательным соединением M ступеней, каждую из которых можно оптимизировать по отдельности, благодаря чему наращивание порядка (длины) фильтра не требует изменения параметров предыдущих звеньев.

13.13. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ СИГНАЛА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ФОНЕ ШУМА

Пусть процесс на входе фильтра является суммой

$$x[k]=s[k]+n[k],\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N, \qquad (13.106)$$

где $n[k]$ — стационарный белый шум; $s[k]$ — полезный сигнал, представляющий собой последовательность из N отсчетов (взятых также из стационарного процесса).

Требуется прогнозировать отсчет $s[k]$ на основе заданной совокупности M предыдущих отсчетов $x[k-m]$, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ M$, $M<N$. Оценку $s[k]$ ожидаемого сигнала определим выражением, аналогичным (13.91):

$$\check{s}\,[k]=\sum_{m=1}^{M} a_M(m)\,x\,[k-m]. \qquad (13.107)$$

---

[1] **Фрид Ландер.** Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры. ТИИЭР.— 1982.— Т. 70, № 9, с. 95—125.

Ошибка экстраполяции

$$\varepsilon_M[k]=s[k]-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,x[k-m].$$

Как и в предыдущем параграфе, задача сводится к определению оптимальных весовых коэффициентов $a_M(m)$, минимизирующих дисперсию

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]}=\overline{\left(s[k]-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,x[k-m]\right)^2}. \tag{13.108}$$

Дифференцирование этого выражения по одному из коэффициентов $a_M(l)$ в данном случае приводит к следующему результату:

$$d(\overline{\varepsilon_M^2[k]})/da_M(l)=$$

$$=-2\overline{\left(s[k]-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,x[k-m]\right)x[k-l]}=$$

$$=-2\left(R_{sx}[l]-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,R_x[l-m]\right),\quad l=1,\,2,\,\ldots,\,M.$$

Здесь $R_{sx}[l]$ — взаимная корреляционная функция процессов $s(t)$ и $x(t)$.

Приравнивание производной нулю приводит к системе уравнений, аналогичной системе (13.96). Единственное отличие состоит в том, что в правой части вместо $R_x[m]$ фигурирует $R_{sx}[m]$:

$$a_M(1)R_x[0]+a_M(2)R_x[1]+\ldots+a_M(M)R_x[M-1]=R_{sx}[1],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_M(1)R_x[M-1]+a_M(2)R_x[M-2]+\ldots+a_M(M)R_x[0]=R_{sx}[M]. \tag{13.109}$$

Для вычисления M оптимальных коэффициентов $a_M(m)$ обычно используется алгоритм Левинсона. В отличие от выражений (13.98), (13.99) в данном случае в алгоритм вводятся коэффициенты, зависящие от соотношений между корреляционными функциями $R_{sx}[m]$ и $R_x[m]$ [19].

Для фильтра первого порядка ($M=1$) коэффициент $a_1(1)$ определяется непосредственно из первой строки системы (13.109):

$$a_1(1)=R_{sx}[1]/R_x[0]. \tag{13.110}$$

Поскольку в данном параграфе рассматриваются взаимно независимые процессы $s[k]$ и $n[k]$ с корреляционными функция-

ми соответственно $R_s[m]$ и $R_n[m]=\frac{N_0}{T}\,\delta[m]$, можно считать $R_{sx}[m]=R_s[m]$ и

$$R_x[0]=R_s[0]+R_n[0]=R_s[0]+N_0/T.$$

Таким образом,

$$a_1(1)=R_s[1]/(R_s[0]+N_0/T). \qquad (13.111)$$

При $m\neq 0$ все функции $R_x[m]=R_s[m]$.

Для определения $\overline{\varepsilon_M^2[k]_{\min}}$ представим (13.108) в виде произведения

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]}=\overline{\varepsilon_M[k]\,\varepsilon_M[k]}=\overline{\left(s[k]-\sum_{m=1}^{M}a_M(x_m)\,x[k-m]\right)\varepsilon_M[k]}=$$

$$=\overline{s[k]\,\varepsilon_M[k]}-\overline{\varepsilon_M[k]\sum_{M=1}^{M}a_M(m)\,x[k-m]}$$

и используем условие ортогональности функций $\varepsilon_M[k]$ и $\check{s}[k]=\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,x[k-m]$ [см. текст после (13.56)].

Тогда

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]_{\min}}=\overline{s[k]\,\varepsilon_M[k]}=R_s[0]-\sum_{m=1}^{M}a_M(m)\,R_{sx}[m]. \qquad (13.112)$$

Здесь $R_s[0]=\overline{s^2[k]}$ — средняя мощность процесса $s(t)$.

В частном случае статистической независимости процессов $s(t)$ и $n(t)$ $R_{sx}[m]=R_s[m]$ и

$$\overline{\varepsilon_M^2[k]_{\min}}=R_s[0]-\sum_{m-1}^{M}a_M(m)\,R_s[m]. \qquad (13.113)$$

Сопоставим полученное выражение с (13.82). Если число M достаточно велико, так что дальнейшее его увеличение не дает существенного уменьшения $\overline{\varepsilon_M{}^2[k]}$, то оптимальный экстраполирующий фильтр по значению погрешности приближается к винеровскому фильтру, импульсная характеристика которого $g[m]$ совпадает с последовательностью коэффициентов $a_M(m)$, вычисленных по системе уравнений (13.109).

Для фильтра первого порядка ($M=1$) ошибка прогноза

$$\overline{\varepsilon^2{}_1[k]}=R_s[0]-a_1(1)\,R_s[1].$$

13.14. АВТОРЕГРЕССИОННЫЙ МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В практике часто требуется оценить энергетический спектр стационарного случайного процесса по заданному, относительно короткому отрезку одной реализации, содержащему N отсчетов. Для строгого определения спектра нужно знать всю корреляционную функцию процесса, для приближенной оценки приходится ограничиваться вычислением лишь некоторого числа значений $R_s[l]$, $l=0, 1, 2, \ldots, M$, $M \ll N$, N — число отсчетов процесса $s[k]$. Основываясь на этих данных, можно вычислить приближенные весовые коэффициенты $a_M(m)$ оптимального экстраполирующего фильтра [см. (13.98) и (13.99)] и его передаточную функцию

$$\mathbf{K}_\varepsilon(i\omega) = 1 - \sum_{m=1}^{M} a_M(m)\, e^{-i\omega mT}$$

[см. (13.102)]. В § 13.11 было показано, что этот фильтр отбеливает спектр $\mathbf{W}_s(\omega)$ анализируемого процесса $s[k]$ [см. (13.103)]. Следовательно, для моделирования процесса с энергетическим спектром, близким к $\mathbf{W}_s(\omega)$, требуется фильтр с передаточной функцией вида

$$|\mathbf{K}(i\omega)| = 1/|\mathbf{K}_\varepsilon(i\omega)| = 1 \Big/ \left| 1 - \sum_{k=1}^{M} a_M(m)\, e^{-i\omega mT} \right|. \qquad (13.114)$$

Но это не что иное, как передаточная функция рекурсивного фильтра M-го порядка (см. § 12.3). Если на вход подобного фильтра подать белый шум со спектром W_0, то спектр на выходе будет

$$W_{\text{вых}}(\omega) = W_0 \Big/ \left| 1 - \sum_{m=1}^{M} a_M(m)\, e^{-i\omega mT} \right|^2. \qquad (13.115)$$

Это выражение можно трактовать как оценку истинного спектра $\mathbf{W}_s(\omega)$. Таким образом, задачу оценивания спектра процесса $s[kT]$ по его отрезку, содержащему ограниченное число отсчетов N, можно свести к вычислению спектра $W_{\text{вых}}(\omega)$ стационарного процесса. Описываемый метод получил название авторегрессионного, а совокупность коэффициентов $a_M(m)$ — название АР-коэффициентов.

Если (13.115) подвергнуть обратному фурье-преобразованию, то получится функция

$$R_{\text{вых}}[l] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} W_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega lT} d\omega, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (13.116)$$

которую можно рассматривать как оценку корреляционной функции анализируемого процесса.

Обратим внимание на то, что последовательность $\{R_{\text{вых}}[l]\}$

является бесконечной, но лишь первые $2M+1$ значений совпадают с исходной функцией $R_s[l]$ (по которым определялись оптимальные коэффициенты $a_M(m)$ экстраполирующего фильтра).

Последующие же значения $R_{вых}[l]$, определяемые рекуррентной формулой

$$R_{вых}[l]=\sum_{m=1}^{M} a_M(m) R_s[l-m], \quad l>M,$$

могут не совпадать с $R_s[l]$. Рекуррентность обусловлена многократной циркуляцией отсчетов белого шума в цепях обратной связи моделирующего фильтра.

Авторегрессионный метод особенно эффективен при наличии некоторой априорной информации о механизме образования исследуемого процесса. Пусть, например, имеются основания полагать, что процесс $s(t)$ формируется из белого шума с помощью простейшей RC-цепи. Тогда в соответствии с (7.19) корреляционную функцию можно положить $r_s[m]=r_s^m[1]$ и для определения коэффициента $a_1(1)$ достаточно вычислить

$$R_s[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} s^2[k], \quad R_s[1]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} s[k]\,s[k-1],$$

$$a_1(1)=r_s[1],$$

после чего по формуле (13.115) оценка спектра

$$W_{вых}(\omega)=W_0/|1-a_1(1)\,e^{-i\omega T/2}|=W_0/[1-2a_1(1)\cos\omega T+a_1^2(1)],$$
$$-\pi<\omega T<\pi.$$

В общем случае, если априорная информация отсутствует, можно наметить следующую процедуру цифровой обработки заданной последовательности отсчетов $s[k]$, $k=1, 2, \ldots, N$:

1) вычисление корреляционной функции

$$R_s[l]=\frac{1}{N-l}\sum_{k=l+1}^{N} s[k]\,s[k-l], \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ M; \qquad (13.117)$$

2) нормирование $r_s[l]=R_s[l]/R_s[0]$;

3) вычисление весовых коэффициентов $a_M(m)$ оптимального экстраполирующего фильтра по алгоритму (13.98);

4) вычисление спектра $W_{вых}(\omega)$ по формуле (13.115), которую целесообразно преобразовать к виду

$$W_{вых}(\omega)/W_{вых\,max}=\frac{L}{\left|1-\sum_{m=1}^{M} a_M(m)\,e^{-im2\pi fT}\right|^2}, \qquad (13.118)$$

где L — нормировочный множитель.

Проиллюстрируем эту процедуру на отрезке стационарного процесса $s[k]$, содержащего 64 отсчета ($N=64$):

90	33	9	—239	356	188	166	—292
—207	—122	—12	—197	199	208	119	—111

—328	—188	—115	—31	44	—25	—1	307
—100	14	—326	—56	84	7	—190	335
89	180	—491	—170	67	128	—242	157
—55	201	—358	—115	—113	91	46	79
—185	141	—25	126	—321	—2	144	157
—11	28	—16	341	—181	73	—69	101

Первые 16 значений $R_s[l]$, вычисленные по формуле (13.117) и пронормированные:

1.0000	—0.0963
0.5652	0.1292
—0.0615	—0.0790
—0.1305	—0.4586
0.1589	—0.4508
0.1204	—0.0600
—0.2318	0.1064
—0.3542	—0.1283

Вычисленные по алгоритму (13.98) АР-коэффициенты:

m	$a_4(m)$	$a_8(m)$	$a_{16}(m)$	m	$a_4(m)$	$a_8(m)$	$a_{16}(m)$
1	—1,3923	—1,3672	—1,3828	9			—0,4316
2	1,5342	1,3828	1,2853	10			0,3731
3	—0,9570	—0,8359	—0,6933	11			—0,3155
4	0,2969	0,1719	0,1221	12			0,3097
5		0,1094	0,2910	13			—0,1212
6		—0,0947	—0,1191	14			—0,2812
7		0,0488	—0,0695	15			0,4414
8		—0,0938	0,1278	16			—0,2617

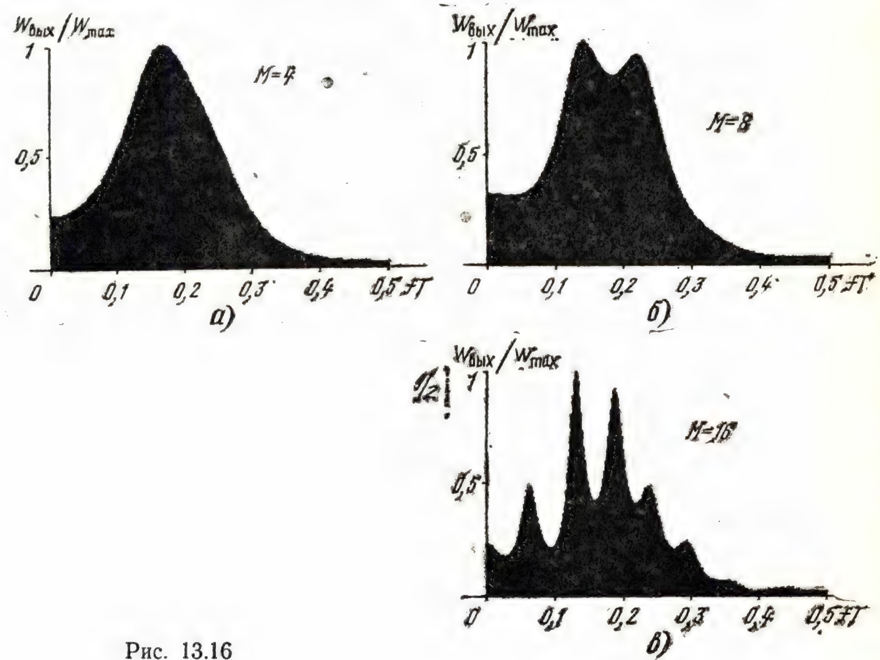


Рис. 13.16

Знаменатель выражения (13.118) вычислялся по алгоритму БПФ с добавлением нулей до 512 точек.

Нормированные АР-спектры $W_{\text{вых}}(\omega)/W_{\text{вых max}}$ для трех фильтров порядка $M=4$, 8 и 16 представлены на рис. 13.16.

Для проверки статистической устойчивости полученного результата вычисления были повторены для четырех реализаций анализируемого процесса. Существенных расхождений результатов вычислений не обнаружено.

Сопоставление частоты пульсаций спектра при $M=16$ (рис. 13.16, *в*) с характером осцилляции корреляционной функции $R_s[l]$ позволяет считать полученную оценку спектра вполне приемлемой.

13.15. АДАПТИВНЫЙ РЕКУРСИВНЫЙ ФИЛЬТР

Рассмотренные в § 13.9—13.13 винеровские фильтры лучше всего подходят для обработки процессов (или отрезков процессов) в целом (блочная обработка). Для адаптивной обработки требуется текущая оценка сигнала на каждом такте с учетом информации, поступающей на вход приемного устройства в процессе наблюдения. При винеровской фильтрации каждый новый отсчет сигнала потребовал бы пересчета всех весовых коэффициентов фильтра. В настоящее время широкое распространение получили адаптивные фильтры, в которых поступающая новая информация используется для непрерывной корректировки ранее сделанной оценки сигнала (сопровождение цели в радиолокации, системы автоматического регулирования и управления и т. д.). Особенный интерес представляют адаптивные фильтры рекурсивного вида.

Для уяснения сути подобной обработки ограничимся построением алгоритма оптимального фильтра, на вход которого поступает смесь сигнала и шума

$$x[m]=cs[m]+n[m], \tag{13.119}$$

относительно которых имеется следующая априорная информация: $s[m]$ — отсчеты из стационарного случайного процесса с нормальным распределением и корреляционной функцией вида $R_s[l]=R_s[0]e^{-\alpha T|l|}$ (марковский процесс первого порядка, см. § 12.4), $\overline{s[m]}=0$; $n[m]$ — дискретизованный белый шум с корреляционной функцией

$$R_n[l]=\frac{N_0}{T}\ \delta[l]\ \ [\text{см. (12.19)}],\ \overline{n[m]}=0.$$

Процессы $s[m]$ и $n[m]$ — взаимно независимые, коэффициент c — либо постоянная величина, либо известная функция времени.

На рис. 13.17 обобщенная схема рекурсивного фильтра намечена в виде линейного параметрического устройства. Параметры b_m и K_m, в общем случае являющиеся функциями времени, подлежат определению исходя из условия минимизации погрешности оценки сигнала $s[m]$. Оптимальную оценку, соответствующую минимуму среднеквадратической ошибки, обозначим $s[m]_{\text{opt}}$.

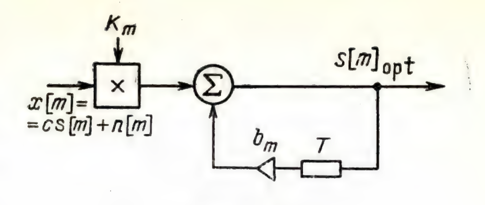


Рис. 13.17

Величина $s[m]_{\text{opt}}$, рассматриваемая как выход фильтра, связана с входным процессом $x[m]$ очевидным соотношением

$$s[m]_{\text{opt}}=K_m x[m]+b_m s[m-1]_{\text{opt}}. \tag{13.120}$$

Случайную величину ошибки представим в виде разности

$$\varepsilon[m]=s[m]-s[m]_{\text{opt}}=$$
$$=s[m]-K_m x[m]-b_m s[m-1]_{\text{opt}}, \tag{13.121}$$

а дисперсию ошибки — в одной из эквивалентных форм

$$\overline{\varepsilon^2[m]}=M[(s[m]-s[m]_{\text{opt}})^2]=$$
$$=M[\varepsilon[m](s[m]-s[m]_{\text{opt}})]=$$
$$=M[\varepsilon[m](s[m]-K_m x[m]-b_m s[m-1]_{\text{opt}})]. \tag{13.122}$$

Для определения оптимальных параметров фильтра b_m и K_m сначала продифференцируем (13.122) по переменной b_m и приравняем производную нулю:

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2[m]}}{d b_m}=M\left\{2[s[m]-s[m]_{\text{opt}}]\frac{d}{d b_m}[s[m]-s[m]_{\text{opt}}]\right\}=$$
$$=2M\{[s[m]-K_m x[m]-$$
$$-b_m s[m-1]_{\text{opt}}]s[m-1]_{\text{opt}}\}=0. \tag{13.123}$$

Из условия (13.123) можно выявить соотношение между оптимальными параметрами b_m и K_m. Для этого перепишем (13.123) в виде равенства

$$M[(s[m]-K_m x[m])s[m-1]_{\text{opt}}]=$$
$$=b_m M[s[m-1]_{\text{opt}} s[m-1]_{\text{opt}}]. \tag{13.123'}$$

Дальнейшие преобразования основаны на принципе ортогональности функций $\varepsilon[m]$ или $\varepsilon[m-1]$ по отношению к оптимизированным функциям $s[m]_{\text{opt}}$ и $s[m-1]_{\text{opt}}$ (см. § 13.9):

$$M[\varepsilon[m]s[m]_{\text{opt}}]=0,$$
$$M[\varepsilon[m-1]s[m-1]_{\text{opt}}]=0 \text{ и т. д.}$$

Один из множителей $s[m-1]_{\text{opt}}$ в правой части (13.123'), основываясь на разности $\varepsilon[m-1]=s[m-1]-s[m-1]_{\text{opt}}$ [см. (13.121)], представим в форме $s[m-1]_{\text{opt}}=-\varepsilon[m-1]+$ $+s[m-1]$. Тогда правая часть (13.123')

$$b_m M[(-\varepsilon[m-1]+s[m-1])s[m-1]_{\text{opt}}]=$$
$$=b_m M[s[m-1]s[m-1]_{\text{opt}}].$$

Левую часть (13.123') преобразуем, подставив $x[m]=$ $=c\,s[m]+n[m]$. Учитывая, что $M[n[m]s[m-1]_{\text{opt}}]=0$, получаем $(1-cK_m)M[s[m]s[m-1]_{\text{opt}}]$. Таким образом, (13.123') приводится к виду

$$b_m M[s[m-1]s[m-1]_{\text{opt}}]=$$
$$=(1-cK_m)M[s[m]s[m-1]_{\text{opt}}]. \qquad (13.123'')$$

Для нахождения связи между b_m и K_m целесообразно в правой части (13.123) выразить $s[m]$ через $s[m-1]$. Рассматривая условно $s[m]$ как выход экстраполирующего фильтра первого порядка, можно воспользоваться выражением (13.86), которое запишем в форме

$$s[m]=\beta s[m-1]+\varepsilon[m]. \qquad (13.124)$$

Для рассматриваемого процесса с корреляционной функцией $R_s[l]=R_s[0]e^{-\alpha T|l|}$ оптимальный коэффициент этого фильтра $\beta=a_1(1)=e^{-\alpha T}$ (см. § 13.12). Итак, равенство (13.123'') принимает вид

$$b_m M[s[m-1]s[m-1]_{\text{opt}}]=$$
$$=\beta(1-cK_m)M[s[m-1]s[m-1]_{\text{opt}}+\varepsilon[m]s[m-1]_{\text{opt}}].$$

Поскольку $M[\varepsilon[m]s[m-1]_{\text{opt}}]=0$, из последнего выражения вытекает важное соотношение

$$b_m=\beta(1-cK_m). \qquad (13.125)$$

Подставив этот результат в (13.120), получим

$$s[m]_{\text{opt}}=\beta(1-cK_m)s[m-1]_{\text{opt}}+K_m x[m]=$$
$$=\beta s[m-1]_{\text{opt}}+K_m(x[m]-c\beta s[m-1]_{\text{opt}}), \qquad (13.126)$$

где β, имеющее смысл весового коэффициента собственно рециркулятора (рис. 13.18), в рассматриваемом частном случае (фильтрация марковского процесса первого порядка) является постоянной величиной.

Уравнение (13.126) определяет алгоритм рекурсивного фильтра Калмана, позволяющего осуществить рекуррентную оценку сигнала. Слагаемое $c\beta s[m-1]$ прогнозирует очередной отсчет $s[m]$, содержащийся в $x[m]$. Разность $x[m]-c\beta s[m-1]_{\text{opt}}$ является сигналом ошибки, корректирующим с учетом коэффициента K_m оценку $s[m]_{\text{opt}}$.

Структура фильтра представлена на рис. 13.18. Заметим, что единственным элементом, придающим фильтру параметрический характер, является K_m. Между тем все предыдущие рассуждения основаны на двух переменных элементах b_m и K_m (см. рис. 13.17). Это кажущееся противоречие устраняется тем, что элемент K_m фактически включен в рециркулятор и вместе с постоянным элементом β обеспечивает выполнение условия (13.125).

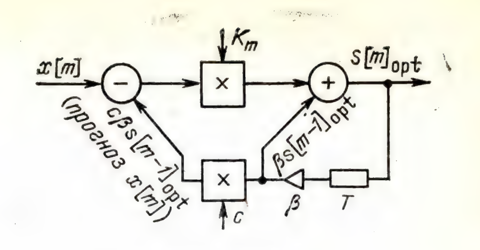


Рис. 13.18

Для определения коэффициента K_m воспользуемся выражением (13.122). Считая условие (13.123) выполненным, минимально возможную дисперсию $\overline{\varepsilon^2[m]}$, обозначаемую в дальнейшем σ_m^2, найдем из выражения

$$\sigma_m^2 = M[(s[m]-s[m]_{\text{opt}})^2] =$$

$$= M\{s[m]-\beta(1-cK_m)s[m-1]_{\text{opt}}-K_m x[m]\}^2.$$

В правой части использовано (13.120) для $s[m]_{\text{opt}}$ и (13.125) для b_m. Подставив затем $s[m]$ по формуле (13.124) и $x[m]$ по (13.119), приведем последнее выражение к виду

$$\sigma_{2m} = M\{\beta(1-cK_m)\varepsilon[m-1]+(1-cK_m)g[m-1]+K_m n[m]\}^2.$$

При возведении полученной суммы в квадрат средние значения комбинационных произведений обращаются в нуль. Таким образом,

$$\sigma_m^2 = M\{\beta^2(1-cK_m)^2\varepsilon^2[m-1]+(1-cK_m)^2 g^2[m-1]+K_m^2 n^2[m]\}.$$

Учитывая, что $M[\varepsilon^2[m-1]]=\sigma_{m-1}^2$, $M[g^2[m-1]]=\sigma_g^2$ и $M[n^2[m]]=R_n[0]$, получаем

$$\sigma_m^2 = \beta^2(1-cK_m)^2\sigma_{m-1}^2+(1-cK_m)^2\sigma_g{}^2+K_m^2 R_n[0]. \tag{13.127}$$

Используем теперь отмеченное ранее свойство ортогональности функции $\varepsilon[m]$ по отношению к оптимизированным функциям $s[m]_{\text{opt}}$. В частности, домножение (13.120) на $\varepsilon[m]$ и усреднение приводит к очевидному результату: $M[\varepsilon[m]x[m]]=0$, откуда следует

$$cM[\varepsilon[m]s[m]] = -M[\varepsilon[m]n[m]].$$

Кроме того, из (13.122) вытекает, что $\sigma_m^2 = M[\varepsilon[m]s[m]]$ и, следовательно, $c\sigma_m^2 = -M[\varepsilon[m]n[m]]$.

Наконец, подстановка $\varepsilon[m]$ по формуле (13.121) приводит к соотношению

$$\sigma_m{}^2 = -\frac{1}{C}M[(s[m]-b_m s[m-1]_{\text{opt}}-K_m x[m])\,n[m]].$$

При усреднении все произведения, кроме последнего, обращаются в нуль, и

$$\sigma^2{}_m=\frac{1}{c}K_mM[n^2[m]]=\frac{1}{c}K_mR_n[0],$$

$$K_m=c\sigma^2{}_m/R_n[0]. \qquad (13.128)$$

Уравнения (13.127), (13.128) позволяют получить общее выражение

$$K_m=\frac{c\left[\sigma^2{}_g+\beta^2\sigma^2_{m-1}\right]}{R_n[0]+c^2\sigma_g{}^2+c^2\beta^2\sigma^2_{m-1}}. \qquad (13.129)$$

Подставив $\sigma^2{}_g=R_s[0](1-\beta^2)$ [см. (13.90)] и положив $c=1$), перепишем (13.129) в следующей форме:

$$K_m=\frac{(R_s[0]/R_n[0])(1-\beta^2)+\beta^2\sigma^2_{m-1}/R_n[0]}{1+(R_s[0]/R_n[0])(1-\beta^2)+\beta^2\sigma^2_{m-1}/R_n[0]}=\frac{\sigma^2{}_m}{R_n[0]}. \qquad (13.130)$$

Итак, для определения оптимальных параметров β и K_m требуется априорная информация о корреляционной функции случайного сигнала $s[m]$ и, кроме того, о соотношении дисперсий сигнала $R_s[0]$ и шума $R_n[0]$.

Проследим за эволюцией K_m и соответственно дисперсии $\sigma^2_m=K_mR_n[0]$ по мере увеличения числа наблюдений m.

На такте $m=1$, когда обратные связи (рис. 13.18) еще не вступили в действие, отсчету $x[1]=s[1]+n[1]$ на выходе фильтра соответствует дисперсия ошибки $\sigma_1{}^2=R_n[0]$, так что $K_1=$ $=\sigma_1{}^2/R_n[0]=1$.

Рассмотрим сначала случай $R_s[0]/R_n[0]=1$. Формула (13.130) при этом принимает вид

$$K_m=\frac{1-\beta^2(1-K_{m-1})}{2-\beta^2(1-K_{m-1})}, \quad m\geqslant 2.$$

Нетрудно составить следующую таблицу ($\beta=0{,}9$):

m	1	2	3	4	5	6
K_m	1	0,5	0,373	0,331	0,314	0,307

Заметим, что в данном случае ($R_n[0]=R_s[0]$) коэффициент K_m определяет одновременно и отношение $\sigma^2_m/R_s[0]$.

Рассмотрим важный для практики случай $R_s[0]<R_n[0]$. Для сопоставления калмановского и винеровского фильтров положим, как и в примерах § 13.9—13.11, посвященных винеровской фильтрации, $R_s[0]/R_n[0]=1/3$. Сохраняя характеристики сигнала и шума, а также параметр $\beta=0{,}8$ из примера § 13.11, приведем результаты вычислений по формуле (13.130):

m	1	2	3	4	5	6	7
$K_m=\sigma^2{}_m/R_n[0]$	1	0,432	0,283	0,237	0,213	0,204	0,200
$\sigma^2{}_m/R_s[0]$	3	1,295	0,849	0,712	0,639	0,612	0,601

Видно, что при $m\geqslant 6\ldots 8$ относительный уровень шума $\sigma_m{}^2/R_s[0]$ в рассматриваемом фильтре снижается до стационарного уровня в винеровском фильтре $(\overline{\varepsilon^2}/R_s[0]=0{,}6$, см, § 13.11).

Для иллюстрации особенностей адаптивного фильтра достаточно рассмотреть преобразование сигнала и шума на нескольких первых тактах. С этой целью обратимся к основному уравнению (13.126). Замечаем, что при $m=1$ $(K_m=1)$ первое слагаемое в правой части обращается в нуль (при $c=1$). Следовательно, $s[1]_{\text{opt}}=x[1]=s[1]+n[1]$, а среднеквадратическое значение оптимальной оценки

$$\overline{s^2[1]_{\text{opt}}}=R_s[0]+R_n[0].$$

На такте $m=2$ при $K_2=0{,}5$ в соответствии с (13.126)

$$s[2]=\beta(1-K_2)s[1]_{\text{opt}}+K_2x[2]=0{,}5\beta x[1]+0{,}5x[2].$$

После несложных преобразований получаем

$$\overline{s^2[2]_{\text{opt}}}=0{,}25\,[\beta^2\overline{x^2[1]}+\overline{x^2[2]}+2\beta\,\overline{x[1]\,x[2]}].$$

Учитывая, что при некоррелированности процессов $s[m]$ и $n[m]$ $\overline{x[1]\,x[2]}=R_s[1]=\beta R_s[0]$, последнее выражение приводится к виду (при $\beta=0{,}9$)

$$\overline{s^2[2]_{\text{opt}}}=0{,}25\,[(1+3\beta^2)R_s[0]+(1+\beta^2)R_n[0]]=$$
$$=0{,}857R_s[0]+0{,}452R_n[0].$$

Аналогично для третьего такта $(m=3,\ K_m=0{,}373)$

$$\overline{s^2[3]_{\text{opt}}}=0{,}52R_s[0]+0{,}285R_n[0].$$

В частном случае $R_s[0]=R_n[0]$ приходим к следующим результатам:

$m=1$

$\overline{s^2[1]_{\text{opt}}}=2R_s[0],\quad (\overline{s^2[1]_{\text{opt}}})^{1/2}=1{,}41\,(R_s[0])^{1/2};$

$\sigma_1{}^2/R_n[0]=K_1=1;$

$m=2$

$\overline{s^2[2]_{\text{opt}}}=1{,}31R_s[0],\quad (\overline{s^2[2]_{\text{opt}}})^{1/2}=1{,}15\,(R_s[0])^{1/2};$

$\sigma_2{}^2/R_n[0]=K_2=0{,}5;$

$m=3$

$\overline{s^2[3]_{opt}} = 0{,}805 R_s[0]$, $\overline{(s^2[3]_{opt})^{1/2}} = 0{,}897\,(R_s[0])^{1/2}$;

$\sigma_3^2 / R_n[0] = K_3 = 0{,}373$.

При дальнейшем увеличении числа наблюдений m оптимальная оценка сигнала совпадает с величиной $\beta(R_s[0])^{1/2}$.

Заметим, что для простого рекурсивного фильтра с весовым коэффициентом $\beta = 0{,}9$ мощность накопленного сигнала на третьем такте была бы

$$P_s = [(1+\beta^2+\beta^4) = 2(\beta^2+2\beta^4)]R_s[0] = 6{,}71 R_s[0],$$

а уровень шума

$$P_n = (1+\beta^2+\beta^4) R_n[0] = 2{,}47 R_n[0],$$

так что отношение $P_n/P_s = 2{,}47/6{,}71 \approx 0{,}37$ совпадает с $K_3 = 0{,}373$. Как видим, переход к схеме Калмана не дает выигрыша в подавлении помехи. Основной эффект — подавление помехи при неизменном уровне выходного (полезного) сигнала.

Остановимся на вопросе о законе распределения сигнала на выходе адаптивного фильтра. Поскольку рассматриваемая обработка является линейной, распределение, как и на входе, остается нормальным, однако параметры — математическое ожидание и дисперсия — изменяются от одного наблюдения к следующему.

Величина оценки $s[m]_{opt}$ на m-м такте зависит как от $s[m]$, так и от всей совокупности отсчетов $x[1], x[2], \ldots, x[m]$ (которую обозначим через X_m), поэтому, говоря о плотности вероятности $s[m]$, следует иметь в виду условную (апостериорную) плотность $p(s[m]/X_m)$. Для нахождения $p(s[m]/X_m)$ требуется учитывать совместное распределение вероятностей по всем переменным $x[1], x[2], \ldots, x[m]$, что практически нереализуемо. Задача упрощается в случае марковского процесса, при котором задание нормального распределения для такта t_{m-1} предопределяет распределение и для такта t_m (см. п. 12.4.2).

Поэтому можно записать условную плотность вероятности на m-м шаге в стандартной форме:

$$p(s[m]/X_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left\{-\frac{(s[m]-s[m]_{opt})^2}{2\sigma_m^2}\right\}, \qquad (13.131)$$

где параметры распределения $s[m]_{opt}$ и σ_m^2 определяются выражениями (13.126) и (13.127).

Важно отметить, что оптимальная оценка $s[m]_{opt}$ совпадает с математическим ожиданием (апостериорным средним) распределения (13.131). Кроме того, поскольку при нормальном распределении наиболее вероятное значение случайной величины совпадает с математическим ожиданием, то опредленная выше оценка $s[m]_{opt}$, оптимальная по критерию минимума среднеквадратической погрешности, является оптимальной и по критерию максимума апостериорной вероятности.

В отличие от винеровского в рекурсивном фильтре требуется обеспечивать устойчивость. Решающим преимуществом рекурсивного фильтра Калмана является экономия объемов вычисления. Адаптивным фильтрам посвящена обширная литература [9, 10].

Глава 14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ФУНКЦИЯМИ УОЛША

14.1. ФУНКЦИИ УОЛША И РАДЕМАХЕРА

Указанные в заголовке функции, известные с 1922 г., были надолго преданы забвению. Интерес к этим функциям и широкое их распространение связаны с развитием вычислительной техники.

Существуют различные способы определения функций Уолша. Рассмотрим способ, основанный на взаимосвязи функций Уолша с функциями Радемахера. Последние получаются из синусоидальных функций с помощью соотношения

$$r_k(\theta)=\mathrm{sign}[\sin(2^k\pi\theta)],\ 0\leqslant\theta<1, \tag{14.1}$$

где аргумент $\theta=t/T_0$ есть безразмерное время, т. е. время, нормированное к произвольному интервалу T_0, а целое положительное число k — порядок функции. Символом sign (сигнум-функция) обозначается функция

$$\mathrm{sign}\,x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ -1 \text{ при } x<0.\end{cases} \tag{14.2}$$

В соответствии с (14.1) и (14.2) функции Радемахера, принимающие одно из двух значений ±1, имеют вид меандра (рис. 14.1).

Функции Радемахера ортонормированы (см. § 2.1) с единичной весовой функцией на интервале $0\leqslant\theta<1$. Действительно, для любых двух функций $r_m(\theta)$, $r_n(\theta)$ имеют место соотношения

$$\int_0^1 r_m(\theta)\,r_n(\theta)\,d\theta=\begin{cases}1 \text{ при } m=n,\\ 0 \text{ при } m\neq n.\end{cases} \tag{14.3}$$

Все функции Радемахера являются нечетными относительно середины интервала определения и, следовательно, не могут

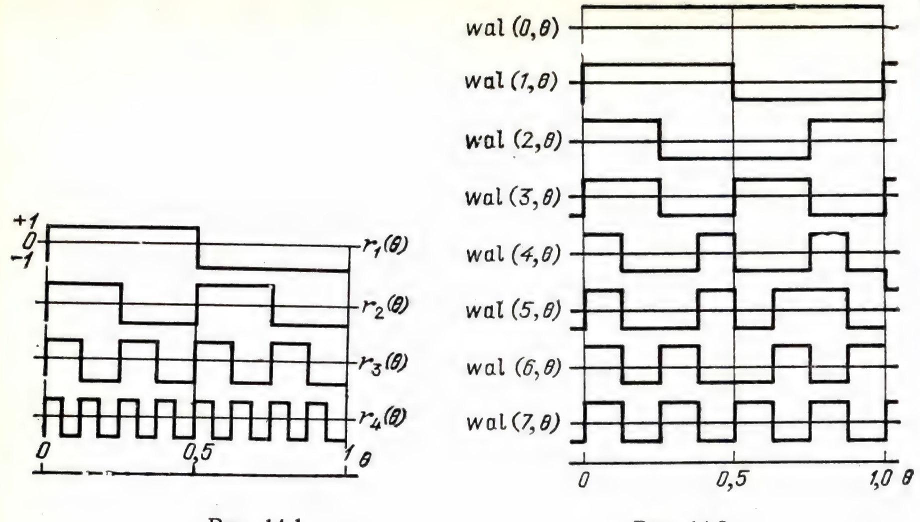


Рис. 14.1 Рис. 14.2

быть использованы для аппроксимации сигналов $s(\theta)$, четных относительно момента $\theta=1/2$. Иными словами, система функций Радемахера — неполная (см. § 2.2).

14.2. ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Функции Уолша, образующие полную ортонормированную систему, можно сформировать, образуя произведения степеней соответствующих функций Радемахера. Первые восемь функций Уолша представлены на рис. 14.2. Сопоставление этих функций с функциями Радемахера (см. рис. 14.1) позволяет составить очевидные, по крайней мере для первых четырех функций Уолша, соотношения

$$\mathrm{wal}(0,\theta)=r_1^0(\theta)r_2^0(\theta)=1,\ \mathrm{wal}(1,\theta)=r_1(\theta)r_2^0(\theta)=$$
$$=r_1(\theta),\ \mathrm{wal}(2,\theta)=r_1(\theta)r_2(\theta),\ \mathrm{wal}(3,\theta)=$$
$$=r_1^0(\theta)r_2(\theta)=r_2(\theta). \qquad (14.4)$$

Нетрудно также проверить правильность соотношений

$$\mathrm{wal}(4,\theta)=r_1^0(\theta)r_2(\theta)r_3(\theta)=r_2(\theta)r_3(\theta),\ \mathrm{wal}(5,\theta)=$$
$$=r_1(\theta)r_2(\theta)r_3(\theta), \qquad (14.5)$$
$$\mathrm{wal}(6,\theta)=r_1(\theta)r_2^0(\theta)r_3(\theta)=r_1(\theta)r_3(\theta),$$
$$\mathrm{wal}(7,\theta)=r_1^0(\theta)r_2^0(\theta)r_3(\theta)=r_3(\theta).$$

Итак, каждая функция Уолша $\mathrm{wal}(w,\theta)$ за номером w, входящая в систему из $N=2^n$ функций, является произведением степеней первых n функций Радемахера. Принцип нахождения показателей этих степеней поясняется табл. 14.1 для $N=2^3=8$.

Таблица 14.1

w	w_0	w_1	w_2	w_3	$r_1(\theta) \times r_2(\theta) \times r_3(\theta) = \mathrm{wal}(w,\theta)$
0	0	0	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{wal}(0,\theta)$
1	0	0	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{wal}(1,\theta)$
2	0	0	1	0	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{wal}(2,\theta)$
3	0	0	1	1	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{wal}(3,\theta)$
4	0	1	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{wal}(4,\theta)$
5	0	1	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{wal}(5,\theta)$
6	0	1	1	0	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{wal}(6,\theta)$
7	0	1	1	1	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{wal}(7,\theta)$

В таблице использованы следующие обозначения: w — номер функции в системе (в десятичном счислении); w_m—m-й разряд представления числа w в двоичной системе счисления, т. е.

$$w = (w_1 w_2 \ldots w_m \ldots w_n)_2 = w_1 2^{n-1} + w_2 2^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + w_m 2^{n-m} + \ldots + w_n 2^0 = \sum_{m=1}^{n} w_m 2^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} w_{n-m+1} 2^{m-1}. \quad (14.6)$$

В выражении (14.6) $n = \log_2 N$ — число разрядов, w_m может принимать одно из двух значений — нуль или единица, а w_0 равно нулю по определению.

Символ $\oplus$ обозначает поразрядное суммирование по модулю 2 по правилам

$$1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1. \quad (14.7)$$

Показанный в табл. 14.1 способ построения функций Уолша можно выразить аналитически для любого $N = 2^n$ в виде следующего соотношения:

$$\mathrm{wal}(w, \theta) = \prod_{k=1}^{n} [r_k(\theta)]^{w_{n-k+1} \oplus w_{n-k}}. \quad (14.8)$$

Поясним применение (14.8) на примере шестой функции Уолша ($w = 6$), входящей в систему размером $N = 2^3 = 8$. Произведение в (14.8) состоит из трех множителей вида

$[r_1(\theta)]^{w_3 \oplus w_2}$ при $k = 1$, $[r_2(\theta)]^{w_2 \oplus w_1}$ при $k = 2$,
$[r_3(\theta)]^{w_1 \oplus w_0}$ при $k = 3$.

Подставив в левую часть (14.6) $w=6$ и $n=3$, получим

$$6=w_1 2^2+w_2 2^1+w_3 2^0,$$

откуда следуют равенства $w_1=1$, $w_2=1$, $w_3=0$.

Таким образом,

$$w_3 \oplus w_2=0 \oplus 1=1,\ w_2 \oplus w_1=1 \oplus 1=0,\ w_1 \oplus w_0=1 \oplus 0=1$$

и по формуле (14.8)

$$\mathrm{wal}(6, \theta)=r_1(\theta) r_2^0(\theta) r_3(\theta)=r_1(\theta) r_3(\theta).$$

Из рис. 14.2 видно, что четным относительно середины интервала определения ($\theta=0{,}5$) функциям wal (w, θ) соответствуют четные номера w, а нечетным функциям — нечетные номера. Такое взаимно однозначное соответствие между четностью функций wal (w, θ) и четностью их номеров w аналогично свойствам тригонометрических функций $\cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)$ и $\sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)$ (рис. 14.3).

Поэтому иногда применяются обозначения $\mathrm{cal}(j, \theta)$ для четных и $\mathrm{sal}(j, \theta)$ для нечетных функций Уолша. Легко проверить, что функции $\mathrm{cal}(j, \theta)$ и $\mathrm{sal}(j, \theta)$ связаны с функциями $\mathrm{wal}(w, \theta)$ следующими соотношениями:

$$\mathrm{cal}(j, \theta)=\mathrm{wal}(2j, \theta),\ \mathrm{sal}(j, \theta)=\mathrm{wal}(2j-1, \theta).$$

Эти соотношения проиллюстрированы на рис. 14.4.

Функции Уолша ортонормированы на интервале $0 \leqslant \theta < 1$:

$$\int_0^1 \mathrm{wal}(k, \theta)\, \mathrm{wal}(i, \theta)\, d\theta=\begin{cases}1 & \text{при } k=i, \\ 0 & \text{при } k \neq i.\end{cases}$$

Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, т. е. перемножение двух функций Уолша дает другую функцию Уолша, причем

$$\mathrm{wal}(k, \theta)\, \mathrm{wal}(i, \theta)=\mathrm{wal}(k \oplus i, \theta). \tag{14.9}$$

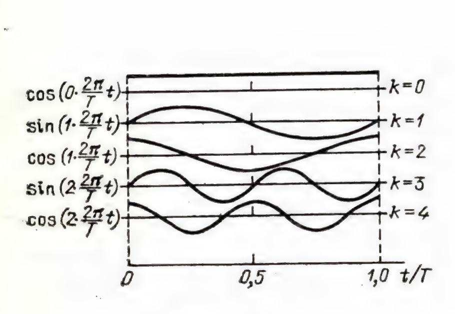


Рис. 14.3

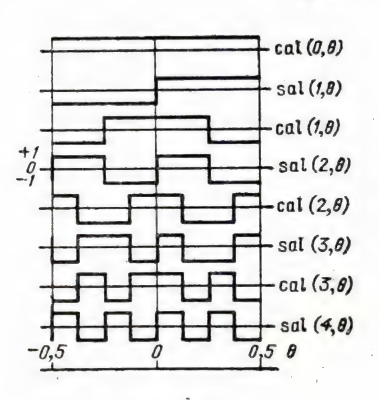


Рис. 14.4

Функции Уолша $\text{wal}(i, \theta)$ обладают свойством *симметрии*, проявляющимся в том, что все выводы относительно i справедливы также относительно θ. Например, свойство мультипликативности (14.9) с учетом свойства симметрии запишется в виде

$$\text{wal}(i, \theta_1)\,\text{wal}(i, \theta_2) = \text{wal}(i, \theta_1 \oplus \theta_2). \tag{14.10}$$

Умножение любой функции Уолша самой на себя дает функцию нулевого порядка $\text{wal}(0, \theta)$, так как в результате получаются только произведения вида $(+1)(+1)$ и $(-1)(-1)$. Таким образом,

$$\text{wal}(i, \theta)\ \text{wal}(i, \theta) = \text{wal}(0, \theta).$$

Очевидно также, что умножение $\text{wal}(i, \theta)$ на $\text{wal}(0, \theta)$ не изменяет функцию $\text{wal}(i, \theta)$.

Функции Уолша иногда определяют на интервале $-1/2 \leqslant \theta < 1/2$. Первые восемь функций на указанном интервале представлены на рис. 14.4.

Функции Уолша могут служить базисом спектрального (негармонического) представления сигналов.

Любую интегрируемую на интервале $0 \leqslant \theta < 1$ функцию $f(\theta)$ можно представить рядом Фурье по системе функций Уолша

$$f(\theta) = A(0) + A(1)\,\text{wal}(1, \theta) + A(2)\,\text{wal}(2, \theta) + \\ + \ldots + A(i)\,\text{wal}(i\ \theta) \tag{14.11}$$

с коэффициентами

$$A(i) = \int_0^1 f(\theta)\,\text{wal}(i, \theta)\,d\theta, \quad \theta = \frac{t}{T}.$$

Вне полуоткрытого интервала [0,1) ряд (14.11) описывает периодическую функцию $f(\theta + k)$, где k — любое целое число.

Как уже отмечалось, функции Уолша, широко используемые в задачах вычислительной техники, могут быть легко реализованы с помощью ключевых схем. Один из возможных вариантов схемы генератора первых восьми функций представлен на рис. 14.5.

Алгоритм формирования функций Уолша в этом генераторе основан на выражении (14.8), т. е. на перемножении степеней трех функций Радемахера: $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ и $r_3(\theta)$. Функция $r_3(\theta)$ получается непосредственно от генератора меандрового колебания. Функция $r_2(\theta)$ получается из $r_3(\theta)$ удлинением периода этого колебания в 2 раза. Это достигается с помощью триггера со счетным входом (на рис. 14.5 изображен D-триггер T_1 в счетном режиме), запускаемого фронтом каждого периода меандра. Аналогичным способом из $r_2(\theta)$ формируется функция $r_1(\theta)$. Таким образом, на выходах триггеров T_1 и T_2 возни-

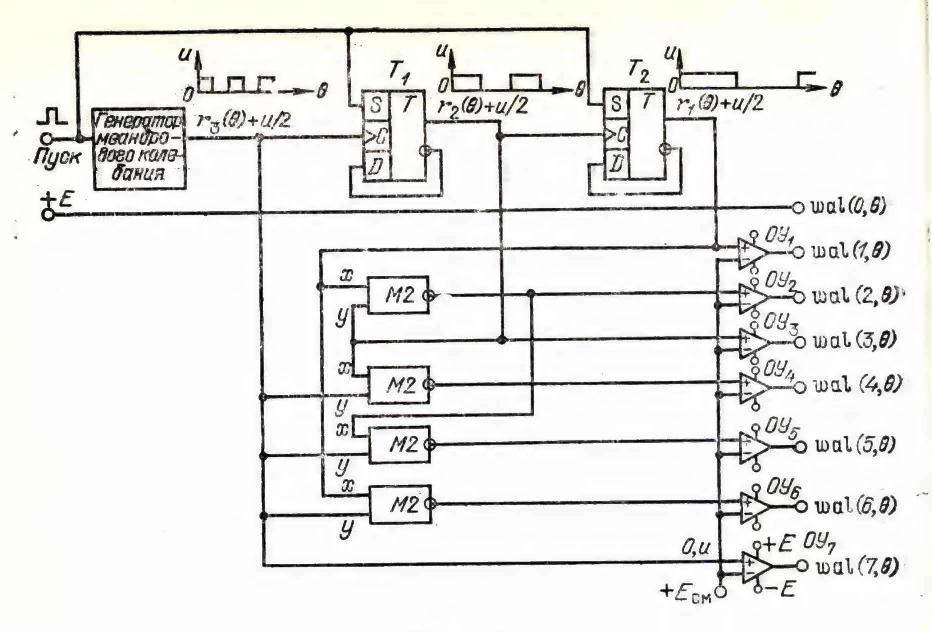


Рис. 14.5

кают функции Радемахера, смещенные по уровню на положительную величину $u/2$, т. е.

$$r_1(\theta)+u/2,\ r_2(\theta)+u/2 \text{ и } r_3(\theta)+u/2.$$

Указанные смещенные функции соответствуют функциям Уолша wal (1, 0), wal (3, θ) и wal (7, 0) (также смещенным). Для получения остальных функций Уолша используются сумматоры по модулю 2 (на рис. 14.5 обозначены M2) с инверсными выходами. Подобные сумматоры представляют собой устройство совпадения, которому соответствует следующая таблица истинности:

Вход x	Вход y	Выход с инверсией	Вход x	Вход y	Выход с инверсией
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

Легко убедиться, что при подаче на сумматор функций $r_1(\theta)+u/2$ и $r_2(\theta)+u/2$ на выходе получается функция Уолша wal(2, 0)$+u/2$, т. е. эффект, эквивалентный перемножению соответствующих функций $r_1(\theta)$ и $r_2(\theta)$ (см. табл. 14.1).

Аналогично при объединении в сумматоре функций $r_2(\theta)+u/2$ и $r_3(\theta)+u/2$ имеем wal(4, θ)$+u/2$ и т. д.

Для получения несмещенных функций Уолша, которые могут принимать значения +1, −1, используются коммутаторы на

операционных усилителях ОУ$_1$—ОУ$_7$ (с большим коэффициентом усиления для сокращения длительности фронтов). На инвертирующие входы усилителей задается смещающее напряжение $+E_{см}$, выбираемое из интервала $0<E_{см}<u$. Если поступающее с сумматора напряжение $u>E_{см}$, то на выходе коммутатора возникает напряжение $+E$, при $u<E_{см}$ — напряжение $-E$, что соответствует +1 и −1.

Функции wal(1, θ), wal(3, θ) и wal(7, θ) получаются без обращения к сумматорам.

14.3. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ НУМЕРАЦИИ ФУНКЦИЙ УОЛША

Способ нумерации функций в системе называется **упорядочением**. Функции Уолша, сформированные в соответствии с выражением (14.8), упорядочены по Уолшу.

В ряде практических задач целесообразно пользоваться иными способами упорядочения. Часто применяются функции Уолша, упорядоченные по Пэли [pal(p, θ)], а также по Адамару [had(h, θ)][1].

Независимо от упорядочения функции Уолша, составляющие систему из $N=2^n$ функций, всегда можно представить в виде произведения степеней первых n функций Радемахера. Принцип нахождения показателей этих степеней индивидуален для каждого упорядочения.

Так, для упорядочения Пэли принцип нахождения этих степеней поясняется табл. 14.2 для $N=2^3=8$. В этой таблице по

Таблица 14.2

p	p_1	p_2	p_3	$r_1(\theta) \times r_2(\theta) \times r_3(\theta) = \mathrm{pal}(p,\theta)$
0	0	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{pal}(0,\theta)$
1	0	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{pal}(1,\theta)$
2	0	1	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{pal}(2,\theta)$
3	0	1	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) = \mathrm{pal}(3,\theta)$
4	1	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{pal}(4,\theta)$
5	1	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{pal}(5,\theta)$
6	1	1	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{pal}(6,\theta)$
7	1	1	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) = \mathrm{pal}(7,\theta)$

[1] Обозначения pal(p, θ) и had(h, θ) образованы от начальных букв фамилий Paley и Hadamard соответственно.

аналогии с (14.6) номер p функций $\mathrm{pal}(p, \theta)$ имеет двоичное представление

$$p=(p_1 p_2 \ldots p_m \ldots p_n)_2=\sum_{m=1}^{n} p_{n-m+1}\cdot 2^{m-1}. \qquad (14.6')$$

Очевидно, что аналитическая запись функций Уолша в упорядочении Пэли имеет вид

$$\mathrm{pal}(p, \theta)=\prod_{k=1}^{n}[r_k(\theta)]^{p_{n-k+1}}. \qquad (14.12)$$

Сравнивая способы образования показателей степеней функций Радемахера (см. табл. 14.1 и 14.2), приходим к выводу, что двоичные разряды номеров функций Уолша, упорядоченных по Пэли, связаны с двоичными разрядами номеров функций Уолша, упорядоченных по Уолшу, следующим соотношением:

$$p_m=w_{m-1}\oplus w_m. \qquad (14.13)$$

Итак, переход от упорядочения по Уолшу к упорядочению этих функций по Пэли выражается в перестановке этих функций в системе по закону (14.13).

Функции $\mathrm{had}(h, \theta)$ можно сформировать с помощью матриц Адамара. Матрицей Адамара H_N порядка $N=2^n$ называется квадратная матрица размера $N\times N$ с элементами ± 1, такая, что

$$H_N\times H_N^{\mathrm{T}}=NI,$$

где I — единичная матрица; т — знак транспонирования.

Нормированную матрицу Адамара порядка N можно построить рекурсивно, т. е.

$$H_N=\begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2}\end{bmatrix} \quad \text{при} \quad H_1=1. \qquad (14.14)$$

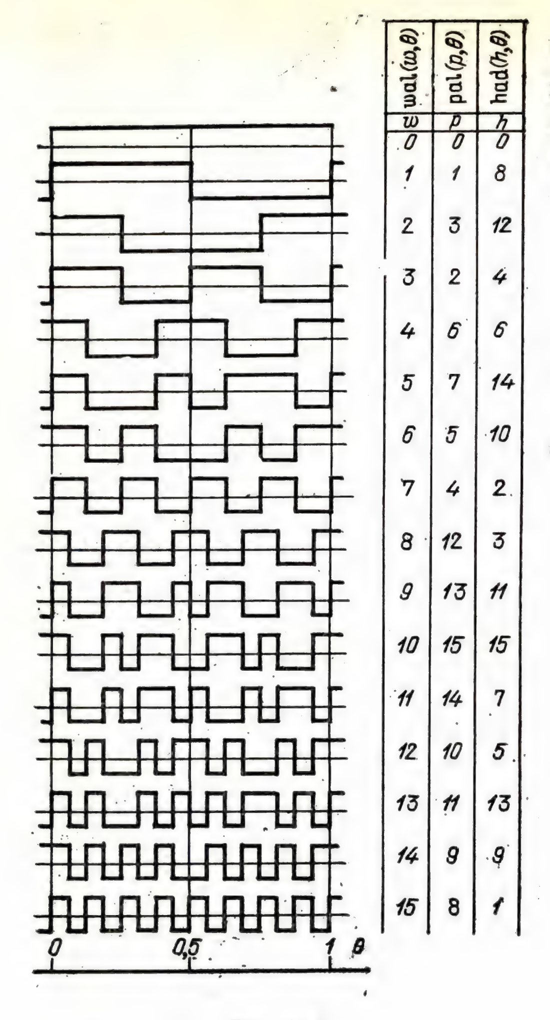
Например,

$$H_2=\begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$H_4=\begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] \text{ и т. д.}$$

Функция Уолша, упорядоченная по Адамару, т. е. $\mathrm{had}(h, \theta)$ с номером h, является последовательностью прямоугольных импульсов с единичными амплитудами и полярностями, соответствующими знакам элементов h-й строки матрицы Адамара. Под длительностью импульсов подразумевается $(1/N)$-я доля интервала [0, 1]).

Для иллюстрации связи между функцией $\mathrm{had}(h, \theta)$ и матри-



w	p	h
wal(w,θ)	pal(p,θ)	had(h,θ)
0	0	0
1	1	8
2	3	12
3	2	4
4	6	6
5	7	14
6	5	10
7	4	2
8	12	3
9	13	11
10	15	15
11	14	7
12	10	5
13	11	13
14	9	9
15	8	1

Рис. 14.6

цей Адамара, а также для определения места этих функций в системе приведем матрицу Адамара для $N=8=2^3$, заменяя $+1$ и -1 знаками соответственно плюс и минус:

$$H_8=\begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc|cccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ \hline + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{array}\right]\begin{array}{l} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{array}. \qquad (14.15)$$

Матрица Адамара обладает свойством симметричности, заключающимся в том, что транспонированная матрица совпадает с исходной: $H_N=H_N^{\mathrm{T}}$.

Следует подчеркнуть, что отмеченная в § 14.2 ортонормированность функций Уолша сохраняется при любом способе их упорядочения.

Нумерация первых шестнадцати функций Уолша при различных способах упорядочения дана в таблице на рис. 14.6.

14.4. ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША

Для цифровых методов спектрального анализа и обработки сигналов наибольший интерес представляют дискретные функции Уолша. Эти функции являются отсчетами непрерывных функций Уолша. Каждый отсчет расположен в середине связанного с ним элемента непрерывной функции. Длительность элемента равна $1/N$ от интервала [0, 1].

В качестве примера на рис. 14.7 показаны первые две и последняя $(N-1)$-я дискретные функции Уолша при $N=8$. В качестве аргумента дискретной функции Уолша принят номер отсчета $x=0, 1, \ldots, N-1$ (см. ось абсцисс на верхней части рис. 14.7). Основываясь на (14.6) и (14.7), можно получить общее выражение для дискретной функции Уолша

$$\mathrm{wal}(w, x)=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}(w_{n-k+1}\oplus w_{n-k})x_k}, \qquad (14.16)$$

где $x_k=0$ или 1 есть k-й разряд в представлении номера отсчета x в двоичной системе счисления:

$$x=\sum_{k=1}^{n} x_k 2^{n-k}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)_2. \qquad (14.17)$$

Пусть, например, рассматривается система функций Уолша размером $N=16$, $n=\log_2 N=4$. Тогда

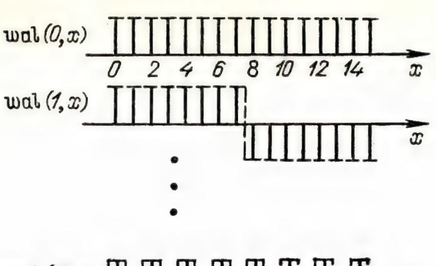
$$x=\sum_{k=1}^{4} x_k 2^{4-k}=x_1 2^3+x_2 2^2+x_3 2^1+x_4 2^0. \qquad (14.18)$$

Определим одну из функций системы, например шестую $(w=6)$. По модулю все отсчеты функций Уолша равны единице и требуется определить лишь знак. Обратимся для этого к формуле (14.16), в которую подставим $w=6$ и $n=4$:

$$\mathrm{wal}(6, x)=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{4}(w_{4-k+1}\oplus w_{4-k})x_k}.$$

Напомним, что в соответствии с (14.6) при $n=4$

$w=6=w_1 2^3+w_2 2^2+w_3 2^1+w_4 2^0$,



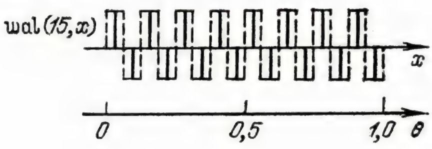


Рис. 14.7

откуда следуют равенства $w_1=0$, $w_2=1$, $w_3=1$ и $w_4=0$.

Далее находим значения w_{4-k+1}, w_{4-k} и сумму

$w_{4-k+1}\oplus w_{4-k}$ при $k=1, 2, 3, 4$:

$k=1$: $w_{4-k+1}=w_4=0$, $w_{4-k}=w_3=1$, $w_{4-k+1}\oplus w_{4-k}=0\oplus 1=1$;

$k=2$: $w_{4-k+1}=w_3=1$, $w_{4-k}=w_2=1$, $1\oplus 1=0$;

$k=3$: $w_{4-k+1}=w_2=1$, $w_{4-k}=w_1=0$, $1\oplus 0=1$;

$k=4$: $w_{4-k+1}=w_1=0$, $w_{4-k}=w_3=0$, $0\oplus 0=0$.

Значения x_k (нуль или единица) находим из выражения (14.17), приравнивая номер отсчета x последовательно значениям 0, 1, ..., 15.

При $x=0$ все разряды x_1, x_2, x_3, x_4 равны нулю и, следовательно, по формуле (14.16) $\mathrm{wal}(6,0)=+1$.

При $x=1$ соответственно $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ и $x_4=1$; при этом показатель степени в (14.16) при $k=4$ равен $0\cdot x_4=0$ и $\mathrm{wal}(6, 1)=+1$.

При $x=2$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$; показатель степени в (14.16) при $k=3$ равен $1\cdot x_3=1$, откуда получаем $\mathrm{wal}(6, 2)=-1$.

Продолжая расчет для $x=3, 4, \ldots, 15$, находим все отсчеты функции $\mathrm{wal}(6, x)$.

Другой формой представления дискретных функций Уолша являются матрицы Адамара, приведенные в § 14.3. Номера столбцов матрицы Адамара соответствуют номерам дискретных значений функций Уолша, а номера строк — номерам функций Уолша. Строки матрицы Адамара могут быть упорядочены по Пэли, по Уолшу и собственно по Адамару.

Перечисленные в § 14.2 свойства непрерывных функций Уолша записываются для дискретных функций следующим образом.

Ортогональность

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mathrm{wal}\,(i, x)\,\mathrm{wal}\,(l, x) = \begin{cases} N \text{ при } i = l, \\ 0 \text{ при } i \neq l. \end{cases} \quad (14.19)$$

Дискретные функции Уолша не нормированы; норма равна N независимо от номера функции.

Мультипликативность [см. (14.9) и (14.10)]

$$\mathrm{wal}\,(i, x)\,\mathrm{wal}\,(l, x) = \mathrm{wal}\,(i \oplus l, x). \quad (14.20)$$

Дискретные функции Уолша могут служить базисом спектрального представления сигналов.

Пусть сигнал $s(t)$ (вещественная функция) представлен совокупностью своих эквидистантных отсчетов $s[k]$, $k=0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Тогда преобразования

$$\mathbf{S}\,[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s\,[k]\,\mathrm{wal}\,(n, k),\ n = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (14.21)$$

$$s\,[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}\,[n]\,\mathrm{wal}\,(n, k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (14.22)$$

образуют пару дискретных преобразований Уолша (ДПУ). Выражения (14.21), (14.22) аналогичны паре ДПФ в базисе гармонических функций см. (12.14), (12.15).

Как и ДПФ (см. п. 12.4.1), ДПУ обладают свойством периодичности

$$\mathbf{S}[n] = \mathbf{S}[n+mN],\ s[k] = s[k+mN], \quad (14.23)$$

где m — целое число.

Имеются, однако, и существенные особенности ДПУ. Это относится к теореме запаздывания. Напомним, что в случае спектрального анализа в базисе гармонических функций умножение ДПФ $\mathbf{S}[n]$ на базисную функцию $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$ эквивалентно сдвигу во времени последовательности $s[k]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, на m интервалов.

Действительно, вводя под знак суммы в правой части (12.15) множитель $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$, получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}\,[n]\, e^{i\frac{2\pi}{N}nm} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}\,[n]\, e^{i\frac{2\pi}{N}(k+m)n} = s\,[k+m],$$

что эквивалентно сдвигу каждого из отсчетов $s[k]$ на $(k+m) - k = m$ интервалов.

Проведем аналогичное рассуждение для ДПУ. Обращаясь к выражению (14.22) для $s\,[k]$, вводим под знак суммы множи-

тель wal(n, m), т. е. базисную функцию, имеющую тот же смысл, что и $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$ для анализа в базисе гармонических функций. Тогда получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}[n]\, \mathrm{wal}(n, k)\cdot \mathrm{wal}(n, m) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}[n]\, \mathrm{wal}(n, k \oplus m) = s[k \oplus m]. \qquad (14.24)$$

Здесь использовано свойство мультипликативности функций Уолша.

Как видим, при заданном значении m сдвиг k-го отсчета будет равен $(k\oplus m)-k$ интервалов (а не просто m интервалов).

Переход от $s[k]$ к $s[k\otimes m]$ означает д и а д н ы й с д в и г на m интервалов последовательности отсчетов $s[k]$, $k=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$.

Поясним смысл термина «диадный сдвиг». С понятием «сдвиг функции» приходится иметь дело, например, при определении корреляционной функции, при рассмотрении теоремы запаздывания, при определении свертки двух функций. В обычном смысле сдвиг рассматривается как параллельный перенос сдвигаемых значений колебания вдоль оси времени. Такой сдвиг можно назвать арифметическим, так как он выражается обычным арифметическим сложением или вычитанием. При арифметическом сдвиге, например, на $m=3$ интервала k-й отсчет $x[5]$ переместится и станет $x[5+3]=x[8]$. При достаточно большом m отсчет $x[k]$ выйдет за пределы исходной совокупности отсчетов. При диадном сдвиге тот же отсчет $x[5]$, сдвинутый на $m=3$, займет положение $x[5\oplus 3]=x[6]$, так как

$$\begin{array}{r} 5=(101)_2 \\ \oplus\, 3=(011)_2 \\ \hline (110)_2=6. \end{array}$$

Диадный сдвиг обладает так называемым г р у п п о в ы м с в о й с т в о м: сдвиг отсчетов $x[k]$ (где $k=0, 1, 2, \ldots, N-1$) на $m\leqslant N-1$ соответствует лишь перестановке этих отсчетов внутри их исходной совокупности. Эта перестановка определяется операцией сложения по модулю 2, т. е. $k\oplus m$, для которой результат сложения никогда не превышает число $N-1$ при любом $m=0, 1, 2, \ldots, N-1$. При этом имеется в виду, что $N=2^n$, где n — целое положительное число.

Сделанное утверждение легко проверить перебором всевозможных диадных сдвигов всех отсчетов $x[k]$ при заданном N.

Например, при $N=8$ получается следующая квадратная матрица значений $q=k\oplus m$:

$$q=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0&1&2&3&4&5&6&7 \end{array}\ k \\ \begin{bmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 1&0&3&2&5&4&7&6\\ 2&3&0&1&6&7&4&5\\ 3&2&1&0&7&6&5&4\\ 4&5&6&7&0&1&2&3\\ 5&4&7&6&1&0&3&2\\ 6&7&4&5&2&3&0&1\\ 7&6&5&4&3&2&1&0 \end{bmatrix}. \\ \ \end{array}$$

Из этой матрицы видно, что диадный сдвиг не выводит сдвинутые отсчеты за пределы исходной совокупности N отсчетов, а лишь производит их перестановку внутри этой совокупности.

Например, при исходной последовательности $s[0]s[1]\ldots s[7]$ получим следующие последовательности:

при $m=1$

$s[1]s[0]s[3]s[2]s[5]s[4]s[7]s[6]$;

при $m=2$

$s[2]s[3]s[0]s[1]s[6]s[7]s[4]s[5]$;

при $m=3$

$s[3]s[2]s[1]s[0]s[7]s[6]s[5]s[4]$ и т. д.

Диадный сдвиг придает существенное своеобразие как спектральному анализу в базе функций Уолша, так и представлению сигналов во временно́й области. В частности, диадная свертка двух временны́х последовательностей $x[k]$ и $y[k]$ записывается в форме

$$h[k]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\,y[k\oplus m]=x[k]\otimes y[k].$$

Основное преимущество ДПУ перед ДПФ заключается в том, что отсчеты сигнала умножаются на функции Уолша, которые принимают значения ± 1 [см. (14.21), (14.22)]. По существу операция умножения исключается и выражения (14.21), (14.22) сводятся к суммированию отсчетов с соответствующими знаками. В случае же ДПФ требуется умножение на комплексные числа вида $e^{\pm i\frac{2\pi}{N}nk}$, причем действительная и мнимая части этих чисел должны представляться достаточно большим числом разрядов (для снижения уровня шума округления).

Возведение спектральных коэффициентов Уолша S[n] в квадрат и обратное преобразование Уолша дают диадную корреляционную функцию исходного сигнала. По своей форме эта функция сильно отличается от арифметической корреляционной функции. Кроме того, диадная корреляционная функция неинвариантна относительно положения обрабатываемого сигнала во времени. Эти обстоятельства препятствуют применению функций Уолша для такой, например, обработки сигналов, как согласованная фильтрация.

Тем не менее важное преимущество функций Уолша, не требующих использования операций умножения при обработке сигналов, способствует все более широкому их распространению в различных областях (передача изображений, распознавание образов, сжатие данных и др.).

14.5. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША

По аналогии с БПФ и ОБПФ (см. § 12.12) можно построить алгоритмы быстрых преобразований — прямого и обратного — по Уолшу. Поясним принцип построения алгоритма БПУ на примере простого четырехточечного ($N=4$) сигнала, представленного совокупностью из четырех отсчетов $s[k]$, $k=0, 1, 2, 3$, когда дискретное преобразование Уолша

$$\mathrm{S}[n]=\sum_{k=0}^{3} s[k]\,\mathrm{wal}(n, k), \quad n=0, 1, 2, 3. \qquad (14.25)$$

Составим следующую таблицу:

	$s[0]$	$s[1]$	$s[2]$	$s[3]$
wal(0, k)	+	+	+	+
wal(1, k)	+	+	—	—
wal(2, k)	+	—	—	+
wal(3, k)	+	—	+	—

Значения функции wal(n, k) в (14.25) при соответствующих n и k, равные ± 1, заменены знаками плюс и минус [при упорядочении по Уолшу (см. § 14.3)].

Развернутые выражения для спектральных коэффициентов S[n], $n=0, 1, 2, 3$, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}[0]&=s[0]+s[1]+s[2]+s[3]=(s[0]+s[1])+(s[2]+s[3]),\\
\mathrm{S}[1]&=s[0]+s[1]-s[2]-s[3]=(s[0]+s[1])-(s[2]+s[3]),\\
\mathrm{S}[2]&=s[0]-s[1]-s[2]+s[3]=(s[0]-s[1])+(s[3]-s[2]),\\
\mathrm{S}[3]&=s[0]-s[1]+s[2]-s[3]=(s[0]-s[1])-(s[3]-s[2]).
\end{aligned} \qquad (14.26)$$

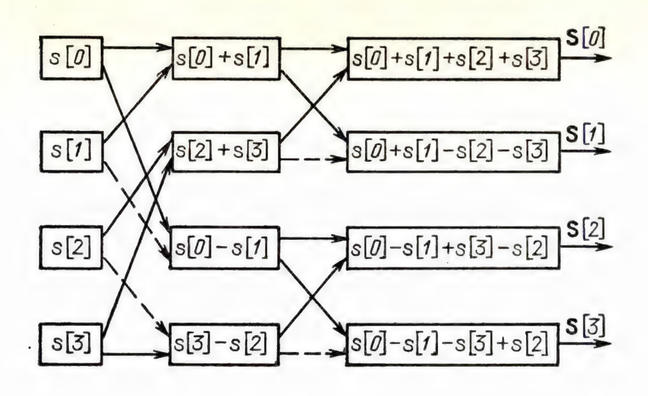


Рис. 14.8

```
      SUBROUTINE WFWT(NN,N,X,Y,IR)
C     ******************************************************
C     ПРОГРАММА БПУ В УПОРЯДОЧЕНИИ ПЭЛИ
C     NN-ЭЕО ЧИСЛО ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ,
C     РАВНОЕ 2 В СТЕПЕНИ N, (РАЗМЕР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ)
C     X-МАССИВ ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ, ПОСЛЕ
C     ВЫПОЛНЕНИЯ СОДЕРЖИМОЕ МАССИВА НЕ СОХРАНЯЕТСЯ
C     Y-МАССИВ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
C     IR=1 ДЛЯ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША
C     IR=2 ДЛЯ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША
C     ******************************************************
      DIMENSION X(NN),Y(NN)
      NN1=NN-1
      KP=NN/2
      M=NN
      DO 1 K=1,N
      MM=M
      M=M/2
      M1=M-1
      KL=1
      DO 2 J=1,NN,MM
      DO 2 I=1,M
      Y(KL)=X(I*J-1)+X(I+J+M-1)
      KL=KL+1
2     CONTINUE
      DO 3 I=1,NN
3     X(I)=Y(I)
1     CONTINUE
      IF(IR.EQ.1) GO TO 4
      GO TO 6
4     DO 5 I=1,NN
7     Y(I)=Y(I)/NN
6     CONTINUE
      RETURN
      END
```

Очевидно, что повторяющиеся слагаемые нецелесообразно вычислять для каждого n отдельно. Это обстоятельство учтено на графе (рис. 14.8).

Аналогичные результаты получаются при использовании функций Уолша, упорядоченных по Пэли и Адамару.

Число операций сложения, требующихся для дискретного преобразования Уолша по алгоритму (14.26), равно $(N-1)N \approx \approx N^2$ (при $N \gg 1$), а по алгоритму БПУ равно Nr (имеется в виду условие $N=2^r$ — целое число). Как и в случае БПФ (см. § 12.12), сокращение числа операций достигает $N/\log_2 N = N/r$.

Напомним отмеченное в предыдущем параграфе основное преимущество ДПУ перед ДПФ, обусловленное исключением в нем операций умножения.

Программа вычисления прямого и обратного преобразований Уолша в упорядочении Уолша приведена на с. 423, а в упорядочении Пэли — на с. 422.

```
      SUBROUTINE WFWT(NN,N,X,Y,IR)
C     ****************************************************
C     ПРОГРАММА БПУ В УПОРЯДОЧЕНИИ УОЛША
C     NN-ЧИСЛО ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ,
C     РАВНОЕ 2 В СТЕПЕНИ N,
C     X-МАССИВ ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ, ПОСЛЕ
C     ВЫПОЛНЕНИЯ СОДЕРЖИМОЕ МАССИВА НЕ СОХРАНЯЕТСЯ
C     Y-МАССИВ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
C     IR=1 ДЛЯ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША
C     IR=2 ДЛЯ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША
C     ****************************************************
      DIMENSION X(NN),Y(NN)
      NN1=NN-1
      M=NN
      DO 1 K=1,N
      MM=M
      M=M/2
      M1=M-1
      DO 2 J=1,NN,MM
      VZ=-1
      DO 3 I=1,M
      VZ=-VZ
      Y(I+J-1)=X(2*I+J-2)+X(2*I+J-1)
    3 Y(I+J+M-1)=VZ*(X(2*I+J-2)-X(2*I+J-1))
    2 CONTINUE
      DO 4 I=1,NN
    4 X(I)=Y(I)
    1 CONTINUE
      IF(IR.TQ.1) GO TO 5
      GO TO 6
    5 DO 7 I=1,NN
    7 Y(I)=Y(I)/NN
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
```

14.6. ДВУМЕРНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША

В предыдущих главах рассматривались одномерные дискретные сигналы $s[k]$, являющиеся функцией единственной переменной k. Однако в природе существуют двумерные и в общем случае многомерные сигналы.

Двумерный сигнал $s[k, l]$ представлен на рис. 14.9. Функция $s[k, l]$ может характеризовать, например, распределение освещенности на поверхности по двум пространственным координатам k и l.

Двумерный сигнал можно подвергнуть двумерному спектральному анализу. Для этого сигнал $s[k, l]$ нужно преобразовать в двумерный спектр $\mathbf{S}[n, m]$ по системе двумерных базисных функций $\varphi_{n,m}(k, l)$. В качестве последних могут быть использованы двумерные дискретные функции Уолша, имеющие вид

$$\varphi_{m,n}(k, l) = \text{wal}\,(n, k)\,\text{wal}\,(m, l)$$

[в силу мультипликативности функций Уолша, см. (14.10)].

Тогда преобразования

$$\mathbf{S}[n, m] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} s\,[k, l]\,\text{wal}\,(n, k)\,\text{wal}\,(m, l),$$

$$n,\ m = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (14.27)$$

$$s\,[k, l] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{S}\,[n, m]\,\text{wal}\,(n, k)\,\text{wal}\,(m, l),$$

$$k,\ l = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (14.28)$$

определят пару двумерных дискретных преобразований Уолша. Эти преобразования обладают теми же свойствами, что и одномерное ДПУ. Как следует из (14.27) и (14.28), а также из § 14.4, для вычисления двумерного ДПУ требуется затратить N^4 операций сложения. Перепишем выражение (14.27) в форме

$$\mathbf{S}\,[n, m] = \sum_{k=0}^{N-1} \text{wal}\,(n, k) \sum_{l=0}^{N-1} s\,[k, l]\,\text{wal}\,(m, l). \qquad (14.29)$$

Внутренняя сумма

$$\mathbf{S}_{\text{стр}}\,[k, m] = \sum_{l=0}^{N-1} s\,[k, l]\,\text{wal}\,(m, l) \qquad (14.30)$$

представляет собой двумерную функцию, каждая строка которой есть не что иное, как одномерное ДПУ строки k сигнала $s[k, l]$, представленного на рис. 14.9. В результате вычисления ДПУ по всем строкам k получим спектр $\mathbf{S}_{\text{стр}}[k, m]$; на этом заканчивается первый этап вычислений, схематически показанный в нижней части рис. 14.10.

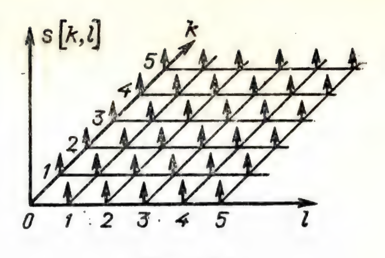


Рис. 14.9

Далее запишем выражение (14.29) с учетом обозначений, принятых в (14.30):

$$\mathbf{S}[n, m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{S}_{\text{стр}}[k, m] \operatorname{wal}(n, k). \tag{14.31}$$

Из этого выражения видно, что искомый двумерный дискретный спектр Уолша $\mathbf{S}[n, m]$ — это двумерная функция, каждый столбец которой есть одномерное ДПУ $\mathbf{S}_{\text{стр}}[k, m]$, вычисленное на первом этапе. Определив $\mathbf{S}_{\text{стр}}[k, m]$ для всех значений k найдем $\mathbf{S}[n, m]$. На этом заканчивается второй этап построчно-столбцового метода вычисления двумерного ДПУ (рис.

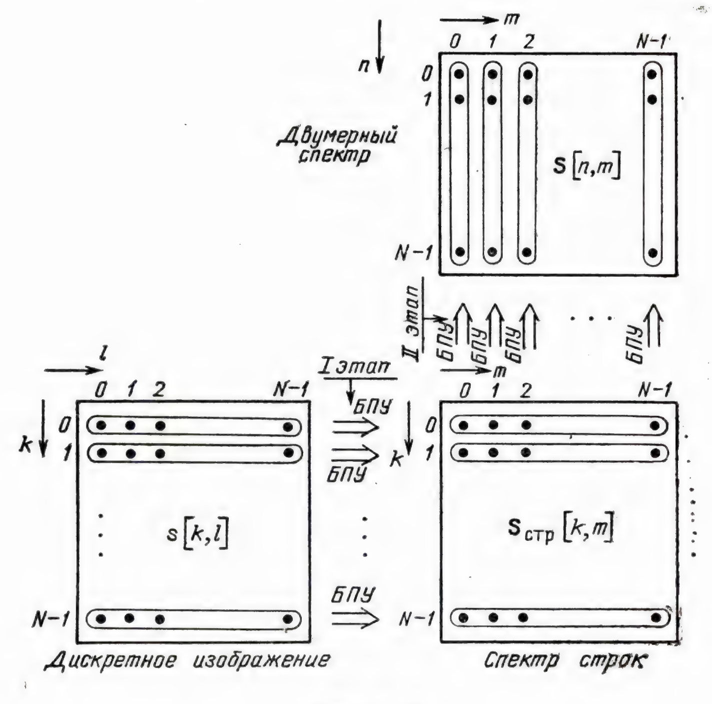


Рис. 14.10



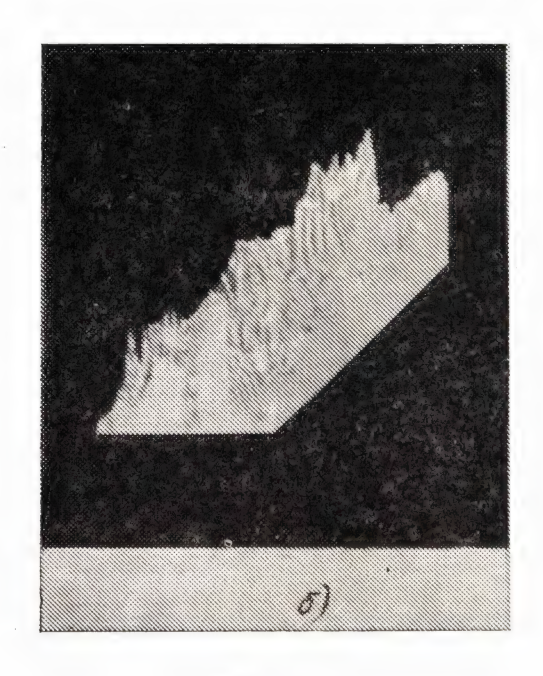


Рис. 14.11

14.10). Очевидно, что при вычислении ДПУ на обоих этапах можно применить алгоритм БПУ, описанный в предыдущем параграфе. На рис. 14.10 вместо ДПУ обозначено БПУ. Общее число операций сложения при этом требуется $2N^2 \log N$ вместо N^4 при прямом методе.

Обратное двумерное ДПУ (14.28) симметрично прямому (14.27) и, следовательно, может быть вычислено тем же быстрым методом, но в обратном порядке: на первом этапе выполняется обратное БПУ столбцов, а на втором этапе — БПУ строк.

Проиллюстрируем эффективность применения функций Уолша для передачи изображений по цифровому каналу связи на следующем примере.

Пусть исходное изображение, подлежащее передаче, представляет собой черно-белое фото (рис. 14.11, *а*). Это непрерывное изображение для последующей цифровой обработки подвергалось дискретизации, в результате чего был получен двумерный дискретный сигнал $s[k, l]$, содержащий 256×256 отсчетов (k, $l=0, 1, \ldots, 255$), каждый из которых может принимать одно из 256 значений (т. е. $s[k, l]=0, 1, \ldots, 255$). Этот двумерный сигнал представлен на рис. 14.11, *б*. Уровень 255 соответствует самому яркому (белому) участку изображения, а уровень 0 — самому темному (черному) участку. Для

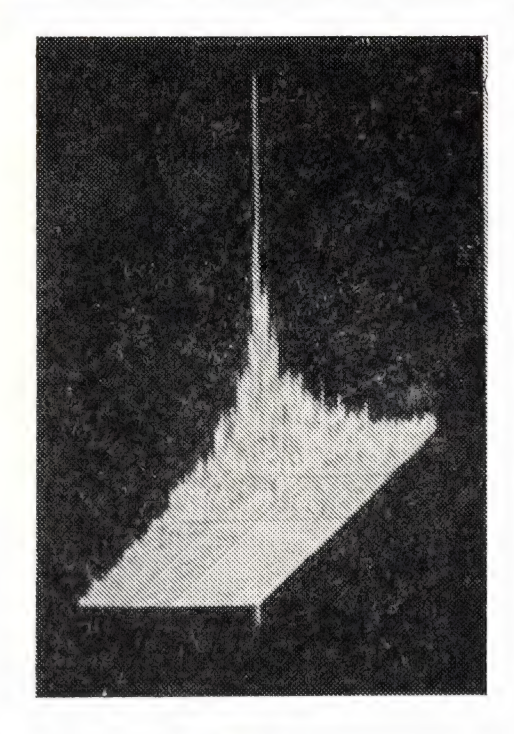


Рис. 14.12

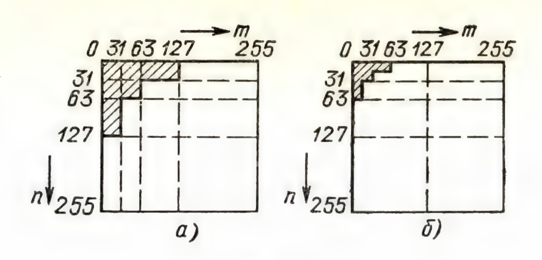


Рис. 14.13

передачи такого числа уровней необходимо каждый отсчет $s[k, l]$ представить восьмиразрядным двоичным кодом. Это означает, что в исходном изображении информационные затраты достигают 8 бит на отсчет.

Для уменьшения этих затрат подвергнем исходное изображение двумерному преобразованию Уолша с помощью ЭВМ и выясним, можно ли существенно ограничить спектр изображения ценою некоторого, приемлемого, ухудшения его качества.

Двумерный спектр $\mathbf{S}[n, m]$ исходного сообщения представлен на рис. 14.12 (в упорядочении Пэли). На этом рисунке начало координат находится в левом верхнем углу. Видно, что двумерный спектр $|\mathbf{S}[n, m]|$ размером $N \times N = 256 \times 256$ сконцентрирован в начале координат.



Рис. 14.14

Для сокращения информационного потока целесообразно передавать через канал связи не весь спектр, а лишь его наиболее интенсивную часть. На рис. 14.13, *а* эта часть пространственного спектра заштрихована. На приемной стороне непереданные спектральные компоненты заменялись нулями, после чего осуществлялось обратное двумерное ДПУ, восстанавливающее передаваемое изображение.

Это изображение (рис. 14.14), несущественно отличающееся от исходного, потребовало для передачи в 8 раз меньше информационных затрат (1 бит на отсчет).

Если площадь передаваемого спектра уменьшить еще в 4 раза (рис. 14.13, *б*) и тем самым снизить затраты до 0,25 бит на отсчет, то получится изображение, представленное на рис. 14.15. При этом проявляются дефекты изображения в виде прямоугольных клеток, обусловленных прямоугольностью функций Уолша. Размеры этих клеток определяются граничной частотой отсекаемого спектра.

Следует указать, что весьма большое число отсчетов $s[k, l]$, равное 256×256, выбрано в данном примере для достижения наглядности промежуточных результатов обработки. На практике используются различные приемы упрощения обработки: разбиение изображения на фрагменты с небольшим числом отсчетов (например, 16×16), адаптация алгоритма обработки к специфике передаваемого изображения и др.



Рис. 14.15

Глава 15. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

15.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопросы общей теории синтеза электрических цепей не входят в задачу этой книги.

В данной главе рассматриваются лишь некоторые частные вопросы, актуальные для синтеза современных радиоэлектронных устройств обработки сигналов:

синтез безындуктивных четырехполюсников в виде каскадного соединения элементарных, невзаимодействующих (развязанных) цепей первого или второго порядка (интегральные микросхемы);

синтез цифровых фильтров по аналоговому прототипу;

связь между АЧХ и ФЧХ в аналоговых и цифровых фильтрах (минимально-фазовые цепи).

Известно, что передаточная функция линейного четырехполюсника однозначно определяется своими нулями и полюсами на p-плоскости (аналоговые цепи) или на z-плоскости (цифровые цепи). Поэтому выражение «синтез по заданной передаточной функции» эквивалентно выражению «синтез по заданным нулям и полюсам передаточной функции». Теория синтеза четырехполюсников рассматривает цепи, передаточная функция которых имеет конечное число нулей и полюсов, т. е. цепи, состоящие из конечного числа звеньев с сосредоточенными параметрами.

Общее выражение передаточной функции аналогового четырехполюсника запишем в форме (5.45)

$$\mathbf{K}(p)=B\frac{(p-p_{01})(p-p_{02})\ldots(p-p_{0n})}{(p-p_{\text{п}1})(p-p_{\text{п}2})\ldots(p-p_{\text{п}m})},\quad n\leqslant m. \qquad (15.1)$$

Чтобы рациональная дробь (15.1) являлась передаточной функцией физического четырехполюсника, степень числителя n не должна превышать степень знаменателя m.

Общим требованием к передаточной функции $\mathbf{K}(p)$ любого четырехполюсника, вытекающим из условия устойчивости, является отсутствие полюсов в правой p-полуплоскости (см. § 5.6).

Нули и полюсы могут быть вещественными или комплексными. В последнем случае образуются комплексно-сопряженные пары нулей или полюсов. В отличие от полюсов нули передаточной функции могут быть расположены как в левой, так и в правой p-полуплоскости. Четырехполюсники с нулями пере-

даточной функции в правой полуплоскости обладают существенными особенностями, рассматриваемыми в § 15.6.

Излагаемый ниже материал ориентирован на чытерехполюсники с небольшим числом звеньев, которые характерны для фильтров нижних частот и верхних частот, полосовых или заградительных фильтров и т. д., широко применяемых в радиоэлектронных устройствах.

В дальнейшем передаточную функцию многозвенного фильтра будем записывать в форме

$$\mathbf{K}(p) = B\frac{p-p_{01}}{p-p_{\text{п}1}}\frac{p-p_{02}}{p-p_{\text{п}2}}\cdots\frac{p-p_{0n}}{p-p_{\text{п}n}} =$$

$$= B\mathbf{K}_1(p)\,\mathbf{K}_2(p)\,\ldots\,K_n(p), \qquad (15.2)$$

где $\mathbf{K}_m(p)$ — передаточная функция m-го звена (не выше второго порядка).

Трактовка выражения (15.2) как передаточной функции каскадного соединения взаимно независимых четырехполюсников позволяет свести задачу синтеза сложного четырехполюсника к синтезу простых звеньев. Увеличение числа нулей и полюсов в передаточной функции приводит лишь к соответствующему увеличению числа звеньев. Естественно, такой подход имеет смысл и допустим лишь при достаточной развязке элементарных четырехполюсников. Применение эмиттерных повторителей и некоторых других устройств современной микроэлектронной техники обеспечивает выполнение этого требования. В тех случаях, когда нельзя пренебрегать взаимным влиянием элементарных четырехполюсников, приходится прибегать к более сложным методам синтеза, излагаемым в специальной литературе.

Цифровые фильтры, как и аналоговые, обычно синтезируются на основе передаточной функции, представленной в виде рациональной дроби (12.26). В результате соответствующей аппроксимации заданной передаточной функции $\hat{\mathbf{K}}(z)$ определяется положение нулей и полюсов на z-плоскости, после чего находятся весовые коэффициенты a_n и b_n, входящие в (12.27).

Цифровой фильтр можно реализовать в виде совокупности простых звеньев (первого или второго порядка) либо в виде канонической схемы, описанной в § 12.3 (см. рис. 12.6).

При разбиении фильтра на простые звенья отпадают все ограничения, отмеченные в § 15.1 по отношению к аналоговым цепям. В цифровых цепях вопросы согласования входных, выходных и нагрузочных сопротивлений, а также вопросы развязки отдельных звеньев вообще не возникают. В связи с этим наряду с каскадным (последовательным) соединением простых звеньев широко применяется их параллельное включение. Этот вопрос рассматривается в § 15.4.

15.2. РЕАЛИЗАЦИЯ БЕЗЫНДУКТИВНОЙ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В интегральных микросхемах, не допускающих применения катушек индуктивности, цепь второго порядка реализуется с помощью активной RC-цепи. Один из возможных вариантов такой цепи представлен на рис. 15.1, *а*. Свойства этой цепи обусловлены применением операционного усилителя K_0 и обратной связи. Усилитель в рассматриваемой схеме должен обеспечить небольшое усиление (не более нескольких единиц). Основные требования к усилителю — очень большое входное и близкое к нулю выходное сопротивления, а также отсутствие обратной реакции. При выполнении этих требований усилитель можно рассматривать как идеальный источник напряжения (управляемый напряжением), что позволяет при определении токов и напряжений в схеме на рис. 15.1, *а* считать точки *а* и *б* разомкнутыми, а напряжение на выходе приравнивать величине $K_0U_{C_2}$, где U_{C_2} — напряжение на конденсаторе C_2. Эти допущения приводят к эквивалентной схеме на рис. 15.1, *б*, на которой усилитель K_0 опущен, а его влияние учтено тем, что напряжение на конденсаторе C_2 связано с выходным напряжением соотношением $\mathbf{U}_{C_2}=\mathbf{E}_2/K_0$.

Используя общие уравнения четырехполюсника (5.4) для схемы на рис. 15.1, *б* и учитывая дополнительное условие $\mathbf{E}_2=K_0(\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2)/C_2p$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1&=Z_{11}\mathbf{I}_1+Z_{12}\mathbf{I}_2,\\ \mathbf{E}_2&=Z_{21}\mathbf{I}_1+Z_{22}\mathbf{I}_2=K_0(\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2)/C_2p.\end{aligned} \tag{15.3}$$

Здесь

$$Z_{11}=R_1+R_2+1/C_2p;\ Z_{12}=R_2+1/C_2p;$$

$$Z_{21}=R_2+1/C_2p;\ Z_{22}=R_2+1/C_1p+1/C_2p.$$

Исключив ток $\mathbf{I}_2$ из первого уравнения (15.3), после несложных преобразований получим выражение для передаточной функции четырехполюсника

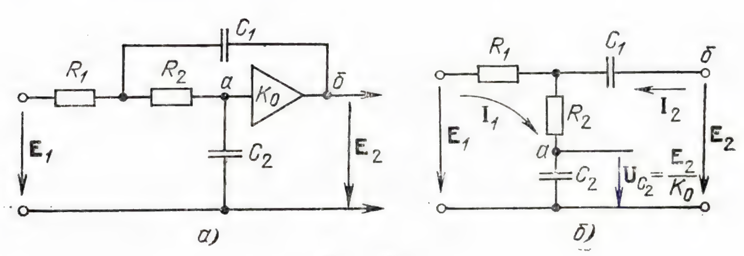


Рис. 15.1

$$\mathbf{K}(p)=\mathbf{E}_2/\mathbf{E}_1=\frac{K_0/R_2C_2}{C_1R_1p^2+\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_1R_1}{C_2R_2}-K_0\frac{C_1R_1}{C_2R_2}\right)p+\frac{1}{C_2R_2}}=$$

$$=\frac{K_0/C_1C_2R_1R_2}{p^2+(1/C_1R_1+1/C_1R_2+1/C_2R_2-K_0/C_2R_2)\,p+1/C_1C_2R_1R_2}=$$

$$=1/(p_x^2+b_1p_x+b_2), \qquad (15.4)$$

где $p_x=p/\omega_c$ — частота, нормированная относительно частоты среза АЧХ фильтра.

Дальнейшая задача синтеза сводится к подбору резисторов, конденсаторов и K_0, обеспечивающих требуемые значения коэффициентов b_1 и b_2 полинома в знаменателе (15.4):

$$b_1=\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}-\frac{K_0}{R_2C_2},\quad b_2=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}. \qquad (15.5)$$

Из первого равенства можно получить следующее выражение для требуемого коэффициента усиления:

$$K_0=1+C_2/C_1+R_1C_2/R_1C_1-b_1R_2C_2. \qquad (15.6)$$

15.3. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

При реализации цифрового фильтра в виде последовательного соединения простых звеньев (первого или второго порядка) заданная передаточная функция $\hat{\mathbf{K}}(z)$ записывается в форме, аналогичной (12.12).

При реализации фильтра в виде параллельного включения простых звеньев эта функция разлагается на простые дроби

$$\hat{\mathbf{K}}(z)=A_0\frac{P(z)}{Q(z)}=A_0\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{z-z_{\text{п}k}},$$

где $A_k=\left[\frac{P(z)}{dQ(z)/dz}\right]_{z=z_{\text{п}k}}$ — вычет функции $\hat{\mathbf{K}}(z)/A_0$ в полюсе $z_{\text{п}k}$.

Если знаменатель $Q(z)$ содерижт всего m корней, из которых m_1 — число вещественных (лежащих на действительной оси), а m_2 — число комплексно-сопряженных пар корней ($m=m_1+2m_2$), то

$$\hat{\mathbf{K}}(z)=A_0\left[\sum_{k=1}^{m_1}\frac{A_k}{z-z_{\text{п}k}}+\sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}\left(\frac{A_k}{z-z_{\text{п}k}}+\frac{A_k^*}{z-z_{\text{п}k}^*}\right)\right].$$

Это выражение легко приводится к виду

$$\hat{K}(z)=A_0\left[\sum_{k=1}^{m_1}\frac{A_k}{z-z_{\text{п}k}}+\sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}\frac{a_{0k}z+a_{1k}}{z^2-b_{1k}z-b_{2k}}\right],$$

где $a_{0k}=2\,\text{Re}\,(A_k)$; $a_{1k}=-2\,[\text{Re}\,(z_{\text{п}k})\,\text{Re}\,(A_k)+\text{Im}\,(z_{\text{п}k})\,\text{Im}\,(A_k)]$; $b_{1k}=2\,\text{Re}\,(z_{\text{п}k})$; $b_{2k}=-|z_{\text{п}k}|^2$.

Как в каскадной, так и в параллельной схеме отдельные звенья реализуются по схеме, описанной в § 12.6 (см. рис. 12.12). Весовые коэффициенты звена второго порядка определяются по формуле (12.43), а звена первого порядка — непосредственно из передаточной функции звена $[\hat{K}(z)=1/(1-b_1z^{-1})]$.

Существенно различны подходы к синтезу трансверсальных и рекурсивных фильтров.

В § 12.2 отмечалось, что импульсная характеристика трансверсального фильтра является ограниченной последовательностью $\{g(k)\}$, $k=0, 1, \ldots, H$, содержащей $N=H+1$ отсчетов, где H — число элементов памяти, а значения $g(k)$ равны весовым коэффициентам фильтра a_k. Из этого следует, что задание импульсной характеристики $g(k)$ непосредственно определяет как структуру трансверсального фильтра, так и его передаточную функцию $\hat{K}(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_Hz^{-H}$.

В случае же рекурсивного фильтра структура и весовые коэффициенты более сложным образом связаны с импульсной характеристикой и передаточной функцией. Эти вопросы рассматриваются в следующем параграфе.

15.4. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО АНАЛОГОВОМУ ПРОТОТИПУ

Пусть задан аналоговый фильтр с передаточной функцией $\mathbf{K}_a(i\omega)$ и импульсной характеристикой $g_a(t)$ и требуется построить эквивалентный ему (в определенном смысле) цифровой фильтр.

Рассмотрим физически наглядный, хотя не во всех задачах эффективный, способ, который основан на дискретизации дифференциального уравнения, описывающего исходную аналоговую цепь.

Для сокращения выкладок обратимся к простейшему четырехполюснику, представленному на рис. 15.2. Передаточная функция и импульсная характеристика этого четырехполюсника

$$\mathbf{K}_a(p)=1/(1+RCp),\ g_a(t)=1/\tau\ e^{-t/\tau}, \tag{15.7}$$

соответственно

$$K_a(\omega)=1/\sqrt{1+(R\omega C)^2},\quad g_a(t)=(1/RC)e^{-t/RC}. \tag{15.7'}$$

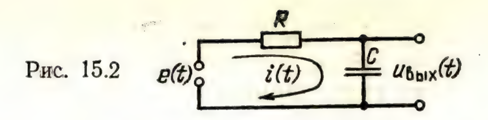


Рис. 15.2

Выпишем основные соотношения между $e(t)$, $u_{вых}(t)$ и $i(t)$:

$$i(t)=C\frac{du_{вых}(t)}{dt},\quad u_{вых}(t)=e(t)-Ri(t)=e(t)-RC\frac{du_{вых}(t)}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи

$$\frac{du_{вых}(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_{вых}(t)=\frac{1}{RC}e(t). \qquad (15.8)$$

Для перехода от дифференциального уравнения к эквивалентному ему разностному уравнению воспользуемся определением производной

$$\frac{du_{вых}(t)}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{u_{вых}(t)-u_{вых}(t-T)}{T}.$$

Не переходя к пределу, выбираем произвольную конечную величину T исходя лишь из условия $T\ll RC=\tau$ и подставляем в (15.8) вместо $du_{вых}(t)/dt$ дробь $[u_{вых}(t)-u_{вых}(t-T)]/T$. Тогда $u_{вых}(t)-u_{вых}(t-T)+(T/\tau)u_{вых}(t)=(T/\tau)e(t)$, или $(1+T/\tau)u_{вых}(t)=(T/\tau)e(t)+u_{вых}(t-T)$.

Перейдя к дискретному времени $t=mT$, перепишем последнее выражение в форме

$$u_{вых}(mT)=\frac{T}{\tau+T}e(mT)+\frac{\tau}{\tau+T}u_{вых}(mT-T). \qquad (15.9)$$

Введя обозначения $T/(\tau+T)=a_0$, $\tau/(\tau+T)=b_1$ и опустив T в аргументах функций $e(mT)$ и $u_{вых}(mT-T)$, придем к выражению

$$u_{вых}[m]=a_0e[m]+b_1u_{вых}[m-1], \qquad (15.10)$$

имеющему смысл разностного уравнения рекурсивного фильтра первого порядка, соответствующего условиям (15.7).

Передаточная функция и импульсная характеристика этого фильтра $\mathbf{K}_T(p)=\dfrac{a_0}{1-b_1e^{-pT}}$, $g[k]=a_0b_1{}^k$.

На оси частот

$$K_T(\omega)=\frac{a_0}{|1-b_1e^{-i\omega T}|}=\frac{a_0}{\sqrt{1+b_1{}^2-2b_1\cos\omega T}}. \qquad (15.11)$$

При уменьшении шага дискретизации T до значения, малого по сравнению с τ, аргумент косинуса ωT в области частот, соизмеримых с $1/\tau$, отвечает условию $\omega T\ll 1$, так что $\cos\omega T\approx\approx 1-(\omega T)^2/2$. При этом

$$K_T^2(\omega)\approx\frac{(T/\tau)^2}{(T/\tau^2)+(\omega T)^2+\frac{T}{\tau}(\omega T)^2}=\frac{1}{1+(\omega\tau)^2+\frac{T}{\tau}(\omega\tau)^2}.$$

С помощью этого выражения легко оценить влияние T на отклонение $K_T(\omega)$ от $K_a(\omega)$. При $T/\tau \leqslant 0{,}2$ это выражение несущественно отличается от $K_a^2(\omega)$.

Сравним импульсные характеристики $g(kT)$ и $g_a(t)$. При $T/\tau \ll 1$ можно положить $b_1 = 1/(1+T/\tau) \approx (1-T/\tau) \approx e^{-T/\tau}$. Тогда $g(kT) = a_0 b_1^k \approx a_0 e^{-kT/\tau}$, т. е. $g(kT)$ отличается от $g_a(kT)$ только постоянным коэффициентом (a_0 вместо $1/\tau$).

Итак, для удовлетворительного совпадения характеристик цифрового и аналогового фильтров в данном примере требуется выполнение условия $T/\tau < 0{,}2$.

При более сложных цепях синтез, основанный на дискретизации дифференциального уравнения, становится громоздким. Более эффективен способ синтеза цифровых фильтров по заданным полюсам и нулям передаточной функции $\mathbf{K}_a(p)$ аналогового прототипа на p-плоскости. Задача синтеза при этом сводится к рациональному выбору оператора преобразования p-плоскости в z-плоскость. От выбранного оператора зависят свойства и характеристики цифрового фильтра.

Наиболее простым оператором преобразования является соотношение $z = e^{pT}$, использованное в гл. 12. В этом случае полюсы $z_{\text{п}m}$ и нули z_{0n} определяются равенствами

$$z_{\text{п}m} = e^{p_{\text{п}m}T}, \quad z_{0n} = e^{p_{0n}T}. \tag{15.12}$$

Метод, основанный на операторе $z = e^{pT}$, иногда называют *методом стандартного z-преобразования*.

Выясним степень приближения характеристик синтезируемого цифрового фильтра к аналоговой модели на примере рассмотренного выше четырехполюсника (рис. 15.2). Передаточная функция $\mathbf{K}_a(p)$, определяемая выражением (15.7), имеет один полюс $p_{\text{п}} = -1/RC = -1/\tau$.

Основываясь на (15.12), находим полюс на z-плоскости

$$z_{\text{п}} = e^{p_{\text{п}}T} = e^{-T/\tau} = e^{-T/RC}.$$

Тогда

$$\hat{\mathrm{K}}(z) = 1/(1 - z_{\text{п}} z^{-1}) = 1/(1 - e^{-T/RC} z^{-1}),$$

$$\hat{\mathrm{K}}(e^{i\omega T}) = 1/(1 - e^{-T/\tau} e^{-i\omega T}) \tag{15.13}$$

и АЧХ фильтра

$$|\mathbf{K}(\omega)| = 1/\sqrt{1 + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau}\cos\omega T}. \tag{15.14}$$

Далее, импульсная характеристика $g(kT) = b_1^k = e^{-kT/\tau}$. Замечаем, что $g(kT)$ совпадает (с точностью до постоянного коэффициента $1/\tau$) с импульсной характеристикой $g_a(t) = (1/\tau)e^{-t/\tau}$, дискретизованной с шагом T, причем это совпадение не зависит от T (в отличие от метода, основанного на дискретизации дифференциального уравнения цепи).

Аналогичный результат имеет место и для более сложных цепей.

В связи с этим метод синтеза, основанный на стандартном преобразовании $z=e^{pt}$, получил название метода, инвариантного относительно импульсной характеристики. При этом, однако, АЧХ цифрового фильтра может существенно отличаться от АЧХ аналогового прототипа.

15.5. МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для осуществления синтеза, инвариантного по отношению к АЧХ, следует применить преобразование, при котором вся мнимая ось $i\omega$ p-плоскости отображалась бы на z-плоскости одним обходом окружности радиуса $|z|=1$.

Этому требованию отвечает билинейное (дробно-рациональное) преобразование

$$z=(1+p)/(1-p),\ \ p=(z-1)/(z+1), \qquad (15.15)$$

где $p=(\sigma+i\omega)/\Omega_0$; Ω_0 — произвольная постоянная, обеспечивающая безразмерность величины p и выбираемая исходя из соображений нормирования.

Для уяснения смысла билинейного преобразования положим $\sigma=0$, т. е. приравняем $p=i\omega/\Omega_0$, и на основании (15.15) запишем

$$z|_{p=i\omega/\Omega_0}=\frac{1+i\omega/\Omega_0}{1-i\omega/\Omega_0}=e^{i2\,\mathrm{arctg}\,\omega/\Omega_0}=e^{i\varphi(\omega/\Omega_0)}. \qquad (15.16)$$

Из этого выражения следует: перемещению точки p вдоль оси $i\omega/\Omega_0$ соответствует перемещение z по окружности радиуса $|z|=1$. В этом отношении билинейное преобразование не отличается от обычного z-преобразования, при котором $z|_{p=i\omega}=e^{i\omega T}$ (см. п. 12.5.1). Отличие в том, что угол ωT возрастает пропорционально частоте ω, а при билинейном преобразовании угол $\varphi(\omega/\Omega_0)=2\mathrm{arctg}\,\omega/\Omega_0$ возрастает нелинейно; при стремлении $\omega\to\pm\infty$ угол $\varphi(\omega/\Omega_0)$ стремится к своим предельным значениям $\pm\pi$. Таким образом, вся ось $i\omega/\Omega_0$ p-плоскости трансформируется на z-плоскости в один обход окружности $|z|=1$ и тем самым обеспечивается взаимно однозначное отображение p на z для всей p-плоскости.

Сопоставление функций $e^{i\varphi(\omega/\Omega_0)}$ и $e^{i\omega T}$ позволяет трактовать $\varphi(\omega/\Omega_0)=2\mathrm{arctg}\,\omega/\Omega_0$ как эквивалентную частоту $\omega_ц T$ (безразмерную), связанную с обычной частотой ω, используемой при анализе и синтезе аналоговых цепей, соотношением

$$\omega_ц T=2\mathrm{arctg}(\omega/\Omega_0). \qquad (15.17)$$

Соответственно

$$\omega/\Omega_0=\mathrm{tg}(\omega_ц T/2). \qquad (15.18)$$

Нормирующую частоту Ω_0 можно определить, установив соотношение между какими-либо характерными частотами пере-

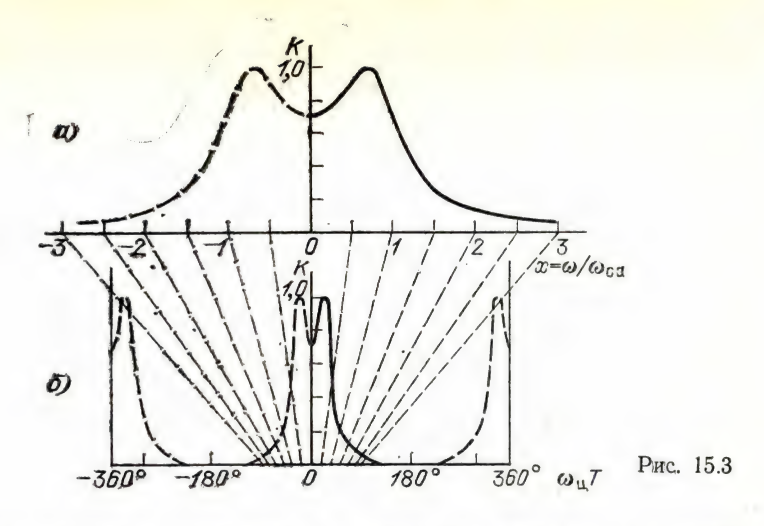


Рис. 15.3

даточных функций аналоговой и цифровой цепей. Например, если речь идет о цифровом ФНЧ с заданной частотой среза $\omega_{сц}$, эквивалентном (в смысле АЧХ) аналоговому фильтру с частотой среза $\omega_с$, то выражения (15.17), (15.18) можно записать так:

$$\omega_{сц}T = 2\mathrm{arctg}(\omega_{са}/\Omega_0), \quad \omega_{са}/\Omega_0 = \mathrm{tg}(\omega_{сц}T/2). \qquad (15.19)$$

Из последнего выражения следует, что $\Omega_0 = \omega_{са}/\mathrm{tg}(\omega_{сц}T/2)$.

Пусть, например, частота среза АЧХ цифрового фильтра должна составлять 10% от частоты дискретизации $1/T$.

Тогда $\omega_{сц}T = 0{,}1 \cdot 2\pi$ и $\mathrm{tg}\ (\omega_{сц}T/2) = \mathrm{tg}\ (0{,}1\pi) \approx 0{,}3249$,

а выражение (15.17) переходит в

$$\omega_ц T = 2\ \mathrm{arctg}\ [\mathrm{tg}\ \omega_{сц}T/2)\,\omega/\omega_{са}] = 2\ \mathrm{arctg}(0{,}3249x), \qquad (15.20)$$

где $x = \omega/\omega_{са}$ — частота, нормированная относительно частоты среза АЧХ аналогового фильтра.

Полученное соотношение между $\omega_ц T$ и x позволяет построить АЧХ синтезируемого цифрового фильтра по заданной АЧХ исходного аналогового фильтра. На рис. 15.3 сопоставлены подобные характеристики для фильтра Чебышева второго порядка. Видно, что АЧХ цифрового фильтра, сохраняя масштаб по оси ординат, сжимается по оси абсцисс в пределах $-\pi < \omega T < \pi$ [3].

Основываясь на выражениях (15.2) и (15.4), следует определить полюсы передаточной функции $\mathbf{K}_a(p)$ аналогового прототипа, после чего по формуле (15.16) можно вычислить полюсы функции $\hat{\mathbf{K}}(z)$. Методика определения структуры и весовых коэффициентов синтезируемого фильтра по заданным полюсам и нулям функции $\hat{\mathbf{K}}(z)$ изложена в [3].

15.6. СВЯЗЬ МЕЖДУ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ И ФАЗОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

При обработке сигналов часто возникает необходимость в подборе оптимальных в определенном смысле АЧХ и ФЧХ линейной цепи. Возникает вопрос, можно ли управлять одной из них, не изменяя другую, или между ними имеется однозначное соответствие.

Вопрос сводится к установлению связи между модулем и аргументом комплексной функции $\mathbf{K}(p)$. Задача эта весьма сложна. Значительно более простой задачей является установление связи между действительной и мнимой частями функции $\mathbf{K}(p)$. Поэтому целесообразно вместо функции $\mathbf{K}(p)$ рассматривать функцию $\theta(p) = \ln \mathbf{K}(p)$. На оси частот эта новая функция принимает вид

$$\theta(i\omega) = \ln \mathbf{K}(i\omega) = \ln[K(\omega)\,e^{i\varphi(\omega)}] = \ln K(\omega) + i\varphi(\omega) = A(\omega) + i\varphi(\omega). \quad (15.21)$$

Очевидны равенства

$$A(\omega) = \ln K(\omega), \quad K(\omega) = e^{A(\omega)}. \quad (15.22)$$

Действительная часть функции $\theta(i\omega)$, т. е. $A(\omega)$, называется логарифмическим затуханием четырехполюсника.

После перехода от функции $\mathbf{K}(i\omega)$ к функции $\theta(i\omega)$ задача сводится к установлению связи между $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Для этого воспользуемся выражением, аналогичным (2.112), при замене подынтегральной функции $\mathbf{S}_T(p)e^{pt}$ на $\theta(p)/(p - i\omega_1)$, где ω_1 — фиксированная частота. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \frac{\theta(p)}{p - i\omega_1}\,dp = \frac{1}{2}\theta(i\omega_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\omega}^{i\omega} \frac{\theta(i\omega)}{i\omega - i\omega_1}\,d(i\omega),$$

$$c > 0. \quad (15.23)$$

Наложим условие, что функция $\theta(p)$ не имеет полюсов в правой p-полуплоскости. Тогда по теореме Коши интеграл в левой части (15.23) равен нулю, а выражение (15.23) после несложных преобразований приводит к следующим важным соотношениям:

$$A(\omega_1) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \omega_1}\,d\omega, \quad (15.24)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega - \omega_1}\,d\omega. \quad (15.25)$$

Таким образом, при оговоренных выше условиях $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ однозначно связаны между собой преобразованиями Гильберта [см. (3.54), (3.55)].

С учетом четности $A(\omega)$ и нечетности $\varphi(\omega)$ перепишем предыдущие формулы в окончательном виде:

$$A(\omega_1) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\omega\varphi(\omega)}{\omega^2-\omega_1^2}\,d\omega, \qquad (15.24')$$

$$\varphi(\omega_1) = \frac{2\omega_1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{A(\omega)}{\omega^2-\omega_1^2}\,d\omega. \qquad (15.25')$$

Итак, для определения одной из характеристик на какой-либо фиксированной частоте ω_1 требуется знание другой характеристики во всем частотном диапазоне.

15.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ АЧХ И ФЧХ В ЦИФРОВЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАХ

Принципиальные положения, сформулированные в предыдущем параграфе для аналоговых четырехполюсников, можно распространить и на цифровые четырехполюсники. Различие только в аналитических выражениях, устанавливающих соотношение между АЧХ и ФЧХ. Эти различия обусловлены представлением передаточной функции цифрового фильтра не на p-, а на z-плоскости.

Основываясь на результатах предыдущего параграфа, можно утверждать, что цифровой четырехполюсник является минимальнофазовым, если его передаточная функция $\mathbf{K}(z)$ не содержит нулей вне круга $|z|=1$ на z-плоскости и соответственно функция

$$\hat{\Theta}(e^{i\omega T}) = \ln\hat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = A_T(\omega) + i\varphi_T(\omega) \qquad (15.26)$$

не содержит полюсов в указанной области.

Первое слагаемое в правой части (15.26) имеет смысл логарифмического затухания четырехполюсника [см. (15.22)]

$$A_T(\omega) = \ln|\hat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T})|, \qquad (15.27)$$

а второе слагаемое — фазочастотной характеристики.

Индекс T при $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ указывает на периодическую структуру этих характеристик [см. (12.9)].

Формулы для АЧХ и ФЧХ можно получить, повторив рассуждения предыдущего параграфа при замене p на $z=e^{pT}$ и

соответственно $i\omega$ на $e^{i\omega T}$. Тогда по аналогии с правой частью выражения (15.23) получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\hat{\Theta}(e^{i\omega T})+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\frac{\hat{\Theta}(e^{i\omega T})}{e^{i\omega T}-e^{i\omega_1 T}}\,d(e^{i\omega T})=0.$$

Подставив $d(e^{i\omega T})=iTe^{i\omega T}d\omega$, а также (15.27), придем к выражению

$$\frac{1}{2}[A_T(\omega_1)+i\varphi_T(\omega_1)]+\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\frac{A_T(\omega)\,d\omega}{1-e^{-i(\omega-\omega_1)T}}+$$

$$+\frac{iT}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\frac{\varphi_T(\omega)}{1-e^{-i(\omega-\omega_1)T}}\,d\omega=0. \qquad (15.28)$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1-e^{-ix}}=\frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}=\frac{\cos x/2+i\sin x/2}{2i\sin x/2}=\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}x/2).$$

Тогда, выделив в (15.28) действительную и мнимую части придем к следующим формулам:

$$A_T(\omega_1)=-\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}A_T(\omega)\,d\omega-\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\varphi_T(\omega)\operatorname{ctg}\frac{(\omega-\omega_1)T}{2}\,d\omega, \qquad (15.29)$$

$$\varphi_T(\omega_1)=\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}A_T(\omega)\operatorname{ctg}\frac{(\omega-\omega_1)T}{2}\,d\omega. \qquad (15.30)$$

Первое слагаемое в правой части (15.29) имеет смысл среднего значения $A_T(\omega)$ в полосе частот от $\omega T=0$ до $\omega T=2\pi$.

Ранее отмечалось, что $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ являются периодическими функциями частоты. Это обстоятельство позволяет существенно упростить соотношения, связывающие между собой АЧХ и ФЧХ. С этой целью запишем функции $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ в виде рядов Фурье:

$$A_T(\omega)=\ln|\hat{K}(e^{i\omega T})|=A_0+A_1\cos\omega T+A_2\cos 2\omega T+\ldots, \qquad (15.31)$$

$$\varphi_T(\omega)=\Phi_1\sin\omega T+\Phi_2\sin 2\omega T+\ldots \qquad (15.32)$$

Косинусоидальный ряд для $A_T(\omega)$ обусловлен четностью этой функции относительно ω, а синусоидальный ряд — нечетностью функции $\varphi_T(\omega)$.

Коэффициенты рядов (15.31) и (15.32) определяются формулами

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_T(\omega)\cos n\omega T d(\omega T), \quad (15.33)$$

$$\Phi_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_T(\omega)\sin n\omega T d(\omega T). \quad (15.34)$$

Подстановкой ряда (15.31) в выражение (15.30) нетрудно показать, что $\varphi_T(\omega_1)$ (индекс 1 при ω опускается)

$$\varphi_T(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega T. \quad (15.35)$$

Подстановка ряда (15.32) в (15.29) приводит к выражению

$$A_T(\omega) = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \cos n\omega T. \quad (15.36)$$

Определив $A_T(\omega)$, найдем АЧХ

$$K_T(\omega) = e^{A_T(\omega)}.$$

Из сопоставления рядов (15.35) и (15.32), а также (15.36) и (15.31) вытекает важное соотношение

$$A_n = -\Phi_n.$$

Следовательно, по заданной функции $A_T(\omega)$, записанной в виде ряда Фурье, можно найти коэффициенты Φ_n ФЧХ $\varphi_T(\omega)$. При заданной ФЧХ (также в виде ряда Фурье) функцию $A_T(\omega)$ можно найти с точностью лишь до A_0. Физический смысл этого факта очевиден, так как величина

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln K(\omega)\, d(\omega T),$$

зависящая только от АЧХ фильтра $K(\omega)$, может изменяться в широких пределах (изменением усиления) при сохранении ФЧХ.

Итак, для полного описания передаточной функции минимальнофазовой цифровой цепи достаточно знать коэффициенты Фурье одной из характеристик: ФЧХ $\varphi_T(\omega)$ или логарифмического затухания $A_T(\omega)$.

Вычисление коэффициентов ряда Фурье любой от характеристик $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$, заданной на интервале $0 < \omega T < 2\pi$, несравненно проще вычисления интегралов в бесконечных пределах, требуемого при анализе аналоговых цепей [см. (15.24′) и (15.25′)].

Глава 16. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

16.1. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

В предыдущих главах принцип суперпозиции рассматривался как основное свойство линейных систем. Математическая формулировка принципа суперпозиции, предусматривающая только операцию сложения сигналов, является фундаментальной для обработки аддитивной смеси сигналов. Она также является основой для спектрального метода анализа воздействия сложных сигналов на линейные цепи, для метода интеграла наложения и других методов, в которых входной сигнал представляется в виде суммы элементарных слагаемых.

Однако операция сложения, как указывалось в § 1.2, не исчерпывает проблемы обработки сложных сигналов. Важное значение для современной теории и техники обработки сигналов имеют, в частности, операции умножения и свертки сигналов.

Линейные системы не позволяют осуществить раздельную обработку сигналов, входящих в произведение или образующих свертку. Иными словами, по отношению к сигналам $s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)$ или $s(t)=s_1(t)*s_2(t)$ неприменим принцип суперпозиции в том виде, в каком он сформулирован для линейных систем. Однако с помощью сочетания линейных и некоторых нелинейных элементов можно реализовать систему, подчиняющуюся обобщенному принципу суперпозиции по отношению к упомянутым выше (и некоторым другим) сигналам.

Отыскание классов подобных систем для различных комбинаций входных сигналов основывается на теории линейных векторных пространств и на общей теории преобразования этих пространств. Применение этих понятий к задаче синтеза цепей, подчиняющихся обобщенному принципу суперпозиции, рассматривается в следующем параграфе. Предварительно поясним принцип построения подобных цепей для одного частного случая, основываясь на физических представлениях.

Рассмотрим обработку мультипликативного сигнала $s(t)=$ $=s_1(t)\cdot s_2(t)$ и поставим перед собой задачу преобразования его к виду суммы $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$. Искомый оператор преобразования обозначим символом D. Математически поставленная выше задача сводится к требованию

$$D[s(t)]=D[s_1(t)\cdot s_2(t)]=D[s_1(t)]+D[s_2(t)]. \tag{16.1}$$

Известно, что единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей функциональному уравнению (16.1), является логарифмическая функция. Следовательно, оператор D соответствует логарифму и нелинейное устройство, осуществляющее требуемое преобразование, должно иметь характеристику вида $x = D(s) = \log s$. Сигнал на выходе этого устройства

$$x(t) = \log [s(t)]^1 = \log [s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log [s_1(t)] + \log[s_2(t)] = x_1(t) + x_2(t). \quad (16.2)$$

В данном случае для упрощения мы ограничились рассмотрением действительных и ненулевых функций $s_1(t) > 0$ и $s_2(t) > 0$.

По своему частотному спектру, а следовательно, и по форме сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отличаются от $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Существенно, однако, что сумму $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ можно обрабатывать (фильтровать) с помощью обычной линейной цепи.

Обозначим через $y_1(t)$ и $y_2(t)$ сигналы на выходе линейного фильтра L, осуществляющего фильтрацию сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Поскольку последние имеют смысл логарифмов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то $y_1(t)$ и $y_2(t)$ можно рассматривать как логарифмы выходных сигналов $s_{1вых}(t)$ и $s_{2вых}(t)$. Тогда возникает задача, обратная по отношению к (16.2): как перейти от суммы $y_1(t) + y_2(t)$ к произведению $s_{вых}(t) = s_{1вых}(t) \cdot s_{2вых}(t)$.

Преобразованием, обратным логарифмированию, является потенцирование. Оператор такого преобразования обозначим D^{-1}. Тогда характеристика нелинейного элемента, осуществляющего обратное преобразование, должна иметь вид $s_{вых}(t) = D^{-1}(y)$, так что

$$s_{вых}(t) = D^{-1}[y(t)] = \exp[y_1(t) + y_2(t)] = e^{y_1(t)} e^{y_2(t)} = e^{\ln s_{1вых}(t)} e^{\ln s_{2вых}(t)} = s_{1вых}(t) \cdot s_{2вых}(t). \quad (16.3)$$

Между двумя нелинейными элементами, осуществляющими преобразования D и D^{-1}, должно быть включено линейное устройство L для фильтрации сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, т. е. для основной линейной обработки.

В результате приходим к схеме обработки, представленной на рис. 16.1. Как обозначено на этом рисунке, нелинейный элемент D преобразует произведение $(\cdot)$ в сумму $(+)$, линейный элемент L сохраняет операции суммирования $(+)$ и $(+)$, а нелинейный элемент D^{-1} преобразует сумму в произведение.

Применение подобной обработки целесообразно в тех случаях, когда с помощью линейного устройства L можно разделять по частотному признаку сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и изменять в желательном направлении соотношение между уровнями сигналов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

---

[1] Здесь и в дальнейшем log обозначает операцию логарифмирования. При выкладках и вычислениях используются натуральные логарифмы.

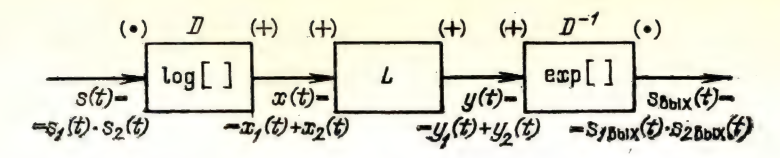


Рис. 16.1

Пусть, например, спектры функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ не перекрываются, а линейный фильтр L пропускает только сигнал $y_1(t)$. Тогда выражение (16.3) принимает следующий вид:

$$s_{\text{вых}}(t)=D^{-1}[y(t)]=\exp[y_1(t)+0]=e^{y_1(t)}=e^{\ln s_{1\text{вых}}(t)}=$$
$$=s_{1\,\text{вых}}(t). \qquad (16.3')$$

Аналогично при режекции сигнала $y_1(t)$ получим $s_{2\text{вых}}(t)$. Таким образом можно осуществить разделение сигналов.

Система, представленная на рис. 16.1, в целом подчиняется обобщенному принципу суперпозиции, в данном случае по отношению к сигналу $s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)$, так как в этой системе между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ отсутствует взаимодействие и соотношение между $s_{1\text{вых}}(t)$ и $s_1(t)$, а также между $s_{2\text{вых}}$ и $s_2(t)$ определяется только линейным устройством L.

Именно в этом смысле в дальнейшем будет трактоваться термин «обобщенный принцип суперпозиции».

16.2. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ГОМОМОРФНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Если сигналы на входе и выходе рассматриваемой системы трактовать как элементы векторного пространства, то любое преобразование $H[s(t)]$, осуществляемое системой над сигналом $s(t)$, является преобразованием пространства сигналов. Такое преобразование переводит элементы s_1, $s_2, \ldots$ пространства входных сигналов в элементы $s_{1\text{вых}}(t)$, $s_{2\text{вых}}(t), \ldots$ пространства выходных сигналов, причем $s_{1\text{вых}}(t)=H[s_1(t)]$, $s_{2\text{вых}}(t)=H[s_2(t)]$.

Рассмотрим теперь преобразование входного сигнала, являющегося некоторой комбинацией двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Как уже отмечалось, для обработки сигналов в радиоэлектронике наибольший интерес представляют следующие три комбинации: сложение, умножение и свертка. Обобщим эти операции символом $\square$, т. е. $s(t)=s_1(t)\square s_2(t)$. Каждому сигналу $s(t)$ соответствует вполне определенный элемент $s_{\text{вых}}(t)=H[s(t)]$ в пространстве выходных сигналов, однако различным операциям — суммированию, умножению или свертке соответствует определенный оператор: H_1, H_2 или H_3.

Можно синтезировать систему, осуществляющую такое преобразование входного сигнала $s(t)=s_1(t)\square s_2(t)$, при котором сигнал на выходе будет иметь вид $s_{\text{вых}}(t)=H[s_1(t)]\bigcirc H[s_2(t)]$, где $\bigcirc$ — обозначение (общее) операций над элементами прост-

ранства выходных сигналов (сложение, умножение, свертка), причем операция ○ может не совпадать с операцией □.

Для такой системы имеет место следующее соотношение:

$$H[s_1(t)\,\square\, s_2(t)]=H[s_1(t)]\bigcirc H[s_2(t)]. \qquad (16.4)$$

Имеется в виду однозначное, но не обязательно взаимно однозначное преобразование.

Примером невзаимно однозначного преобразования может служить операция квадрирования

$$H[s(t)]=[s(t)]^2.$$

Каждому значению $s(t)$ соответствует единственное значение $s^2(t)$ в пространстве выходных сигналов, при обратном же преобразовании получим два возможных значения $\pm s(t)$.

Преобразование векторного пространства, отвечающее равенству (16.4), называется **гомоморфным** (в отличие от обратимого, изоморфного преобразования), а системы, осуществляющие такое преобразование, называются **гомоморфными** относительно операции □ на входе и операции ○ на выходе системы.

В частном случае □ = ○ = (+) выражение (16.4) переходит в соотношение

$$H[s_1(t)+s_2(t)]=H[s_1(t)]+H[s_2(t)], \qquad (16.5)$$

соответствующее формулировке принципа суперпозиции для обычной линейной системы.

С этой точки зрения выражение (16.4) можно трактовать как обобщение принципа суперпозиции.

Пространство выходных сигналов, как и исходное, является линейным векторным пространством, хотя сам оператор преобразования $H[\ ]$ может быть нелинейным.

Проиллюстрируем смысл этого обобщения на нескольких примерах.

1. Система, осуществляющая преобразование Фурье сигнала $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$.

В данном случае □ = ○ = (+) и

$$\mathscr{F}[s(t)]=\mathscr{F}[s_1(t)+s_2(t)]=\mathscr{F}[s_1(t)]+\mathscr{F}[s_2(t)]=$$
$$=\mathbf{S}_1(\omega)+\mathbf{S}_2(\omega) \qquad (16.6)$$

— чисто линейное преобразование.

Аналогичное соотношение можно написать и для z-преобразования, обозначаемого через $\zeta[\ ]$:

$$[s(t)]=\zeta[s_1(t)+s_2(t)]=\zeta[s_1(t)]+\zeta[s_2(t)]=\hat{\mathbf{S}}_1(z)+\hat{\mathbf{S}}_2(z). \quad (16.7)$$

Выражения (16.6), (16.7) соответствуют определению принципа суперпозиции для линейной системы.

2. Система, осуществляющая преобразование сигнала $s(t)=s_1(t)\,s_2(t)$ в сумму $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

В данном примере □→(·), ○→(+). В соответствии с предыдущим параграфом [см. (16.2)] оператор H есть функция логарифмирования log:

$$H[s(t)]=H[s_1(t)\cdot s_2(t)]=\log[s_1(t)\cdot s_2(t)]=\log s_1(t)+\log s_2(t),$$
$$s_1>0,\ s_2>0. \qquad (16.8)$$

В данном случае гомоморфное преобразование с помощью нелинейного элемента (с логарифмической характеристикой) переводит операцию умножения в операцию сложения, что и обеспечивает применимость принципа суперпозиции к выходным сигналам.

3. Система, осуществляющая преобразование Фурье сигнала, представляющего собой свертку континуальных сигналов $s_1(t)=s_1(t)*s_2(t)$ или свертку дискретных сигналов $s[m]=$ $=s_1[m]\otimes s_2[m]$.

Известно, что свертке функций времени соответствует произведение их спектральных плотностей [см. (2.59)]; следовательно, в данном случае □ обозначает свертку $*$ или $\otimes$, а ○ — умножение (·). Таким образом, для аналогового сигнала

$$\mathscr{F}[s(t)]=\mathscr{F}[s_1(t)*s_2(t)]=\mathscr{F}[s_1(t)]\mathscr{F}[s_2(t)]=\mathbf{S}_1(\omega)\cdot\mathbf{S}_2(\omega) \qquad (16.9)$$

и для дискретного сигнала

$$[s[m]]=\zeta[s_1[m]\otimes s_2[m]]=\zeta[s_1[m]]\cdot\zeta[s_2[m]]=$$
$$=\hat{\mathbf{S}}_1[z]\cdot\hat{\mathbf{S}}_2[z], \qquad (16.10)$$

где $\zeta[\ ]$, как и в п. 1, обозначает z-преобразование.

В рассматриваемом примере гомоморфное преобразование, переводящее операцию свертки в операцию умножения, является линейным (это относится как к $\mathscr{F}[\ ]$, так и к $\zeta[\ ]$). Оба этих преобразования обратимы, так как каждому прямому преобразованию соответствует однозначное обратное преобразование. Иными словами, преобразование Фурье и z-преобразование *изоморфны.*

Дополнительное гомоморфное преобразование с помощью логарифмической нелинейности (как в примере 2) приводит к сумме функций вида

$$\log \mathbf{S}_1(\omega)+\log \mathbf{S}_2(\omega) \text{ или } \log \hat{\mathbf{S}}_1(z)+\log \hat{\mathbf{S}}_2(z),$$

что и обеспечивает применимость принципа суперпозиции.

4. Система, осуществляющая преобразование операции сложения сигналов в операцию их умножения.

В § 16.1 показано, что для такого преобразования требуется нелинейный элемент с характеристикой $x(t)=\exp[s(t)]$ [см. (16.3)].

Приведенные выше рассуждения, а также примеры позволяют обобщить намеченную в § 16.1 систему гомоморфной обработки так, как это показано на рис. 16.2. Обобщенная, так

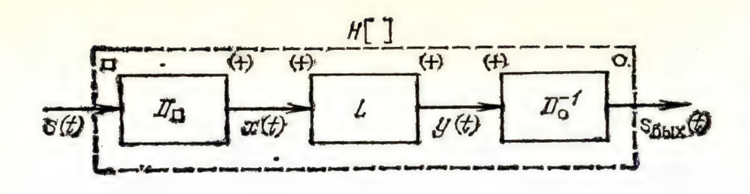


Рис. 16.2

называемая каноническая система гомоморфной обработки состоит из трех каскадов.

Первая система $D_{\square}$, в общем случае нелинейная, обладающая свойством

$$D_{\square}[s_1(t)\square s_2(t)]=D_{\square}[s_1(t)]+D_{\square}[s_2(t)]=x_1(t)+x_2(t), \quad (16.11)$$

подчиняется обобщенному принципу суперпозиции со входной операцией $\square$ и выходной операцией (+) (см. обозначения на рис. 16.2). Система $D_{\square}$ называется характеристической системой гомоморфной обработки.

Система L, являющаяся обычной линейной цепью, удовлетворяет условию $L[x_1(t)+x_2(t)]=L[x_1(t)]+L[x_2(t)]=y_1(t)+y_2(t)$ и выполняет основную функцию по раздельной обработке (фильтрации) сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Наконец, система $D_{\bigcirc}^{-1}$, преобразующая операцию сложения в выходную операцию $\bigcirc$, удовлетворяет условию

$$D_{\bigcirc}^{-1}[y_1(t)+y_2(t)]=D_{\bigcirc}^{-1}[y_1(t)]\bigcirc D_{\bigcirc}^{-1}[y_2(t)]=$$
$$=s_{1\text{вых}}(t)\bigcirc s_{2\text{вых}}(t). \quad (16.12)$$

Преобразование D^{-1} является обратным по отношению к преобразованию D. Если D — система нелинейная, то и D^{-1} — нелинейная система.

В последующих параграфах поясняется выбор характеристических систем $D_{\square}$ и $D_{\bigcirc}^{-1}$ для двух классов сигналов — произведения и свертки.

16.3. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СИГНАЛА

Структурная схема обработки мультипликативного сигнала представлена на рис. 16.1 и описана в § 16.1. Наложенные при анализе этой схемы ограничения — действительные и ненулевые сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$, а также разнесенность или несущественное перекрытие их спектров не препятствуют применению гомоморфной обработки в ряде важных для практики задач. К таким задачам относится, в частности, обработка сигналов телевизионного изображения. Дело в том, что, как правило, яркость фона на экране изменяется медленно, а контрастность

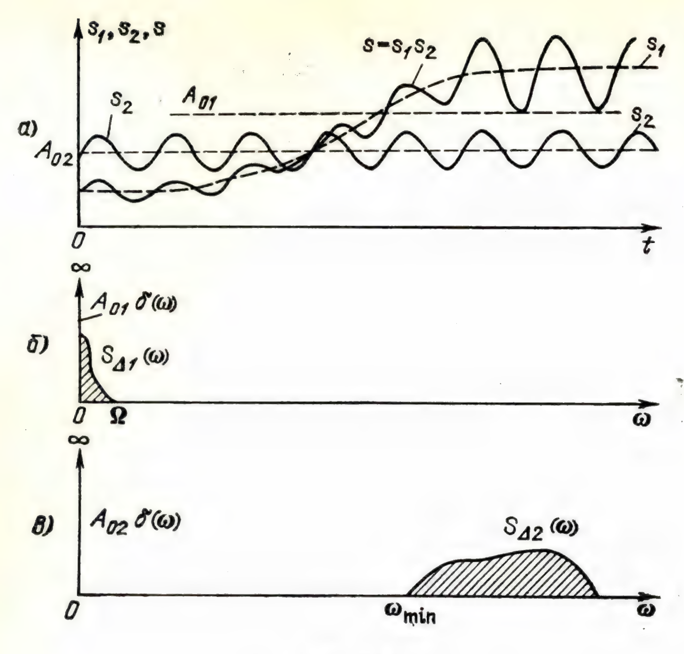


Рис. 16.3

изображения определяется высокочастотными изменениями сигнала, так что результирующий эффект можно считать пропорциональным произведению двух сигналов — низкочастотного $s_1(t)$ и высокочастотного $s_2(t)$. По своей природе эти сигналы являются действительными и положительными функциями времени.

Примерный вид сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s(t)$ представлен на рис. 16.3, *а*. Запишем их в форме

$$s_1(t)=A_{01}+\Delta s_1(t)>0,\quad s_2(t)=A_{02}+\Delta s_2(t)>0,$$

где A_{01} и A_{02} — постоянные составляющие соответственно функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Тогда

$$s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)=A_{01}A_{02}+A_{02}\Delta s_1(t)+A_{01}\Delta s_2(t)+\Delta s_1(t)\cdot\Delta s_2(t).$$

В связи с тем, что сигнал $s_1(t)$ изменяется в широком динамическом диапазоне, соответственно изменяется и сигнал $s(t)$. Это предъявляет жесткие требования к линейности амплитудной характеристики телевизионного тракта. Выгодно ослабить влияние $s_1(t)$ и подчеркнуть сигнал $s_2(t)$, от которого зависит контрастность изображения. Для выявления возможности такой обработки рассмотрим спектры сигналов.

Спектры исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ показаны на рис.

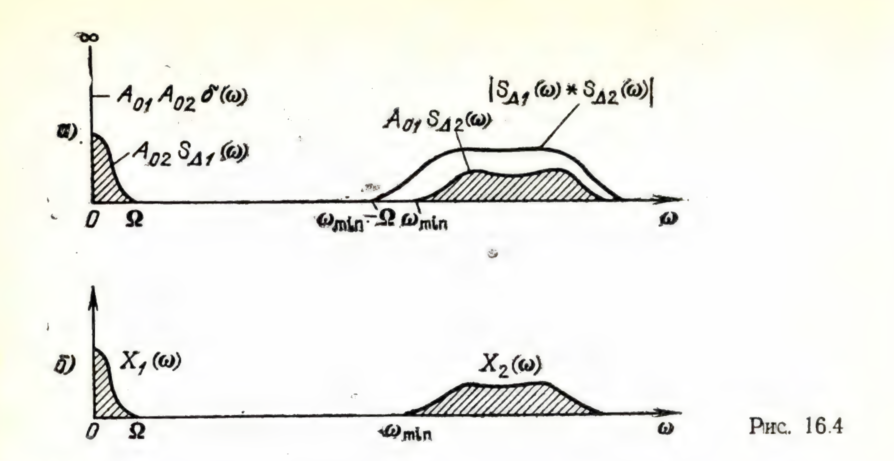


Рис. 16.4

16.3, *б* и *в*. Дельта-функции относятся к спектральным плотностям постоянных составляющих A_{01} и A_{02}, а $S_{\Delta1}(\omega)$ и $S_{\Delta2}(\omega)$ обозначают спектры переменных составляющих $\Delta s_1(t)$ и $\Delta s_2(t)$.

Спектр результирующего сигнала $s(t)$ представлен на рис. 16.4, *а*. Произведению $\Delta s_1(t)\cdot\Delta s_2(t)$ соответствует свертка спектров $S_{\Delta1}(\omega)$ и $S_{\Delta2}(\omega)$.

С помощью обычных линейных фильтров можно отфильтровать постоянную составляющую и низкочастотную часть спектра в полосе от нуля до Ω. Однако спектр $S_{\Delta1}(\omega)*S_{\Delta2}(\omega)$ не поддается разделению с помощью линейной фильтрации. В этих условиях применение системы, представленной на рис. 16.1, оказывается весьма эффективным. Хотя форма колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на выходе логарифмического преобразователя существенно отличается от исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, соответствующие им спектральные полосы разнесены на оси частот в такой же степени, что и спектры $S_{\Delta1}(\omega)$ и $S_{\Delta2}(\omega)$ (рис. 16.4, *б*). В спектре $\mathbf{X}_1(\omega)$ преобладают низкие частоты, близкие к Ω, а в спектре $\mathbf{X}_2(\omega)$ — частоты, нижняя граница которых близка к ω_{min}.

Применение линейной цепи L с АЧХ, показанной на рис. 16.5, позволяет существенно снизить относительный уровень сигнала $y_1(t)$.

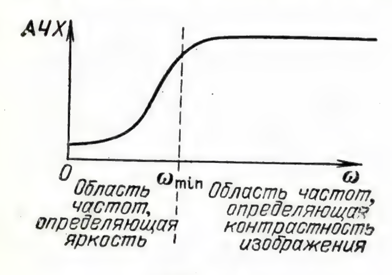


Рис. 16.5

После обратного нелинейного преобразования D^{-1} получается новый мультипликативный сигнал $s_{\text{вых}}(t)=s_{1\text{вых}}(t)s_{2\text{вых}}(t)$ с требуемым соотношением уровней $s_{1\text{вых}}(t)$ и $s_{2\text{вых}}(t)$.

Таким образом можно осуществить одновременно сжатие динамического диапазона и повышение контрастности изображения.

16.4. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СВЕРНУТОГО СИГНАЛА

Пусть задан континуальный сигнал $s(t)=s_1(t)*s_2(t)$ и требуется осуществить обработку, в результате которой выходной сигнал получится также в виде свертки $s_{вых}(t)=s_{1вых}(t)*s_{2вых}(t)$, но с измененным соотношением между составными сигналами.

В данном случае операции $\square$ и $\bigcirc$ совпадают с $*$ и каноническая форма системы обработки принимает вид, показанный на рис. 16.6, *а*.

В соответствии с (16.11) характеристическая система D_* должна отвечать условию

$$D_*[s_1(t)*s_2(t)]=D_*[s_1(t)]+D_*[s_2(t)]. \qquad (16.13)$$

В отличие от мультипликативного сигнала (см. § 16.3) не существует подходящей функции для прямой реализации условия (16.13). Можно, однако, сначала перевести операцию свертки в операцию умножения, а затем произведение преобразовать в сумму.

Подвергнув входной сигнал преобразованию Фурье, получим [см. (16.9)]

$$\mathscr{F}[s(t)]=S(\omega)=S_1(\omega)S_2(\omega). \qquad (16.14)$$

Следующий шаг — преобразование произведения в сумму с помощью выражения

$$\log S(\omega)=\log S_1(\omega)+\log S_2(\omega).$$

Применив, наконец, к $\log S(\omega)$ обратное преобразование Фурье, придем к характеристической системе D_*.

Структурная схема D_* представлена на рис. 16.7, *а*. На выходе этой системы сигнал

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}[\log S(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}[\log S_1(\omega)]+\mathscr{F}^{-1}[\log S_2(\omega)]=$$
$$=x_1(t)+x_2(t). \qquad (16.15)$$

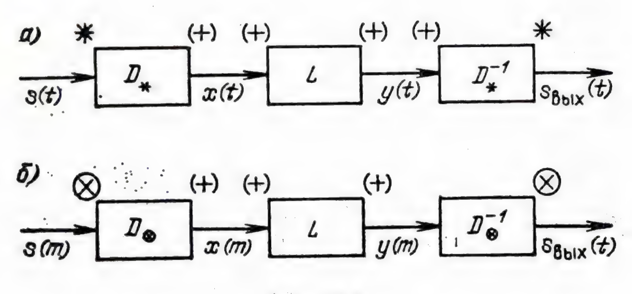


Рис. 16.6

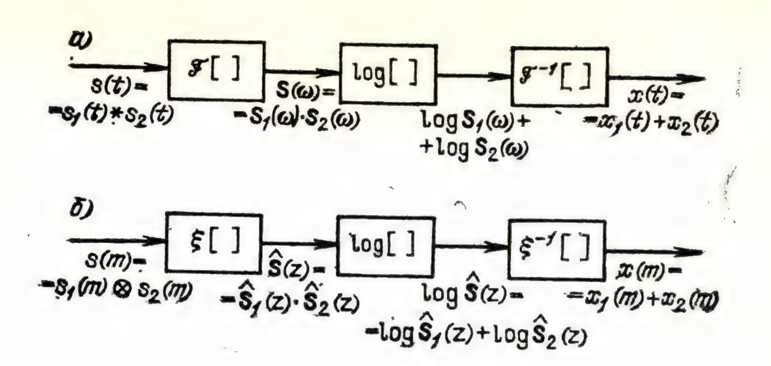


Рис. 16.7

Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ по форме, естественно, существенно отличаются от исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

На рис. 16.8, *а* представлена обратная характеристическая система D_*^{-1}. Эта система получается из D_* заменой преобразования log [ ] на преобразование exp [ ].

На вход системы D_*^{-1} подается сигнал $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ с выхода линейной системы L. После преобразования $\mathcal{F}[y(t)]$ получаются спектральные функции $\mathbf{Y}_1(\omega)$ и $\mathbf{Y}_2(\omega)$. Дальнейшее преобразование вида exp [ ] приводит к произведению вида $e^{\mathbf{Y}_1(\omega)}\cdot e^{\mathbf{Y}_2(\omega)}$, каждый из сомножителей которого также является спектральной функцией.

Наконец, обратное преобразование Фурье

$$s_{\text{вых}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{Y}_1(\omega)}e^{\mathbf{Y}_2(\omega)}e^{i\omega t}d\omega=s_{1\text{вых}}(t)*s_{2\text{вых}}(t) \qquad (16.16)$$

определяет выходной сигнал в виде свертки, в которой сигналы $s_{1\text{вых}}(t)$ и $s_{2\text{вых}}(t)$ изменены по сравнению с $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в требуемом соотношении.

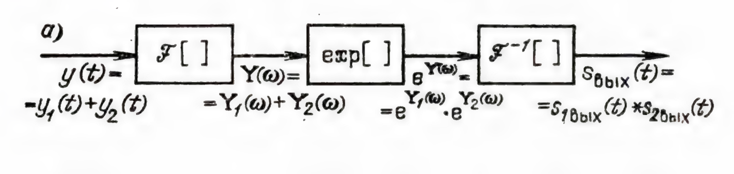


Рис. 16.8

Цифровой вариант характеристической системы $D\otimes$ представлен на рис. 16.7,*б*.

Сигнал (дискретный) на выходе этой системы определяется выражением, аналогичным (16.15):

$$x[m]=\frac{1}{2\pi i}\oint \ln \hat{\mathbf{S}}(z)\, z^{m-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint \ln \hat{\mathbf{S}}_1(z)\, z^{m-1}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint \ln \hat{\mathbf{S}}_2(z)\, z^{m-1}dz=x_1[m]+x_2[m]. \quad (16.17)$$

Обратная характеристическая система $D\otimes^{-1}$ представлена на рис. 16.8,*б*. Сигнал на выходе всего устройства

$$s_{\text{вых}}[m]=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\hat{\mathbf{Y}}_1(z)}e^{\hat{\mathbf{Y}}_2(z)}z^{m-1}dz=s_{1\text{вых}}[m]\otimes s_{2\text{вых}}[m]. \quad (16.18)$$

В практике наибольшее распространение получила гомоморфная обработка свернутого сигнала, заканчивающаяся выделением функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ [или $x_1[m]$, $x_2[m]$], содержащих всю информацию о входных сигналах $s_1(t)$ и $s_2(t)$ [или $s_1[m]$, $s_2[m]$]. При этом необходимость в громоздких преобразованиях D_*^{-} или $D\otimes^{-1}$ отпадает, а выходные сигналы определяются с помощью соотношений (16.15) или (16.17).

Главная особенность указанных соотношений — замена спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ логарифмом $\mathbf{S}(\omega)$, а z-преобразования $\hat{\mathbf{S}}(z)$ — логарифмом $\hat{\mathbf{S}}(z)$.

Основанный на логарифмически-спектральном преобразовании метод привел к новому направлению в теории сигналов, получившему название кепстральный анализ.

16.5. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ. КЕПСТР МОЩНОСТИ

Исторически понятие «кепстр» было определено выражением[1]

$$C_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln [S(\omega)]^2\, e^{i\omega q}d\omega, \quad (16.19)$$

где $S(\omega)$ — амплитудный спектр континуального сигнала $s(t)$.

Поскольку $S^2(\omega)$ имеет смысл спектральной плотности энергии сигнала $s(t)$ (см. п. 2.5.9), то $C_s(q)$ истолковывается как *энергетический спектр* функции $\ln[S(\omega)]^2$.

Но из (16.19) очевидно, что аргумент q этого «спектра» имеет размерность *времени*, а не частоты. Этим и объясняется распространение термина «кепстр», который образован перестанов-

[1] См., например: Michel Noll A. Cepstrum Pitch Determination / The Trans., of the Acoustical Soc. of America.— 1967.— Vol. 41, № 2.

кой букв в термине «спектр». (В зарубежной литературе аргумент называют «quefrency», что по-русски выглядит как «сачтота».)

Хотя q имеет размерность времени, это особое, *кепстральное* время, поскольку $C_s(q)$ в любой момент q зависит от функции $s(t)$, заданной при $-\infty < t < \infty$.

Определяемый выражением (16.19) кепстр принято называть *кепстром мощности*. Фазочастотная характеристика спектра не учитывается (в § 16.9 будет рассмотрен «комплексный кепстр»).

Кепстры мощности получили распространение при анализе сигналов, представляющих собой свертку двух функций времени, таких, что после преобразования $s(t)$ по алгоритму (16.19) образуются неперекрывающиеся на оси q импульсы. В подобной ситуации фазовый спектр составных функций, образующих свертку сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, может не приниматься во внимание.

Следует отметить, что выражение (16.19) имеет смысл не для любого сигнала $s(t)$. Действительно, для сигнала с конечной энергией выполняется условие $\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega < \infty$, из которого следует, что при $|\omega| \to \infty$ $S^2(\omega) \to 0$. Но тогда при $|\omega| \to \infty$ обращается в бесконечность $|\ln S(\omega)|$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln S^2(\omega)\,d\omega$ расходится.

Это противоречие в некоторых практических задачах обходят заменой пределов интегрирования $\pm\infty$ граничными частотами $\pm\omega_{гр}$, в пределах которых заключена основная доля энергии сигнала и значение функции $\ln S^2(\omega)$ ограничено.

Проиллюстрируем применение кепстра мощности на следующем примере. Задан сигнал $s(t)$ на выходе линейного тракта и требуется получить информацию об исходном сигнале $s_1(t)$, действующем на его входе, а также об импульсной характеристике $g(t)$ самого тракта. Связь между тремя перечисленными функциями времени определяется сверткой

$$s(t) = s_1(t) * g(t).$$

Подобная задача возникает при анализе сейсмических процессов, при использовании радиолокационных методов определения характеристик среды распространения, при анализе сигналов речи и т. д.

В частности, при разработке электронных синтезаторов речи под $s_1(t)$ подразумевается сигнал, о котором известно лишь, что его спектральная плотность $S_1(\omega)$ заключена в некоторой полосе $|\omega| \leqslant \omega_{max}$, а форма АЧХ характеризуется периодической изрезанностью, однако период пульсации $1/T$ (на оси частот), а также амплитуда пульсации подлежат определению. Об импульсной характеристике речевого тракта $g(t)$ известно только,

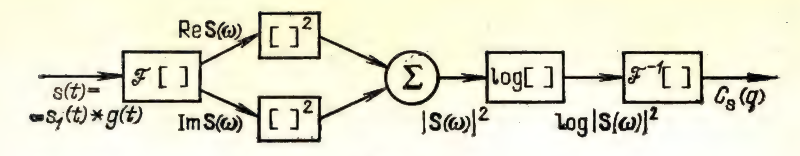


Рис. 16.9

что ее продолжительность мала по сравнению с T, так что передаточная функция тракта $K(\omega)$ изменяется плавно по сравнению с пульсацией $S_1(\omega)$.

Результаты обработки сигнала $s(t)=s_1(t)*g(t)$ по схеме на рис. 16.9 показаны на рис. 16.10.

После фурье-преобразования, определения квадрата модуля спектра, а также логарифмирования получаются функции $\ln S_1^2(\omega)$ и $\ln K^2(\omega)$, примерный вид которых представлен[1] на рис. 16.10,*а*.

Функции $\ln S_1^2(\omega)$, изменяющейся с периодом $1/T$, соответствует кепстр $C_{s1}(q)$ в виде пика на сачтоте T. Медленному же изменению функции $\ln K^2(\omega)$ соответствует кепстр $C_g(q)$ в виде импульса, расположенного вблизи точки $q=0$ (область малого кепстрального времени на рис. 16.10,*б*).

Таким образом можно выявить основную частоту $1/T$, а также получить некоторую информацию о форме АЧХ речевого тракта.

В отличие от рассмотренной выше упрощенной модели со строго периодической пульсацией спектра $S_1(\omega)$ и с постоянной (во времени) передаточной функцией $K(\omega)$ при обработке реальных сигналов речи приходится иметь дело с «квазипериодическим» процессом, частота которого изменяется во времени. То же относится к функции $K(\omega)$. Путем усреднения спектров по большому числу отрезков реализаций, в пределах которых

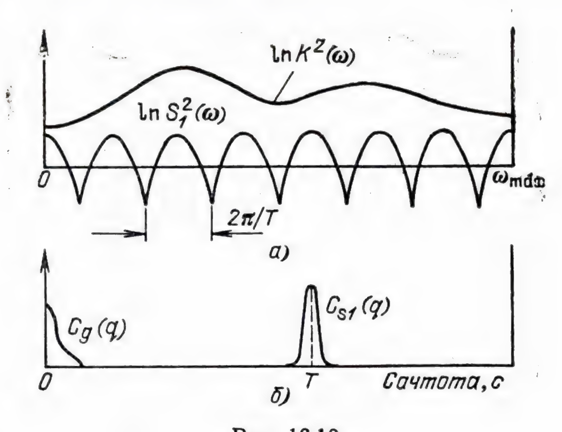


Рис. 16.10

[1] См. сноску на с. 444.

функции $S(\omega)$ и $K(\omega)$ практически неизменны, удается выявить средние частоты и параметры тракта, необходимые для синтеза звуков речи.

Составим теперь выражение для кепстра мощности цифрового сигнала.

Основываясь на выражении (16.17), представим кепстр мощности дискретного сигнала в форме

$$C_s[m] = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln |\hat{S}(z)|^2 z^{m-1} dz \tag{16.20}$$

или в эквивалентной форме [см. (12.36)]

$$C_s[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\hat{S}(e^{i\omega T})|^2 \cos(\omega m T)\, d(\omega T). \tag{16.20'}$$

Вычисление $C_s(m)$, как правило, производится с помощью БПФ. Для осуществления преобразований, эквивалентных алгоритму (16.20′), поступим следующим образом. Подвергнем входной сигнал $s(t)$ дискретному преобразованию Фурье по формуле (12.14):

$$S[n] = \sum_{m=0}^{N-1} s[m]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{16.21}$$

в результате чего получим N спектральных коэффициентов входной последовательности $\{s[m]\}$.

В п. 12.5.2 было показано, что $S[n]$ совпадает со значением $\hat{S}(e^{i\omega T})$ в точке $z = e^{i\frac{2\pi}{N}n}$, лежащей на окружности единичного радиуса:

$$S[n] = \hat{S}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}n}\right) = \operatorname{Re} S[n] + i \operatorname{Im} S[n].$$

Переходя к модулям $|S[n]|^2 = [\operatorname{Re} S[n]]^2 + [\operatorname{Im} S[n]]^2$ и логарифмируя, получаем N чисел вида $\ln|S(n)|^2$.

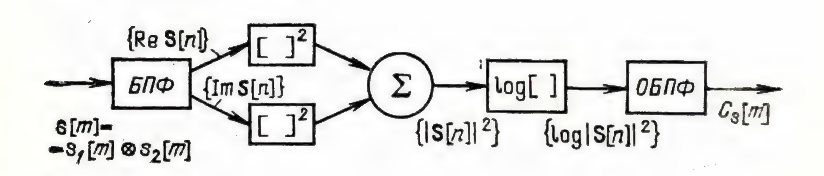


Рис. 16.11

Применив, наконец, ОДПФ

$$C_s[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln|\mathbf{S}[n]|^2 e^{i\frac{2\pi}{N}nm},\ m=0,1,\ldots,2N-1, \quad (16.22)$$

найдем кепстр мощности сигналов.

Алгоритм перечисленных выше преобразований представлен на рис. 16.11.

Вычисление кепстра мощности дискретного сигнала будет рассмотрено в следующем параграфе.

16.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА

В ряде областей техники приходится иметь дело с обработкой сигналов, являющихся суммой исходного (зондирующего) сигнала и сигнала, отраженного от различных объектов. К таким областям относятся радиолокация, сейсмология, акустика и др. Сигнал на входе устройства обработки можно представить в форме

$$s[m]=s_1[m]+\alpha s_1[m-m_0],\ \alpha<1, \quad (16.23)$$

где $\{s_1[m]\}$, $m=0, 1, \ldots, N-1$, — дискретизованный зондирующий сигнал, представляющий собой эквидистантную последовательность отсчетов с шагом T; $\alpha s_1[m-m_0]$ — отраженный сигнал, который можно трактовать как задержанную на время $t_0=m_0T$ копию исходного сигнала.

Пусть исходному сигналу $\{s_1(m)\}$ соответствует z-преобразование $\hat{S}_1(z)$. Тогда z-преобразование последовательности $\alpha s_1[m-m_0]$ будет $\alpha\hat{S}_1(z)z^{-m_0}$, а суммарного сигнала $\{s(m)\}$

$$\hat{\mathbf{S}}(z)=\hat{\mathbf{S}}_1(z)+\alpha\hat{\mathbf{S}}_1(z)z^{-m_0}=\hat{\mathbf{S}}_1(z)(1+\alpha z^{-m_0})=$$
$$=\hat{\mathbf{S}}_1(z)\hat{\mathbf{S}}_2(z). \quad (16.24)$$

Из (16.24) следует, что определяемый выражением (16.23) сигнал $s[m]$ можно трактовать как свертку $s[m]=s_1[m]\otimes s_2[m]$, где $s_2[m]$ — сигнал, z-преобразование которого равно $1+\alpha z^{-m_0}$. Таким сигналом является сумма двух дельта-функций (рис. 16.12):

$$s_2(t)=\delta(t)+\alpha\delta(t-m_0T).$$

Это обстоятельство имеет фундаментальное значение, так как показывает, что широкий класс задач в перечисленных ранее областях, в которых приходится иметь дело с отраженными сигналами, сводится к обработки свернутых сигналов.

Существенно, что множитель $\hat{S}_2(z)=(1+\alpha z^{-m_0})$ в выражении (16.24), учитывающий задержку отраженного сигнала m_0T,

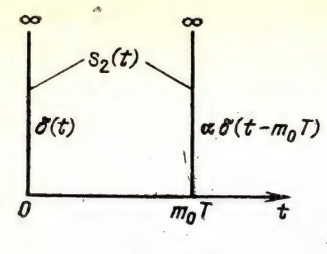


Рис. 16.12

и коэффициент отражения α от структуры спектра исходного сигнала не зависят.

Обратимся к (16.24) и, учитывая, что контур интегрирования в (16.20) совпадает с окружностью единичного радиуса на z-плоскости, подставим в множитель $(1+\alpha z^{-m_0})$ вместо z переменную $e^{i\omega T}$.

Тогда

$$|\hat{S}_2(e^{i\omega T})|^2=|1+\alpha e^{-i\omega m_0 T}|^2=(1+\alpha e^{-i\omega m_0 T})(1+\alpha e^{i\omega m_0 T})=$$
$$=1+\alpha^2+2\alpha\cos(\omega m_0 T). \quad (16.25)$$

Таким образом, выражение (16.24) позволяет составить следующее соотношение:

$$|\hat{S}(e^{i\omega T})|^2=|\hat{S}_1(e^{i\omega T})|^2[1+\alpha^2+2\alpha\cos(\omega m_0 T)]. \quad (16.26)$$

Из (16.26) видно, что наложение задержанной копии $\alpha s_1[m-m_0]$ на исходный сигнал $s_1(m)$ создает эффект модуляции спектра энергии $|\hat{S}_1(e^{i\omega T})|^2$ по закону $1+\alpha^2+2\alpha\cos(\omega m_0 T)$. Глубина модуляции определяется коэффициентом $2\alpha/(1+\alpha^2)$, а период модуляции равен $2\pi/m_0$.

С аналогичным явлением мы встретились в примере предыдущего параграфа, где спектр энергии исходного сигнала также являлся периодической функцией ω.

Прологарифмировав выражение (16.26), получим

$$\ln|\hat{S}(e^{i\omega T})|^2=\ln|\hat{S}_1(e^{i\omega T})|^2+\ln[1+\alpha^2+2\alpha\cos(\omega m_0 T)]. \quad (16.27)$$

Примерный вид слагаемых правой части показан на рис. 16.13.

Вычислим кепстр мощности по выражению (16.20′), которое на основании (16.25)—(16.27) можно записать в форме

$$C_s[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\hat{S}_1(e^{i\omega T})|^2\cos(m\omega T)\,d(\omega T)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|1+$$
$$+\alpha e^{-im_0\omega T}|^2\cos(m\omega T)\,d(\omega T)=C_{s1}[m]+C_{s2}[m]. \quad (16.28)$$

Как видно, информация о задержке t_0 содержится в кепстре $C_{s2}[m]$, поэтому вычисление начнем именно с $C_{s2}[m]$, не уточняя пока структуры сигнала $s_1[m]$ и кепстра $C_{s1}[m]$.

Основываясь на выражении (16.25), получаем

$$\ln|1+\alpha e^{-im_0\omega T}|^2=\ln(1+\alpha e^{-im_0\omega T})+\ln(1+\alpha e^{im_0\omega T}).$$

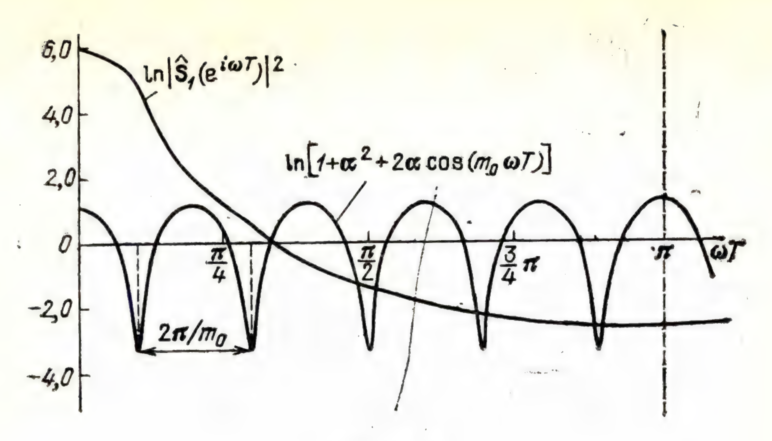


Рис. 16.13

Так как $|\alpha e^{-im_0\omega T}|<1$, можно воспользоваться разложением $\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-\ldots$

Тогда

$$\ln|1+\alpha e^{-im_0\omega T}|^2=\alpha\,(e^{-im_0\omega T}+e^{im_0\omega T})-$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}(e^{-i2m_0\omega T}+e^{i2m_0\omega T})+\frac{\alpha^3}{3}(e^{-i3m_0\omega T}+e^{i3m_0\omega T})-\ldots=$$
$$=2\alpha\cos(m_0\omega T)-\alpha^2\cos(2m_0\omega T)+\frac{\alpha^3}{3}2\cos(3m_0\omega T)-\ldots$$

Подставив этот результат во второе слагаемое в правой части (16.28), получим

$$C_{s2}[m]=\alpha\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m-m_0)\,\omega T]\,d(\omega T)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+m_0)\,\omega T]\,d(\omega T)\right\}-$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m-2m_0)\,\omega T]\,d(\omega T)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+2m_0)\,\omega T]\,d(\omega T)\right\}+\ldots$$

Очевидно, что $C_{s2}[m]$ отлично от нуля только в точках $m=\pm m_0$, $m=\pm 2m_0$ и т. д., причем

$$C_{s2}[m_0]=C_{s2}[-m_0]=\alpha,\; C_{s2}[2m_0]=C_{s2}[-2m_0]=-\alpha^2/2,$$
$$C_{s2}[3m_0]=C_{s2}[-3m_0]=\alpha^3/3,\;\ldots$$

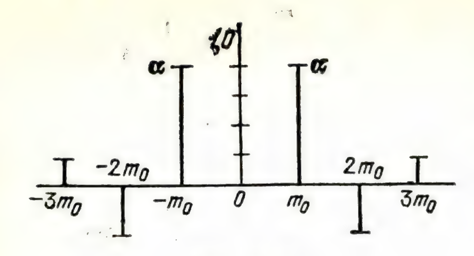


Рис. 16.14

Кепстр C_{s2} $[m]$ представлен на рис. 16.14. Истинная задержка определяется по положению первого пика.

Найденный выше кепстр C_{s2} $[m]$ наблюдается на фоне кепстра C_{s1} $[m]$ исходного сигнала. Для надежного определения t_0 требуется достаточное превышение C_{s2} $[m]$ над C_{s1} $[m]$, а также разнесение их на оси кепстрального времени mT. Важно, чтобы кепстр C_{s1} $[m]$ концентрировался вблизи начала отсчета кепстрального времени. Кроме того, кепстр C_{s1} $[m]$ должен быть свободен от ложных пиков. Степень выполнения этих требований зависит от структуры спектра $S_1(\omega)$ исходного сигнала $s_1(t)$. Некоторые соображения по этому вопросу приводятся в следующем параграфе.

16.7. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА

Для иллюстрации метода воспользуемся сигналом $s_1(t)$ в виде импульса (рис. 16.15)

$$s_1(t)=Ate^{-bt}, \quad b>0, \quad t\geqslant 0.$$

Импульс $s_1(t)$ достигает своего максимума при $bt=1$, так что амплитуда импульса $s_{1max}=(A/b)bte^{-bt}=(A/b)e^{-1}$.

Спектральная плотность выбранной функции

$$\mathbf{S}(\omega)=A/(b+i\omega)^2. \tag{16.29}$$

Имея в виду цифровую обработку, переходим к дискретному времени $t=mT$; тогда

$$s_1[m]=ATme^{-bTm}, \quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

и максимальное значение отсчета сигнала $s_1(t)$ получается при $m=1/bT$ (см. рис. 16.15, построенный при $b=A=1/20T$).

Перейдем от спектральной плотности (16.29) к z-преобразованию

$$\hat{\mathbf{S}}_1(e^{i\omega T})=AT\sum_{m=0}^{N-1} me^{-bTm}e^{-i\omega Tm}=AT\sum_{m=0}^{N-1} me^{-(bT+i\omega T)m}. \tag{16.30}$$

Получилась арифметико-геометрическая прогрессия.

Шаг дискретизации T зададим из условия, чтобы на длительность импульса приходилось достаточно большое число отсчетов N, а постоянную b — из условия $Ne^{-bNT}\ll 1$. При этом

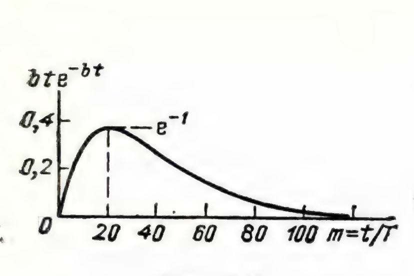


Рис. 16.15

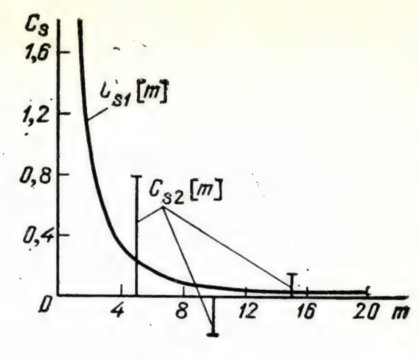


Рис. 16.16

верхний предел суммирования $N-1$ в выражении (16.30) можно заменить на ∞, что приводит к простому результату

$$\hat{S}_1(e^{i\omega T}) = ATe^{-bT}e^{-i\omega T}/(1-e^{-bT}e^{-i\omega T})^2. \tag{16.31}$$

Модуль полученной функции

$$|\hat{S}_1(e^{i\omega T})| = \frac{ATe^{-bT}}{1-2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT}} \tag{16.31'}$$

и

$$\ln|\hat{S}_1(e^{i\omega T})|^2 = \ln(AT)^2 - 2bT - 2\ln(1-2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT}).$$

Применив к этому выражению формулу (16.20′), получим[1]: при $m=0$

$$C_{s1}[0] = \ln(AT)^2 - 2bT - 2\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \ln(1-2e^{-bT}\cos\omega T +$$

$$+ e^{-2bT})\, d(\omega T) = \ln(AT)^2;$$

при $m \neq 0$

$$C_{s1}[m] = -2\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \ln(1-2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})\cos(m\omega T)d(\omega T) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{m}e^{-2bmT}\right) = \frac{2}{m}e^{-2bmT}.$$

Вычислим $C_{s1}[m]$ для следующего частотного случая: $\tau_и = 5$ кмс, $N=128$, $T=\tau_и/N \approx 40$ нс, $e^{-bt}=0{,}95$, $bT \approx 0{,}05$, $b = 1{,}25\cdot 10^6$.

Кепстр $C_{s1}[m]$ представлен на рис. 16.16. На том же рисунке показан кепстр $C_{s2}[m]$, соответствующий коэффициенту $\alpha=0{,}8$ и задержке $t_0=m_0T$ при $m_0=5$. Как видно из этого рисунка,

---

[1] См. [5], формулы (4.224.14), (4.397.6).

кепстр $C_{s1}[m]$ концентрируется вблизи точки $m=0$ и монотонно убывает с возрастанием m. При $t_0 > 5T$ обеспечивается существенное превышение $C_{s2}[m]$ над $C_{s1}[m]$, что открывает возможность измерения весьма малых задержек даже при наличии помех. В данном примере минимальная измеряемая задержка t_0 составляет всего $\sim 5\%$ от длительности импульса.

Для реализации такого же разрешения путем укорочения зондирующего импульса его длительность должна быть не больше $\sim 0{,}25$ мкс.

Сопоставим полученный результат с тем, который можно получить с помощью метода корреляционной функции. Заметим, что структурная схема, показанная на рис. 16.11, отличается от схемы для определения корреляционной функции только наличием операции логарифмирования. Определим корреляционную функцию сигнала $s[m]=s_1[m]+\alpha s_1[m-m_0]$ выражением

$$B_s[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{S}(e^{i\omega T})|^2\cos(m\omega T)\,d(\omega T).$$

С помощью процедуры, использованной при выводе выражений (16.25)—(16.28), нетрудно прийти к следующему результату:

$$B_s[m]=(1+\alpha^2)B_{s1}[m]+\alpha B_{s1}[m-m_0]+\alpha B_{s1}[m+m_0].$$

Даже при $\alpha \to 1$ и отсутствии помехи определение задержки по функции $B_s(m)$ возможно лишь при задержках t_0, не меньших чем $\sim\tau_и/2$. Этот результат иллюстрирует эффект, обусловленный введением операции логарифмирования перед преобразованием Фурье.

Итак, кепстральная обработка позволяет существенно облегчить определение задержки. Однако этот выигрыш достигается весьма дорогой ценой. Требуется применение широкополосного тракта обработки с очень низким уровнем шумов, поскольку уровень спектральной плотности полезного сигнала в центральной части диапазона $0{,}1/T$ чрезвычайно низок.

Так, при $\omega T=0$

$$|\hat{S}_1(e^{i0})|^2=(AT)^2\frac{e^{-2bT}}{(1-e^{-bT})^4}\approx\frac{(AT)^2}{(bT)^4}, \tag{16.32}$$

а на частоте $\omega T=\pi$

$$|\hat{S}_1(e^{i\pi})|^2=(AT)^2\frac{e^{-2bT}}{(1+e^{-bT})^4}\approx\frac{(AT)^2}{2^4}. \tag{16.33}$$

Отношение $|\hat{S}_1(e^{i\pi})|^2/|\hat{S}_1(e^{i0})|^2$ при $bT=0{,}05$ уменьшается до $(0{,}05/2)^4\approx 4\cdot 10^{-7}\to(-64$ дБ).

Задача существенно облегчается при использовании сигналов, спектр которых убывает пропорционально $1/\omega$ [а не $1/\omega^2$, как в (16.29)].

16.8. ВЛИЯНИЕ ПОМЕХ

Кепстральная обработка, основанная на логарифмической нелинейности, весьма чувствительна к воздействию помех. Для оценки допустимого уровня помехи рассмотрим следующую модель: входной сигнал $s(t)$, длительность которого $T_с$ и спектральная плотность $S(\omega)$ известны, действует на фоне помехи $x(t)$, являющейся стационарным случайным процессом с заданной спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$.

Отношение сигнал-помеха на входе устройства определим как отношение соответствующих энергий:

сигнала

$$Э_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega; \tag{16.34}$$

помехи

$$Э_x = T_с \sigma_x^2 = T_с \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega, \tag{16.35}$$

где σ_x^2 — средняя мощность помехи, которая действует на отрезке времени $T_с$, совпадающем с длительностью обрабатываемого сигнала $s(t)$.

Из последнего выражения видно, что величина $T_с W_x(\omega)$ имеет смысл спектральной плотности энергии рассматриваемой помехи. Учитывая, что $S^2(\omega)$ есть спектральная плотность энергии сигнала, введем функцию

$$\eta(\omega) = S^2(\omega)/T_с W_x(\omega), \tag{16.36}$$

характеризующую соотношение спектральных плотностей энергии сигнала $s(t)$ и помехи $x(t)$ на входе устройства.

Для упрощения анализа положим $W_x(\omega) = W_0 = \mathrm{const}$ (белый шум). В реальных устройствах обработки сигнала, как правило, предусматривается предварительная линейная фильтрация для режекции помехи на частотах, превышающих наивысшую частоту спектра сигнала. Пусть спектр $S(\omega)$ заключен в полосе $-{}^1/_{2T} < f < {}^1/_{2T}$, где T — шаг дискретизации сигнала $s(t)$. Тогда полосу прозрачности фильтра можно приравнять $1/T$, а мощность помехи в указательной полосе $\sigma_x^2 = W_0/T$; при этом (16.36) принимает вид

$$\eta(\omega) = \frac{S^2(\omega)}{T_с W_0} = \frac{S^2(\omega)}{T_с T \sigma_x^2}. \tag{16.37}$$

Дискретизация сигнала и помехи является линейной операцией, и отношение $\eta(\omega)$ остается неизменным. Разделив числитель и знаменатель в (16.37) на T^2, получим

$$\eta(\omega) = \frac{S^2(\omega)/T^2}{\frac{T_с}{T}\sigma_x^2} = \frac{|S_T(\omega)|^2}{N\sigma_x^2},$$

где $N = T_c/T$ — число отсчетов сигнала $s(t)$; $\mathbf{S}_T(\omega)/T$ — спектральная плотность дискретизованного сигнала. Если $T < 1/2f_m$ и парциальные спектры не перекрываются, то $\mathbf{S}_T(\omega)$ совпадает с z-преобразованием $\hat{\mathbf{S}}(z)$.

В дальнейшем исходим из выражения

$$\eta(\omega) = \frac{|\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})|^2}{N\sigma_x^2}. \qquad (16.38)$$

Следует, однако, иметь в виду, что определение квадрата модуля функции $\dot{\mathbf{S}}(z)$ является нелинейной операцией и необходимо учитывать взаимодействие сигнала и помехи.

Обратимся к структурной схеме на рис. 16.11 и допустим, что на полезный сигнал $s(t)$ накладывается (аддитивно) помеха $x(t)$. После дискретизации смеси $s(t)+x(t)$ и осуществления дискретного преобразования Фурье (на выходе БПФ) получим совокупность спектральных коэффициентов $\mathbf{Y}[n] = \mathbf{S}[n] + \mathbf{X}[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, где $\mathbf{X}[n]$ — случайная величина.

Представление $\mathbf{Y}[n]$ в виде действительной и мнимой частей, их квадрирование и дальнейшие преобразования имеют смысл при условии, что $|\mathbf{S}[n]|^2 \gg \overline{|\mathbf{X}[n]|^2}$ при любом n. Иными словами, во всем спектре частот $-1/_{2T} < f < 1/_{2T}$ спектральная плотность энергии сигнала должна быть велика по сравнению с величиной $N\sigma_x^2$.

Исследования показывают, что при выполнении условия

$$\min\eta(\omega) = \eta(\omega = \pi/T) > 10$$

погрешность определения кепстра, обусловленная квадрированием функции $\hat{\mathbf{S}}(z)$, а также логарифмированием функции $|\hat{\mathbf{S}}|(z)|^2$, приемлема. Однако обеспечение приведенного условия связано со значительными трудностями, особенно при использовании сигналов со спектром, очень быстро убывающим на хвостах.

Проиллюстрируем это на примере сигнала $s_1(t)$ из предыдущего параграфа, где под помехой подразумевается шум квантования в АЦП.

Основываясь на выражении (16.31′), получаем

$$\eta(\omega) = \frac{(ATe^{-bT})^2}{(1-2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})^2}\frac{1}{N\sigma^2_x}.$$

Целесообразно выразить $\eta(\omega)$ через отношение полных энергий сигнала и помехи на входе логарифмической нелинейности:

$$Э_s = \int_0^\infty s_1^2(t)\,dt = A\int_0^\infty t^2 e^{-2bt}dt = \frac{A^2}{4b^3};$$

$$Э_x = \sigma^2_x T_c = \sigma_x^2 NT; \quad \frac{Э_s}{Э_x} = \frac{A^2}{4b^3}\frac{1}{\sigma^2_x NT} = \frac{(AT)^2}{4(bT)^3 N\sigma^2_x},$$

$$\eta(\omega)=\frac{4\,(bT)^3 e^{-2bT}}{(1-2e^{-bT}\cos\omega T+e^{-2bT})^2}\,\frac{Э_s}{Э_x}.$$

Потребуем, чтобы в точке $\omega T=\pi$, в которой спектральная плотность минимальна, выполнялось условие $\eta(\omega)=10$. При $bT=0{,}05$ это условие приводит к равенству

$$10=\frac{4\,(0{,}05)^3\,0{,}9}{(1+0{,}95)^4}\,\frac{Э_s}{Э_x}$$

или

$$Э_s/Э_x\approx 3{,}1\cdot 10^5\rightarrow(55\,\text{дБ}).$$

Реализация устройства кепстральной обработки при столь жестком требовании $Э_s/Э_x$ является сложной проблемой. Для ее упрощения целесообразно, как уже отмечалось, применять сигналы со спектром, убывающим медленнее, чем в рассмотренном примере. Но при этом следует помнить, что при неизменном шаге дискретизации T снижение скорости убывания спектра приводит к ошибкам измерения из-за перекрытия спектров на участке вблизи точки $\omega T=\pi$.

16.9. КОМПЛЕКСНЫЙ КЕПСТР

В задачах, требующих не только определения задержки и относительного уровня отраженного сигнала, но и выявления формы сигналов, необходимо учитывать их фазовые характеристики. Поэтому при определении кепстра следует исходить из комплексной спектральной плотности сигнала, а не только из ее модуля [как в выражениях (16.20)—(16.28)].

Комплексный кепстр континуального сигнала $s(t)$ определяется выражением

$$\mathbf{C}_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\mathbf{S}(\omega)\,e^{i\omega q}\,d\omega, \qquad (16.39)$$

а дискретного сигнала $s[m]$ — в виде

$$\mathbf{C}_s[m]=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\ln\hat{\mathbf{S}}(z)\,z^{m-1}dz, \qquad (16.40)$$

или эквивалентной ему форме

$$\mathbf{C}_s[m]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})\,e^{i\omega mT}d\,(\omega T). \qquad (16.41)$$

Преобразования сигнала $s(t)$, приводящие к $\mathbf{C}_s(q)$, представлены на рис. 16.7, *а*; аналогичные преобразования дискретного сигнала $s[m]$ — на рис. 16.7, *б*.

Отмеченное в § 16.5 требование сходимости интеграла в выражении (16.9) относится также к определению комплексного

кепстра. Главной же особенностью комплексного кепстра является его зависимость от неоднозначного аргумента комплексного логарифма, так как $e^{i\theta_s(\omega)}=e^{i\theta_s(\omega)+ik2\pi}$, где k — любое целое число.

Этот вопрос рассматривается в § 16.10. Можно, однако, привести большое число сигналов, для которых указанных затруднений не существует. Это особенно относится к дискретным последовательностям, а также к сигналам, выраженным через дельта-функцию.

Например, для основного испытательного сигнала $s(t)=\delta(t)$ очевидны следующие равенства:

$$\mathbf{S}(\omega)=1,\ \ln\mathbf{S}(\omega)=0,\ \mathbf{C}_s(q)=0. \quad (16.42)$$

Таким образом, кепстр $\mathbf{C}_s(q)$ дельта-функции $\delta(t)$ равен нулю. В данном случае кепстральное преобразование полностью подавляет дельта-функцию.

Кепстр той же функции, взятой с весом a, т. е. при $s(t)=a\delta(t)$, $a>0$,

$$\mathbf{S}(\omega)=a,\ \ln\mathbf{S}(\omega)=\ln a$$

и

$$\mathbf{C}_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln a e^{i\omega q}d\omega=\ln\delta(q). \quad (16.43)$$

Весовой коэффициент $\ln a$ и при $a<1$ отрицателен, при $a>1$ положителен.

Пусть сигнал $S(t)$ задан в виде последовательности

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta(t-nt_0), \quad t_0>0.$$

Тогда

$$\mathbf{S}(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-in\omega t_0},$$

а с учётом соотношения $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k/k!=e^x$

$$\mathbf{S}(\omega)=\exp(e^{-i\omega t_0}), \quad \ln\mathbf{S}(\omega)=e^{-i\omega t_0},$$

$$\mathbf{C}_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t_0}\cdot e^{i\omega q}d\omega=\delta(q-t_0). \quad (16.44)$$

Кепстр рассматриваемого сигнала $s(t)$ содержит всего один импульс $\delta(q-t_0)$, задержанный (на оси q) на время t_0.

Приведем еще пример континуального сигнала вида

$$s(t)=1/\pi t,\ -\infty<t<\infty,$$

для которого спектральная плотность

$$\mathbf{S}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\,e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{t}\,dt-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{t}\,dt\right]=$$

$$=\begin{cases}-i \text{ при } \omega>0,\\ +i \text{ при } \omega<0\end{cases}$$

(см. § 3.9).

Учитывая, что $\mp i=e^{\mp i\pi/2}$ и $\ln(e^{\mp i\pi/2})=\mp i\pi/2$, получаем

$$\ln\mathbf{S}(\omega)=\begin{cases}-i\pi/2 \text{ при } \omega>0,\\ +i\pi/2 \text{ при } \omega<0.\end{cases}$$

Таким образом, $\ln\mathbf{S}(\omega)$ отличается от $\mathbf{S}(\omega)$ только коэффициентом $\pi/2$, из чего следует, что кепстр рассматриваемого сигнала $s(t)=1/\pi t$

$$\mathbf{C}_s(q)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\pi q}=\frac{1}{2q}.$$

В данном примере кепстральное преобразование не изменяет форму функции.

Приведем еще пример сигнала вида

$$s(t)=a/\pi(a^2+t^2),$$

для которого спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)=e^{-a|\omega|}$ и $\ln\mathbf{S}(\omega)=-a|\omega|$.

Запишем это выражение в следующей эквивалентной форме:

$$\ln\mathbf{S}(\omega)=\begin{cases}-a(-i)\,i\omega \text{ при } \omega>0,\\ -a(+i)(i\omega) \text{ при } \omega<0.\end{cases}$$

От предыдущего примера $\ln\mathbf{S}(\omega)$ отличается множителем $i\omega$, соответствующим операции дифференцирования, а также заменой $\pi/2$ на a; следовательно, обратное преобразование Фурье, определяющее кепстр, дает

$$C_s(q)=-a\frac{d}{dq}(1/\pi q)=a/\pi q^2.$$

16.10. О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРА СИГНАЛА

Основной операцией при определении кепстра является логарифмирование спектральной плотности входного сигнала. В случае кепстра мощности задача ограничивается логарифмированием модуля $S(\omega)$ и вопрос об аргументе, т. е. о ФЧХ, не возникает. В случае же комплексного кепстра приходится иметь

дело с комплексным логарифмом $\ln \mathbf{S}(\omega)=\ln[S(\omega)\,e^{i\theta_s(\omega)}]$, который следует записывать в общей форме

$$\ln \mathbf{S}(\omega)=\ln \mathbf{S}(\omega)+i\theta_s(\omega)=\ln S(\omega)+$$
$$+i[\theta_{s\text{гл}}(\omega)+K\cdot 2\pi]. \qquad (16.45)$$

Здесь $\theta_{s\text{гл}}(\omega)$ — главное значение аргумента, определяемое «по модулю 2π», т. е. с отбрасыванием целого числа 2π, так что $|\theta_{s\text{гл}}|\leqslant\pi$.

Возникает неоднозначность определения ФЧХ, которая особенно проявляется при измерении фазы колебания. Известно, что измерение фазы основано на сравнении ее с фазой опорного колебания. Но «разность фаз» однозначно можно определить только в пределах $\pm 180°$, хотя истинная разность фаз может при этом достигать сотен и даже тысяч радиан (например, в спектре ЛЧМ сигнала).

Проблема неоднозначности определения ФЧХ особенно актуальна при обработке дискретных сигналов.

Неоднозначность можно устранить с помощью специальной обработки, основанной на предположении о непрерывности функции $\theta_s(\omega)$ в спектрах реальных сигналов. Действительно, в любой физической цепи, используемой для формирования сигнала, имеет место задержка во времени. Величина задержки сигнала, обусловленной полосой частот в окрестности фиксированной частоты ω_0, так называемая групповая задержка, определяется производной функции $\theta_s(\omega)$ в указанной окрестности. Поскольку величина задержки всегда конечна, очевидно, что функция $\theta_s(\omega)$ не может иметь разрывов непрерывности и, следовательно, производная функция $\ln \mathbf{S}(\omega)$ по частоте

$$\frac{d}{d\omega}\ln \mathbf{S}(\omega)=\frac{1}{\mathbf{S}(\omega)}\,\frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega} \qquad (16.46)$$

ограничена при любых частотах $0<\omega<\infty$.

Зададим значение функции $\theta_s(\omega)$ на какой-либо фиксированной частоте. Из-за нечетности функции $\theta_s(\omega)$ целесообразно положить $\theta_s(0)=0$. Кроме того, пронормируем АЧХ, положив $S(0)=1$, так что $\ln S(0)=0$.

Тогда, основываясь на выражении (16.46), представим $\ln \mathbf{S}(\omega)$ в виде интеграла

$$\ln \mathbf{S}(\omega)=\int\limits_0^{\omega}\frac{1}{\mathbf{S}(\omega)}\,\frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega}\,d\omega. \qquad (16.47)$$

Определенная таким образом функция $\ln \mathbf{S}(\omega)$ является однозначной.

Применим аналогичное рассуждение к дискретному сигналу $\{s[m]\}$. Вместо спектральной плотности $\mathbf{S}(\omega)$ введем в рассмотрение z-преобразование $\hat{\mathbf{S}}(z)$.

Логарифмическая производная по аналогии с (16.46)

$$\frac{d}{dz}\ln \hat{\mathbf{S}}(z)=\frac{1}{\hat{\mathbf{S}}(z)}\frac{d\hat{\mathbf{S}}(z)}{dz}=\hat{\mathbf{Y}}'(z), \tag{16.48}$$

где $\hat{\mathbf{Y}}(z)=\ln\hat{\mathbf{S}}(z)$, а штрих обозначает производную по z.

Функцию рассматриваемую как z-преобразование, можно записать в виде ряда

$$\hat{\mathbf{Y}}(z)=\ln \hat{\mathbf{S}}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\, z^{-m}. \tag{16.49}$$

Заметим, что, применив к последнему выражению обратное z-преобразование (16.40), получим $y[m]$, которое есть не что иное, как искомый кепстр (комплексный). Однако предварительно необходимо устранить неоднозначность комплексного логарифма $\ln\hat{\mathbf{S}}(z)$. С этой целью продифференцируем (16.49) и приравняем $\hat{\mathbf{Y}}(z)$ выражению (16.48):

$$\hat{\mathbf{Y}}'(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{-m\cdot y[m]\}z^{-m-1}=\hat{\mathbf{S}}'(z)/\hat{\mathbf{S}}(z).$$

Домножив $\hat{\mathbf{Y}}'(z)$ на z, получим

$$z\hat{\mathbf{Y}}'(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{-my[m]\}z^{-m}=z\hat{\mathbf{S}}'(z)/\hat{\mathbf{S}}(z).$$

Входящий в это выражение ряд по отрицательным степеням z представляет собой z-преобразование последовательности $\{-my[m]\}$, поэтому с помощью (16.40) получаем

$$-my[m]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C [z\hat{\mathbf{S}}'(z)/\hat{\mathbf{S}}(z)]\, z^{m-1}dz$$

и окончательно

$$y[m]=-\frac{1}{2\pi i m}\oint_C [\hat{\mathbf{S}}'(z)/\hat{S}(z)]\, z^{m}dz. \tag{16.50}$$

Найденное таким образом значение $y[m]$ можно обозначить символом $\mathbf{C}_s[m]$ аналогично выражению (16.40).

Приведенные рассуждения справедливы при условии, что окружность единичного радиуса на z-плоскости входит в область сходимости функции $\ln\hat{\mathbf{S}}(z)$. Заменив контур интегрирования C на $|z|=1$, перепишем (16.50) в форме

$$y[m]=-\frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi}[\hat{\mathbf{S}}'(\mathrm{e}^{i\omega T})/\hat{\mathbf{S}}(\mathrm{e}^{i\omega T})]\,\mathrm{e}^{i\omega T(m+1)}d(\omega T)=$$

$$=\mathbf{C}_s[m] \quad \text{при} \quad m\geqslant 1. \tag{16.51}$$

Итак, комплексный кепстр найден без обращения к логарифму и, следовательно, однозначно.

При $m=0$ значение кепстра можно определить непосредственно из (16.41):

$$\mathbf{C}_s[0]=y[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})\,d(\omega T)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\ln|\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})|+i\arg\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})]\,d(\omega T).$$

В данном случае неоднозначность логарифма не проявляется поскольку $\arg\hat{\mathbf{S}}(l^{i\omega T})$ — нечетная функция частоты и

$$C_s[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\hat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})|\,d\omega T. \qquad (16.51')$$

Наряду с описанным методом, основанным на логарифмической производной, широко распространен метод прямого вычисления комплексного лографма с помощью БПФ. При этом используются соотношения

$$y[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\hat{\mathbf{S}}(n)\,e^{i(2\pi/N)nm}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{\ln S(\omega)+$$

$$+i[\theta_{s\,\text{гл}}(\omega)+k\cdot 2\pi]\}\,e^{i(2\pi/N)nm},\quad m=0,1,\ldots,N-1.$$

Главное значение аргумента $\theta_{s\,\text{гл}}(\omega)$ вычисляется на ЭВМ непосредственно с помощью стандартной программы. Это главное значение фазы затем «разворачивается» так, чтобы получились отсчеты из непрерывной ФЧХ спектра сигнала. Непрерывная ФЧХ $\theta_s(\omega)$ и отсчеты $\theta_s(n\Delta\omega)$ показаны на рис. 16.17, *а*, а главное значение $\theta_{s\,\text{гл}}(\omega)$ — на рис. 16.17, *б*.

В пределах одного интервала $\Delta\omega$ набег фазы значительно меньше π. На частотах $\omega=n\Delta\omega$, где скачок $\theta_s(\omega)$ превышает $+\pi$, для восстановления истинного аргумента требуется добавить -2π; соответственно при скачке $-\pi$ требуется добавить $+2\pi$. На рис. 16.17, *в* изображена корректирующая последовательность, добавляемая к последовательности $\theta_{s\,\text{гл}}(n)$.

В заключение рассмотрим важный для практики случай входной последовательности $\{s[m]\}$, $m\geqslant 0$, когда z-преобразование (одностороннее) определяется выражением

$$\hat{\mathbf{S}}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}s[m]\,z^{-m}, \qquad (16.52)$$

причем полюсы и нули функции $\hat{\mathbf{S}}(z)$ расположены внутри единичной окружности, т. е. радиус сходимости ряда (16.52) $r_0<1$.

Подобные последовательности называются **минималь-**

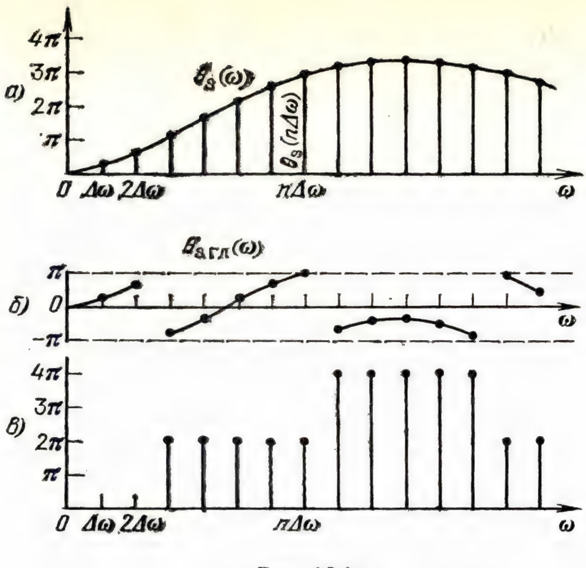


Рис. 16.17

но-фазовыми, по аналогии с системами, передаточная функция которых $\hat{K}(z)$ имеет особые точки (полюсы и нули) внутри круга $|z|=1$ (см. § 15.7).

Таким образом, модуль и аргумент z-преобразования минимально-фазовой последовательности однозначно связаны, а комплексный логарифм

$$\ln \hat{S}(e^{i\omega T}) = \ln|\hat{S}(e^{i\omega T})| + i\theta_s(\omega)$$

обладает тем свойством, что его действительная и мнимая части образуют пару преобразований Гильберта. В этом случае комплексный кепстр можно вычислять по формуле

$$C_s(m) = y(m) = 2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\hat{S}(e^{i\omega T})|\cos(m\omega T)\,d(\omega T),$$

которая отличается от (16.20′) только степенью $|\hat{S}(e^{i\omega T})|$ в аргументе логарифма.

Из последнего выражения видно, что комплексный кепстр минимально-фазового сигнала $s[m]$ равен кепстру мощности $C_s(m)$ того же сигнала, и для его получения можно воспользоваться схемой, представленной на рис. 16.11.

Простейшим примером минимально-фазового сигнала является $s(t)=e^{-\alpha t}$, $t\geqslant 0$, с z-преобразованием $\hat{S}(e^{i\omega T}) = 1/(1-e^{-\alpha T}e^{i\omega T})$, имеющим нуль $z_0=0$ и полюс $z_п=e^{-\alpha T}<1$ [см. (12.22)].

Сигнал $s(t)=Ate^{-bt}$, рассмотренный в § 16.7, является другим примером минимально-фазового сигнала.

16.11. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЕПСТРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

По аналогии с теоремами о спектрах, изложенными в § 2.5, рассмотрим связь между некоторыми преобразованиями исходного сигнала $s(t)$ и преобразованиями кепстра.

Установление этих связей представляет интерес в основном применительно к комплексным кепстрам.

16.11.1. СДВИГ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть исходному сигналу $s_1(t)$ со спектральной плотностью $\mathbf{S}_1(\omega)$ соответствует кепстр $\mathbf{C}_{s1}(q)$. При задержке сигнала на t_0 получим функцию времени $s_2(t)=s_1(t-t_0)$ со спектральной плотностью $\mathbf{S}_2(\omega)=e^{-i\omega t_0}\mathbf{S}_1(\omega)$, логарифм которой

$$\ln \mathbf{S}_2(\omega) = -i\omega t_0 + \ln \mathbf{S}_1(\omega).$$

Второму слагаемому соответствует кепстр $\mathbf{C}_1(q)$ исходного сигнала $s_1(t)$, а первое слагаемое в соответствии с (16.39) приводит к следующему кепстру:

$$\mathbf{C}_{t0}(q) = -t_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega q} d\omega. \tag{16.53}$$

Учитывая, что функции $\delta(q)$ соответствует спектральная плотность, равная единице, множитель $i\omega$ можно рассматривать как спектральную плотность функции $\frac{d}{dq}\delta(q)$. Тогда (16.53) определяет функцию $\frac{d}{dq}\delta(q)$ и, следовательно,

$$\mathbf{C}_{t0}(q) = -t_0 \frac{d}{dq}\delta(q). \tag{16.54}$$

Таким образом, кепстр сигнала $s_2(t)=s_1(t-t_0)$

$$\mathbf{C}_{s2}(q) = -t_0 \frac{d}{dq}\delta(q) + \mathbf{C}_{s1}(q). \tag{16.55}$$

Из сопоставления (16.55) и (16.54) вытекает, что кепстр смещенной дельта-функции $\delta(t-t_0)$ равен $-t_0 \frac{d}{dq}\delta(q)$. Оперирование производной дельта-функции затруднительно, однако при обработке сигнала можно исключить участок кепстрального времени в окрестности точки $q=0$.

Рассмотрим соотношение между $\mathbf{C}_{s2}[m]$ и $\mathbf{C}_{s1}[m]$ для цифрового сигнала $s_2[m]=s_1[m-m_0]$.

Основываясь на методе z-преобразования, получаем

$$\hat{\mathbf{S}}_2(e^{i\omega T}) = e^{-im_0\omega T}\hat{\mathbf{S}}_1(e^{i\omega T}),$$

$$\ln \hat{\mathbf{S}}_2(e^{i\omega T}) = -im_0\omega T + \ln \hat{\mathbf{S}}_1(e^{i\omega T}).$$

Применяя к этому выражению обратное z-преобразование по формуле (12.36), получаем

$$\mathbf{C}_{s2}[m] = -im_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega T \, e^{im\omega T} d(\omega T) + \mathbf{C}_{s1}[m],$$

где $\mathbf{C}_{s1}[m]$ — кепстр сигнала $s_1[m]$, а

$$\mathbf{C}_{t0}[m] = -im_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{imx} dx.$$

При $m=0$ интеграл обращается в нуль, так что

$\mathbf{C}_{t0}[0] = 0.$

При $m \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(mx)\, dx + i \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx)\, dx =$$

$$= 2i \frac{\sin(m\pi) - m\pi \cos(m\pi)}{m^2} = -2i \frac{\pi}{m} \cos(m\pi)$$

и

$$\mathbf{C}_{t0}[m] = -\frac{im_0}{2\pi} \left[-2i \frac{\pi}{m} \cos(m\pi) \right] = \frac{m_0}{m} (-1)^{m-1}.$$

Таким образом, при $m \neq 0$

$$\mathbf{C}_{s2}[m] = \frac{m_0}{m} (-1)^{m-1} + \mathbf{C}_{s1}[m].$$

Как видим, в случае цифрового сигнала кепстр $\mathbf{C}_{s2}[m]$ задержанного сигнала отличается от $\mathbf{C}_{s1}[m]$ лишь знакопеременным сигналом $\frac{m_0}{m}(-1)^{m-1}$, убывающим с возрастанием m; в точке $m=0$ $\mathbf{C}_{t0}[0]=0$ и дельта-функция не возникает.

16.11.2. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ

Пусть $s_2(t) = s_1(nt)$, $n > 0$.
В соответствии с п. 2.5.4

$$\mathbf{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \mathbf{S}_1(\omega/n), \quad \ln \mathbf{S}_2(\omega) = -\ln(n) + \ln \mathbf{S}_1(\omega/n).$$

Кепстр сигнала $s_2(t)$

$$\mathbf{C}_{s2}(q) = -\ln(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega q} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathbf{S}_1(\omega/n)\, e^{i\omega q} d\omega =$$

$$= -\ln(n)\, \delta(q) + n\mathbf{C}_{s1}(nq).$$

Изменение масштаба времени t приводит к такому же изменению масштаба кепстрального времени q; кроме того, возникает функция $\delta(q)$.

При дискретизованном сигнале изменение масштаба времени означает изменение шага T при неизменном числе отсчетов N (что необходимо для сохранения формы сигнала).

Положим $T_2=nT_1$, $n>0$, и запишем выражение (12.20) для z-преобразования сигнала $s_2(t)$

$$\hat{S}_2(e^{i\omega T})=\sum_{m=0}^{N-1} s_2[m]\, e^{-i\omega T_2}=\sum_{m=0}^{N-1} s_2[m]\, e^{-i\omega nT_1}.$$

При сжатии или растяжении исходного сигнала отсчеты функции $s_1(t)$ сохраняют свое значение (при $N=\text{const}$).

Таким образом,

$$\hat{S}_2(e^{i\omega T})=\sum_{m=0}^{N-1} s_1[m]\, e^{-i(\omega n)T_1}=\hat{S}_1(e^{i\omega nT_1})$$

и кепстр

$$C_{s2}[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln \hat{S}_1(e^{in\omega T_1})\cos(mn\omega T_1)\,d(n\omega T_1).$$

Переход от шага дискретизации T_1 к $T_2=nT_1$ не изменяет структуру кепстра. Изменяется лишь диапазон частот ω, соответствующий одному обходу окружности единичного радиуса на z-плоскости (от $-\pi/T_1$, π/T_1 до $-\pi/nT_1$, π/nT_1). Соответственно изменяется и масштаб кепстрального времени; интервалы между отсчетами кепстра на оси q будут $T_2=nT_1$.

16.11.3. СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА

Применим преобразование Фурье к произведению

$$a(t)=s(t)\, e^{i\omega_0 t},$$

где $s(t)$ — «медленная» (модулирующая) функция со спектральной плотностью $S(\omega)$; $e^{i\omega_0 t}$ — несущее колебание.

Повторяя рассуждения, приведенные в п. 2.5.5, приходим к спектру

$$S_a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega t}dt=S(\omega-\omega_0).$$

Тогда

$$\ln S_a(\omega)=\ln S(\omega-\omega_0)$$

и кепстр сигнала $a(t)$

$$\mathbf{C}_a(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln \mathbf{S}(\omega-\omega_0)\, e^{i\omega q}\, d\omega.$$

Перейдя к новой переменной $\Omega=\omega-\omega_0$, получим

$$\mathbf{C}_a(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln \mathbf{S}(\Omega)\, e^{i\Omega q}\, d\Omega e^{i\omega_0 q}=\mathbf{C}_s(q)\, e^{i\omega_0 q},$$

где $\mathbf{C}_s(q)$ — кепстр исходного сигнала $s(t)$.

Итак, для определения кепстра $\mathbf{C}_a(q)$ модулированного колебания $a(t)$ достаточно умножить кепстр $\mathbf{C}_s(q)$ модулирующей функции на $e^{i\omega_0 q}$. В этом смысле эффект модуляции — домножение сигнала на несущее колебание — проявляется одинаково для $a(t)$ и $\mathbf{C}_a(q)$.

16.11.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛА

Сигналу $s(t)=\frac{ds_1(t)}{dt}$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)=i\omega\mathbf{S}_1(\omega)$ и логарифм

$$\ln \mathbf{S}(\omega)=\ln(i\omega)+\ln \mathbf{S}_1(\omega).$$

Поэтому

$$\mathbf{C}_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln(i\omega)\, e^{i\omega q}\, dq+\mathbf{C}_{s1}(q)=\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)+\mathbf{C}_{s1}(q).$$

При дифференцировании сигнала $s_1(t)$ к кепстру $\mathbf{C}_{s1}(q)$ добавляется кепстр $\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)$, который запишем в форме

$$\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\omega\left[\frac{\ln(i\omega)}{i\omega}\right]e^{i\omega q}\, dq.$$

Спектральной плотности $(\ln i\omega)/i\omega$ соответствует оригинал $-(\gamma+\ln q)u(q)$, где $\gamma=0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера; $u(q)$ — единичный скачок в момент $q=0$, а произведению $i\omega\left[\frac{\ln(i\omega)}{i\omega}\right]$ соответствует производная

$$-\frac{d}{dq}[(\gamma+\ln q)\, u(q)]=-\left[(\gamma+\ln q)\,\delta(q)+\frac{1}{q}u(q)\right]=\mathbf{C}_{\text{диф}}(q).$$

Таким образом,

$$\mathbf{C}_s(q)=-\left[(\gamma+\ln q)\,\delta(q)+\frac{1}{q}u(q)\right]+\mathbf{C}_{s1}(q).$$

При интегрировании сигнала получается аналогичный результат, изменяется лишь знак перед $\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)$.

Отметим, что дополнительный кепстр, обусловленный дифференцированием или интегрированием, не зависит от исходного сигнала

16.11.5. СЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

По заданным сигналам $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их кепстрам $\mathbf{C}_{s1}(q)$, $\mathbf{C}_{s2}(q)$ невозможно составить общее выражение для кепстра суммы $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$. Необходимо предварительно вычислить результирующую спектральную плотность $\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{S}_1(\omega)+$ $+\mathbf{S}_2(\omega)$. Исключением является случай, когда $s_1(t)$ и $s_2(t)$ полностью совпадают по форме и отличаются лишь значениями и положением во времени, вследствие чего их сумма $s(t)$ может быть представлена в виде свертки. Этот случай был рассмотрен в § 16.6.

16.11.6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИГНАЛОВ

Для нахождения кепстра сигнала $s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)$ требуется знание свертки их спектров $\mathbf{S}_1(\omega)$ и $\mathbf{S}_2(\omega)$, поэтому установить прямую связь между $\mathbf{C}_{s1}(q)$, $\mathbf{C}_{s2}(q)$ и кепстром $\mathbf{C}_s(q)$ не представляется возможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Френкс Л.** Теория сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Д. Е. Вакмана.— М.: Сов. радио, 1974.
2. **Сиберт У. М.** Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Пер. с англ. Э. Я. Пастрона, Л. А. Шпирта / Под ред. И. С. Рыжака.— М.: Мир, 1988.— Ч. 1—2.
3. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.— 4-е изд., перераб. и доп.— М.: Радио и связь, 1986.
4. **Янке Е. К., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции: Пер. с англ. / Под ред. Л. И. Седова.— М.: Наука, 1968.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: ГИФМЛ, 1963.
6. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники: Кн. 1. — М.: Сов. радио, 1974.
7. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника.— М.: Радио и связь, 1982.
8. **Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.** Разделение частот в теории колебаний и волн.— М.: Наука, 1983.
9. **Белакришнан А. В.** Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.
10. **Тихонов В. И., Бакаев Ю. Н.** Статистическая теория радиотехнических устройств.— М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1978.
11. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. И. Александрова.— М.: Мир, 1978.
12. **Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.** Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. С. Я. Шаца.— М.: Связь, 1979.
13. **Хармут Х. Ф.** Теория секвентного анализа: Пер. с англ. / Под ред. Л. М. Сороко.— М.: Мир, 1980.
14. **Вакман Д. Е., Седлецкий Р. М.** Вопросы синтеза радиолокационных сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.
15. **Papoulis A.** Signal Analysis.— Mc. Graw-Hill, 1977.

16. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем: Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.
17. **Марпл С. Л.-мл.** Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. О. И. Хабарова, Г. А. Сидоровой / Под ред. И. С. Рыжака.— М.: Мир, 1990.
18. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех.— М.: Сов. радио, 1960.
19. **Giordano A., Hsu F.** Least Squoro Esbimation with Applications to Digital Signal Processing.— Wiliams and Sun, 1985.
20. **Адаптивные** фильтры: Пер. с англ. / Под ред. С. М. Ряковского.— М.: Мир, 1988.
21. **Трахтман А. М.** Введение в обобщенную спектральную теорию.— М.: Сов. радио, 1972.
22. **Тихонов В. И.** Нелинейные преобразования случайных процессов.— М.: Радио и связь, 1986.
23. **Радиотехнические** цепи и сигналы. Примеры и задачи: Учеб. пособие для вузов / Г. Г. Галустов, И. С. Гоноровский, М. П. Демин и др.; Под ред. И. С. Гоноровского.— М.: Радио и связь, 1989.
24. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

8000 р

100 НО „РиС"

гор 99

У


И.С.Гоноровский, М.П.Демин